درس ۳ هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نمایندهٔ یک مجموعه از اعداد درنظر بگیریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به‌ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم:

(مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد m، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$$A_۰=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k\}=\{\cdots,-۸,-۴,۰,۴,۸,\cdots,۱۶,\cdots\}=[۰]_۴$$
$$A_۱=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۱\}=\{\cdots,-۷,-۳,۱,۵,\cdots,۱۳,\cdots,۲۱,\cdots\}=[۱]_۴$$
$$A_۲=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۲\}=\{\cdots,-۶,\cdots,۲,۶,۱۰,\cdots\}=[۲]_۴$$
$$A_۳=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۳\}=\{\cdots,-۱۳,\cdots,-۵,-۱,۳,۷,۱۱,\cdots\}=[۳]_۴$$

۱ دو عضو دلخواه از مجموعهٔ $A_۰$ را درنظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟
بله مضرب ۴ است . به طور مثال اگر ۸ و ۱۶ انتخاب شوند ۸=۸-۱۶ مضرب ۴ می باشد .

۲ از مجموعهٔ $A_۱$ دو عضو دلخواه را درنظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟ بله مضرب ۴ است .به طور مثال : ۸=۵-۱۳ مضرب ۴ است .

۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلّی برای هر دو عضو دلخواه از $A_۱$ اثبات کنید.

فرض کنید $a,b\in A_۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۴k_۱+۱ \\ b=۴k_۲+۱ \end{cases} \Rightarrow a-b=(۴k_۱+۱)-(۴k_۲+۱)$

$$\Rightarrow a-b=۴\underbrace{(k_۱-k_۲)}_{k_۳} \Rightarrow ۴\,|\,a-b$$

۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعهٔ $A_۲$ همگی بر عدد ۴، باقی‌ماندهٔ یکسان دارند؟ بله
در مورد مجموعهٔ $A_۳$ چه می‌توان گفت؟ تفاضل هر دو عدد دلخواه از $A_۳$ ، مضرب ۴ است .

می‌دانیم مجموعه‌های $A_۰$، $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ یک افراز برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند a و b، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

واقع‌اند ($A_۰$ ، $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) **بنا به تعریف افراز ، نباید اشتراک داشته باشند .**
و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند(باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشند یا اصطلاحاً a و b بر ۴ هم باقی‌مانده باشند) همواره $۴|a-b$ و اگر این‌طور نباشد $۴\nmid a-b$.

تعریف : برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$، می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از :

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ a\overset{m}{\equiv}b\Leftrightarrow m\,|\,a-b\ (m\in\mathbb{N})$$

مثال:
$$\begin{cases}۱۲\overset{۵}{\equiv}۲\ ,\ -۱۱\overset{۶}{\equiv}۱\\ -۲۹۵\overset{۱۰}{\equiv}-۵\ ,\ ۲۳\overset{۳}{\equiv}-۷\end{cases}$$

قرارداد : مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x=mk+r\}$ را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.
برای استفاده از رابطهٔ هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطهٔ عاد کردن، ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی به‌راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

سه خاصیت مهم در هم نهشتی :

۱- $\forall m\in\mathbb{N}\,,a\in\mathbb{Z}:a\overset{m}{\equiv}a$ (هر عدد صحیح با خودش هم نهشت است.)

۲- برای هر $m\in\mathbb{N}$ و اعداد صحیح b,a داریم : $a\overset{m}{\equiv}b\Leftrightarrow b\overset{m}{\equiv}a$

۳- برای هر $m\in\mathbb{N}$ و اعداد صحیح c,b,a داریم : $a\overset{m}{\equiv}b\ \wedge\ b\overset{m}{\equiv}c\ \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$ (خاصیت تعدی)

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow\begin{cases}a+c\overset{m}{\equiv}b+c\\ a-c\overset{m}{\equiv}b-c\end{cases}$$

ویژگی ۱ : به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

اثبات :

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\Rightarrow m\,|\,a+c-b-c$$
$$\Rightarrow m\,|\,(a+c)-(b+c)\Rightarrow(a+c)\overset{m}{\equiv}(b+c)$$

مثال : با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم، $۷\overset{۴}{\equiv}-۱$ $\left([۷\,,(-۱)]\in A_۳\right)$ یا $(۴\,|\,۷-(-۱))$ در این صورت اگر ۵ واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصلهٔ این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، اعدادحاصل یعنی $۱۲=۵+۷$ و $۴=۵+۱-$ نیز در $A_۳$ قرار خواهند گرفت.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

ویژگی ۲ : دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

اثبات :

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\Rightarrow m\,|\,c\times(a-b)\Rightarrow m\,|\,ac-bc$$
$$\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

تذکر : عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \overset{m}{\equiv} b$ (قانون حذف برای رابطهٔ هم‌نهشتی در حالت کلّی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید. $۲\times۲ \overset{۲}{\equiv} ۳\times۲$ ولی $۳ \overset{۲}{\not\equiv} ۲$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

ویژگی ۳ : (دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) $(n \in \mathbb{N})$

مثال : $(۵ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۵^۳ \overset{۳}{\equiv} ۲^۳)$

اثبات : (از اتحاد $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \;\Rightarrow\; m \mid (a-b)\underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})}_{c}$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

تذکر : می‌دانیم $۳^۲ \overset{۴}{\equiv} ۵^۲$ ولی $۳ \overset{۴}{\not\equiv} ۵$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که **عکس ویژگی ۳ برقرار نیست.**

$$a \overset{m}{\equiv} b \;,\; c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd & ① \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d & ② \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d & ③ \end{cases}$$

ویژگی ۴ : دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$(۱۵ \overset{۵}{\equiv} ۱۰ \,,\, ۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۱۵\times۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۰\times۲$ و $۱۵\times۲ \overset{۵}{\equiv} ۱۰\times۷)$

و $۱۵+۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۰+۲ \Rightarrow ۲۲ \overset{۵}{\equiv} ۱۲$

اثبات①:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \overset{\times c}{\Rightarrow} m \mid ac-bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c-d \overset{\times b}{\Rightarrow} m \mid bc-bd \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} m \mid (ac-bc)+(bc-bd)$$

$$\Rightarrow m \mid ac-bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$$

اثبات② و③ به عهدهٔ شما :

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c-d \end{array}\right\} \overset{\pm}{\longrightarrow} m \mid (a-b)\pm(c-d) \Rightarrow m \mid (a\pm c)-(b\pm d) \Rightarrow a\pm c \overset{m}{\equiv} b\pm d$$

تذکر مهم : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$

$$a = mq + r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

$$(۱۷۹ = ۱۱\times۱۶ + ۳ \Rightarrow ۱۷۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۳)$$

اثبات :

$$a=mq+r \Rightarrow a-r=mq \Rightarrow m \mid a-r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

نتیجه ۱ : هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانهٔ m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست آوریم.

مثال: $۲۹۶ \overset{۱۱}{\equiv} ? \rightarrow ۲۹۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$

نتیجه ۲ : اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m، هم باقی‌مانده باشند در این صورت $a \overset{m}{\equiv} b$.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۲۷)^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$$۲۷=۱۳\times۲+۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow \underbrace{(۲۷)^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۷}=۱}_{۱} \quad \text{و} \quad ۱۹=۱۳\times۱+۶$$

$$\Rightarrow \underbrace{۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶}_{۲} \xrightarrow{\text{با توجه به ① و ②}} (۲۷)^{۷}+۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱+۶ \xrightarrow{\text{با توجه به ①}} A \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \Rightarrow r=۷$$

پس باقی‌ماندهٔ A بر ۱۳، برابر با ۷ می‌باشد.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰$ را بر ۷ بیابید.

$$۱۰۰۰=۷\times۱۴۲+۶ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \;\text{و}\; ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۳}=-۱ \qquad ۱۳$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲ \overset{۷}{\equiv} (-۱)\times۱۲=-۱۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰ \overset{۷}{\equiv} (-۱۲)+۱۰=-۲ \;\text{و}\; -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow r=۵$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

ویژگی ۵ : می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

طبق فرض: $a \overset{m}{\equiv} b$

می‌دانیم: $mt \overset{m}{\equiv} mk$

$$\overset{\pm}{\Rightarrow} a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

مثال : می‌دانیم $۷ \overset{۵}{\equiv} ۲$ اگر به سمت چپ رابطه $۱۵=۵\times۳$ و به سمت راست آن $۲۵=۵\times۵$ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت $۷+۱۵ \overset{۵}{\equiv} ۲+۲۵$ یا $۲۲ \overset{۵}{\equiv} ۲۷$ که این رابطه برقرار است.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \ , (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

ویژگی ۶ : اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

نتیجه مهم : اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m)=1$ در این‌صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ در واقع قاعدهٔ حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال : واضح است که $3\times 4 \overset{3}{\equiv} 6\times 4$ و چون $(4,3)=1$ پس $3 \overset{3}{\equiv} 6$.

فعالیت

همان‌طور که در دورهٔ ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود؛ که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا درنظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تا ده تایی می‌شود صد تا و ده تا صد تایی می‌شود هزار تا و ...) بنابراین به راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به‌عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد :

$$1397 = 1\times 1000 + 3\times 100 + 9\times 10 + 7$$

$$\Rightarrow 1397 = 1\times 10^3 + 3\times 10^2 + 9\times 10 + 7$$

۱ هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید :

$$1388109 = 1\times 10^6 + 3\times 10^5 + 8\times 10^4 + 8\times 10^3 + 1\times 10^2 + 0\times 10^1 + 9$$

$$13571122 = 1\times 10^7 + 3\times 10^6 + 5\times 10^5 + 7\times 10^4 + 1\times 10^3 + 1\times 10^2 + 2\times 10^1 + 2$$

۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=1358112$ را بر عدد ۹ بیابید.

می‌دانیم $10 \overset{9}{\equiv} 1$ و بنابر ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی $10^n \overset{9}{\equiv} 1$ بنابراین :

$$A = 1\times 10^6 + 3\times 10^5 + 5\times 10^4 + 8\times 10^3 + 1\times 10^2 + 1\times 10 + 2$$

$$10^6 \overset{9}{\equiv} 1 \overset{\times 1}{\Rightarrow} 1\times 10^6 \overset{9}{\equiv} 1$$

$$10^5 \overset{9}{\equiv} 1 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3\times 10^5 \overset{9}{\equiv} 3$$

$$10^4 \overset{9}{\equiv} 1 \overset{\times 5}{\Rightarrow} 5\times 10^4 \overset{9}{\equiv} 5$$

$$10^3 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 8\times 10^3 \overset{9}{\equiv} 8$$

$$10^2 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 1\times 10^2 \overset{9}{\equiv} 1$$

$$10 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 1\times 10 \overset{9}{\equiv} 1$$

$$2 \overset{9}{\equiv} 2$$

با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم :

$$A \overset{9}{\equiv} 1+3+5+8+1+1+2$$

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهشتیِ اخیر مجموعِ ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\dots a_2 a_1 a_0}$ را بسط دهید و در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ به‌جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلّی بررسی کنید.

$$A=10^{n-1}\times a_{n-1}+\dots+\dots+\dots+10^2 a_2+10\ a_1+10^0 a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}1\times a_{n-1}+\dots+1\times a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}a_{n-1}+a_{n-2}+\dots+a_2+a_1+a_0$$

کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه $10\overset{3}{\equiv}1$، نتیجه می‌گیریم، $\forall k\in\mathbb{N}\ ,\ 10^k\overset{3}{\equiv}1$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ می‌دانیم که $10\overset{11}{\equiv}-1$؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n\overset{11}{\equiv}1$ و برای هر n فرد، $10^n\overset{11}{\equiv}-1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به‌جای توان‌های زوجِ عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فردِ عدد ۱۰، عدد (-1) قرار دهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=4\times10^6+9\times10^5+8\times10^4+\dots+2\times10+7$$

$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}4\times\dots+\dots\times(-1)+\dots\times1+\dots+2\times(-1)+7$$

$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}7-2+3-5+8-9+4=6\Rightarrow r=\dots$$

۳ می‌دانیم $10\overset{2}{\equiv}0$ و $10\overset{5}{\equiv}0$ و $10\overset{10}{\equiv}\dots$ در این‌صورت :

$$\forall k\in\mathbb{N}\ ;\ 10^k\overset{2}{\equiv}\dots \text{ و } 10^k\overset{5}{\equiv}\dots \text{ و } 10^k\overset{10}{\equiv}0$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-1}\ a_{n-2}\cdots a_2\ a_1\ a_0}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانهٔ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت :

$$A=10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\dots+10^2 a_2+10\ a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}0\times a_{n-1}+\dots+\dots+\dots\times a_2+\dots+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}\dots \text{ و } A\overset{5}{\equiv}\dots \text{ و } A\overset{10}{\equiv}a_0$$

نتیجهٔ حاصل را برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

۱ با توجه به اینکه $۱۰ \overset{۳}{\equiv} ۱$، نتیجه می‌گیریم، $\forall k \in \mathbb{N} \,,\, ۱۰^k \overset{۳}{\equiv} ۱$، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=۵۹۸۳۴۸$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

$$A = ۵\times۱۰^۵ + ۹\times۱۰^۴ + ۸\times۱۰^۳ + ۳\times۱۰^۲ + ۴\times۱۰^۱ + ۸$$

$$\left.\begin{array}{l}
۱۰^۵ \overset{۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times۵} ۵\times۱۰^۵ \overset{۳}{\equiv} ۵ \\
۱۰^۴ \overset{۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times۹} ۹\times۱۰^۵ \overset{۳}{\equiv} ۹ \\
۱۰^۳ \overset{۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times۸} ۸\times۱۰^۳ \overset{۳}{\equiv} ۸ \\
۱۰^۲ \overset{۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times۳} ۳\times۱۰^۲ \overset{۳}{\equiv} ۳ \\
۱۰^۱ \overset{۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times۴} ۴\times۱۰^۱ \overset{۳}{\equiv} ۴ \\
۸ \overset{۳}{\equiv} ۸
\end{array}\right\} \xrightarrow{+} A \overset{۳}{\equiv} ۵+۹+۸+۳+۴+۸ \Rightarrow A \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow r = ۱$$

قاعده : باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ ، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ .

۲ می‌دانیم که $۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} -۱$؛ بنابراین برای هر n زوج، $۱۰^n \overset{۱۱}{\equiv} ۱$ و برای هر n فرد، $۱۰^n \overset{۱۱}{\equiv} -۱$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۱ و در بسط عدد $A=۴۹۸۵۳۲۷$ به‌جای توان‌های زوجِ عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فردِ عدد ۱۰، عدد (۱−) قرار دهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=۴\times۱۰^۶+۹\times۱۰^۵+۸\times۱۰^۴+\cdots+۲\times۱۰+۷$$

$$\Rightarrow A \overset{۱۱}{\equiv} ۴\times۱ + ۹\times(-۱) + ۸\times۱ + \cdots + ۲\times(-۱) + ۷$$

$$\Rightarrow A \overset{۱۱}{\equiv} ۷-۲+۳-۵+۸-۹+۴ = ۶ \Rightarrow r = ۶$$

۳ می‌دانیم $۱۰ \overset{۲}{\equiv} ۰$ و $۱۰ \overset{۵}{\equiv} ۰$ و $۱۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ در این‌صورت : $\forall k \in \mathbb{N} \,;\, ۱۰^k \overset{۲}{\equiv} ۰$ و $۱۰^k \overset{۵}{\equiv} ۰$ و $۱۰^k \overset{۱۰}{\equiv} ۰$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-۱}\, a_{n-۲} \cdots a_۲\, a_۱\, a_۰}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانهٔ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت :

$$A=۱۰^{n-۱}a_{n-۱}+۱۰^{n-۲}a_{n-۲}+\ldots+۱۰^۲a_۲+۱۰\,a_۱+a_۰$$

$$\Rightarrow A \overset{۲}{\equiv} ۰\times a_{n-۱} + ۰\times a_{n-۲} + \cdots + ۰\times a_۲ + ۰\times a_۱ + a_۰$$

$$\Rightarrow A \overset{۲}{\equiv} a_۰ \text{ و } A \overset{۵}{\equiv} a_۰ \text{ و } A \overset{۱۰}{\equiv} a_۰$$

نتیجهٔ حاصل را برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ ، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ می باشد . بنابراین عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۲ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن عددی زوج باشد .

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۵ ، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۵ می باشد . بنابراین عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۵ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن صفر یا پنج باشد .

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰ ، همان رقم یکان آن عدد می باشد . بنابراین عددی بر ۱۰ بخش پذیر است که رقم یکان صفر باشد .

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده، مشخص شده است. به‌عنوان مثال : اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این‌صورت ۱۹=۱۲+۷ فروردین و ۲۶=۱۹+۷ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اولِ سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که، به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه[1] یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی‌ماه چند شنبه است؟

با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز **جمعه** می‌رسیم.

حال اگر فاصلهٔ ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم (۱۹=۹−۲۸) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $۱۹\overset{۷}{\equiv}۵$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این‌صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصلهٔ ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $d=$۲۹+۳×۳۰+۱۲=۱۳۱

از طرفی $۱۳۱\overset{۷}{\equiv}۵$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ۵ پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

می دانیم هفتم تیر پنجشنبه می باشد . بنابراین :

$$d=(۳۱-۷)+۲\times۳۱+۴\times۳۰+۲۲\overset{۷}{\equiv}۳+(-۱)+۱+۱=۴$$

پ	ج	ش	ی	د	س	چ
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

دوشنبه است .

معادلهٔ هم‌نهشتی

تعریف : یک رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax\overset{m}{\equiv}b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_0\in\mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax_0\overset{m}{\equiv}b$. $(a,b\in\mathbb{Z})$

۱ــ ۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

به‌عنوان مثال، معادلهٔ $x \overset{3}{\equiv} 2$ را درنظر بگیرید. در این معادله x می‌تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می‌تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب‌های این معادله یا جواب‌های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم‌نهشتی استفاده کنیم،

$$x \overset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow 3 \mid x-2 \Rightarrow (x-2)=3k \Rightarrow x=3k+2$$

که اگر k را به‌ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب‌های $x_\circ=2$ و $x_\circ=5$ و $x_\circ=8$ را به‌دست می‌آوریم و برای هر $k \in \mathbb{Z}$، جوابی برای معادله به‌دست می‌آید. در معادلهٔ فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست‌یابی به جواب‌های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم که ویژگی‌های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می‌کنند.

مثال : جواب‌های عمومی معادلهٔ $4x \overset{5}{\equiv} 17$ را به‌دست آورید.

$$4x \overset{5}{\equiv} 17 \,,\, 17 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 2$$

$$\overset{\text{ویژگی ۵}}{\Rightarrow} 4x \overset{5}{\equiv} 2+(2\times 5)$$

$$\Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 12 \overset{(4,5)=1}{\Rightarrow} \cancel{4}x \overset{5}{\equiv} \cancel{4}\times 3$$

$$\Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x=5k+3$$

$$(5 \mid x-3 \Rightarrow x-3=5k \Rightarrow x=5k+3)$$

مثال : همهٔ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

حل : اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $7 \mid 3x-13$ یا $3x \overset{7}{\equiv} 13$

$$3x \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13-7=6$$

$$\overset{(3,7)=1}{\Rightarrow} \cancel{3}x \overset{7}{\equiv} \cancel{3}\times 2 \Rightarrow x=7k+2$$

قضیه : معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m) \mid b$. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

نتیجه : اگر $(a,m)=1$ چون برای هر b، همواره $1 \mid b$ پس معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره دارای جواب است.

مثال : معادلهٔ $6x \overset{9}{\equiv} 11$ دارای جواب نیست زیرا، $(6,9)=3$ و $3 \nmid 11$ و معادلهٔ $4x \overset{6}{\equiv} 18$ دارای جواب است. چرا؟ چون $2=(4,6)$ و $2 \mid 18$

این معادله را حل کنید :

$$4x \overset{6}{\equiv} 18 \Rightarrow 2\times 2x \overset{6}{\equiv} 2\times 9 \,,\, (2,6)=2$$

$$\overset{\text{ویژگی ۶}}{\Rightarrow} 2x \overset{\frac{6}{2}}{\equiv} 9$$

$$\Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 9$$

$$\Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 9+3=12$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x \overset{3}{\equiv} \cancel{2}\times 6 \Rightarrow x=3k+6$$

حل معادلات سیّاله و کاربردهای آن

فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنهٔ ۴ کیلویی و یک وزنهٔ ۳ کیلویی است.

$۴\times ۴ + ۱\times ۳ = ۱۹$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$۱\times ۴ + ۳\times ۵ = ۱۹$

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادلهٔ $۴\times x + ۳\times y = ۱۹$ هستید.

(x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به‌کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به‌کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون x و $y \in W$ بیابیم که $۴\times x + ۲\times y = ۱۹$ چون مجموع دو عدد زوج همواره زوج است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تعریف : هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و a و b و $c\in\mathbb{Z}$ در این صورت معادلهٔ مذکور $(ax+by=c)$ را یک معادلهٔ سیّاله درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادلهٔ سیّاله به معادلهٔ هم‌نهشتی

معادلهٔ سیّالهٔ $ax+by=c$ دارای دو مجهول است و به دوصورت می‌تواند به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود :

$$ax+by=c \Rightarrow ax-c=(-b)y \Rightarrow -b\mid ax-c \Rightarrow b\mid ax-c$$

$$\Rightarrow ax \overset{b}{\equiv} c \ (b>۰) \text{ و } ax \overset{-b}{\equiv} c \ (b<۰) \text{ یا } ax \overset{|b|}{\equiv} c$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نوشت : $by \overset{-a}{\equiv} c$ و $by \overset{a}{\equiv} c$

تذکر: برای سهولت در حل معادله ی سیاله ، بهتر است از بین دو عدد $|a|$ و $|b|$ ، هر کدام کوچکتر است به عنوان پیمانه انتخاب شود .

به عنوان نمونه در حل معادله سیاله $۲x+۳y=۷$، می توان به دو صورت معادله هم نهشتی نوشت : $۲x \overset{۳}{\equiv} ۷$ یا $۳y \overset{۲}{\equiv} ۷$ ولی بهتر است در حالتی که پیمانه کوچکتر است ، یعنی $۳y \overset{۲}{\equiv} ۷$ نوشته شود.

تذکر : با توجه به قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a,b)\mid c$

کار در کلاس

۱ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ $۴x+۵y=۹$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادلهٔ سیاله را بیابید.

$$۴x+۵y=۹ \Rightarrow ۴x\overset{۵}{\equiv}۹$$

$$\Rightarrow ۴x\overset{۵}{\equiv}۹-۵ \Rightarrow ۴x\overset{۵}{\equiv}۴$$

$$\Rightarrow x\overset{۵}{\equiv}۱ \Rightarrow \underline{x=۵k+۱}$$

$$\Rightarrow ۴(۵k+۱)+۵y=۹$$

$$\Rightarrow ۲۰k+۴+۵y=۹$$

$$\Rightarrow ۲۰k+۵y=۵$$

$$\Rightarrow ۴k+y=۱ \Rightarrow \underline{y=-۴k+۱}$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.

کافی است جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x+۳y=۱۹$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k\in\mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم:

$$۴x+۳y=۱۹ \Rightarrow ۴x\overset{۳}{\equiv}۱۹$$

$$\Rightarrow ۴x\overset{۳}{\equiv}۱ \Rightarrow ۴x\overset{۳}{\equiv}۱+۳$$

$$\Rightarrow \cancel{۴}x\overset{۳}{\equiv}\cancel{۴}\times۱ \Rightarrow \underline{x=۳k+۱}$$

$$\Rightarrow ۴(۳k+۱)+۳y=۱۹$$

$$\Rightarrow ۱۲k+۴+۳y=۱۹$$

$$\Rightarrow ۱۲k+۳y=۱۵ \Rightarrow ۴k+y=۵$$

$$\Rightarrow \underline{y=-۴k+۵}$$

$$k=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۵ \end{cases} \text{ و } k=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ y=۱ \end{cases}$$

به‌ازای $k=۲$ و بیشتر از آن $y<۰$ و به‌ازای $k=-۱$ و کمتر از آن $x<۰$ که قابل قبول نمی‌باشند و لذا به دوصورت فوق می‌توان این کیسهٔ ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل: اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد جواب‌های نامنفی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۱۸۰۰۰$

$$2000x+5000y=18000$$

$$\Rightarrow 2x+5y=18$$

$$\Rightarrow 2x\overset{5}{\equiv}18 \text{ و } 18\overset{5}{\equiv}8$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x\overset{5}{\equiv}\cancel{2}\times 4$$

$$\Rightarrow x\overset{5}{\equiv}4 \Rightarrow \underline{x=5k+4}$$

$$\Rightarrow 2(5k+4)+5y=18$$

$$\Rightarrow 10k+8+5y=18$$

$$\Rightarrow 10k+5y=10 \Rightarrow \underline{y=-2k+2}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases} \text{ و } k=1\Rightarrow\begin{cases}x=9\\y=0\end{cases}$$
(فقط به‌ازای ۱ و ۰ =k برای x و y جواب‌ها نامنفی هستند)

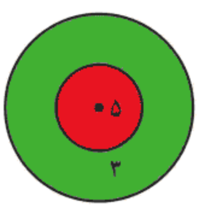
پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

مثال : در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

حل : اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سبزی و چلو خورش قیمهٔ سفارش داده شده را به‌ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت :

$$x+y=5 \Rightarrow x\overset{1}{\equiv}5 \Rightarrow \underline{x=k+5}$$
$$\Rightarrow k+\cancel{5}+y=\cancel{5} \Rightarrow \underline{y=-k}$$

چون y و x اعدادی نامنفی هستند پس باید $k\in\{0,-1,-2,-3,-4,-5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال : تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایرهٔ هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر و خارج دایرهٔ کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همهٔ تیرها به داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم :

$$5x+3y=42 \Rightarrow 5x\overset{3}{\equiv}42$$

$$\Rightarrow 5x\overset{3}{\equiv}42+3 \Rightarrow \cancel{5}x\overset{3}{\equiv}\cancel{5}\times 9$$

$$\Rightarrow \underline{x=3k+9}$$

$$5(3k+9)+3y=42$$

$$\Rightarrow 15k+45+3y=42$$

$\Rightarrow 15k+3y=-3 \Rightarrow \underline{y=-5k-1}$ $\quad x,y\in W \Rightarrow k\in\{-1,-2,-3\} \Rightarrow \begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}, \begin{cases}x=3\\y=9\end{cases}, \begin{cases}x=0\\y=14\end{cases}$

($x=6$ و $y=4$ یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایرهٔ کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایرهٔ بزرگ‌تر زده است).

پاسخ **تمرین**

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

$1398 \overset{9}{\equiv} 1+3+9+8 \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow$ به دستهٔ هم‌نهشتی $[3]_9=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=9k+3\}$ تعلق دارد

۲ اگر $k\in\mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

(به عبارت دیگر، $k\in[0]_3$ یا $k\in[1]_3$ یا $k\in[2]_3$)

$k \overset{3}{\equiv} 0$ یا $k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \overset{3}{\equiv} 2$

باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح همچون k بر عدد ۳، یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می‌باشد به عبارت دیگر

$3|k-0$ یا $3|k-1$ یا $3|k-2$ و طبق تعریف هم‌نهشتی $k\overset{3}{\equiv}0$ یا $k\overset{3}{\equiv}1$ یا $k\overset{3}{\equiv}2$.

۳ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow[\text{تعدی}]{n|m} n|a-b \Rightarrow a\overset{n}{\equiv}b$

۴ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|m} a\overset{d}{\equiv}b \\ b\overset{n}{\equiv}c \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|n} b\overset{d}{\equiv}c \end{array}\right\} \Rightarrow a\overset{d}{\equiv}c$$

۵ ثابت کنید : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

روش اول: گیریم باقیماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر m برابر r باشد، در نتیجه: $a\overset{m}{\equiv}r \wedge b\overset{m}{\equiv}r \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$

روش دوم: $\left.\begin{array}{l}a=mq+r\\b=mq'+r\end{array}\right\} \Rightarrow a-b=m(q-q') \Rightarrow m|a-b \xrightarrow{\text{تعریف هم‌نهشتی}} a\overset{m}{\equiv}b$

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

عکس تمرین ۵: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ آنگاه باقیماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر m، مساوی است.

اثبات: گیریم باقیماندهٔ تقسیم a بر m، برابر r_1 و باقیماندهٔ تقسیم b بر m، برابر r_2 باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l}a=mq+r_1\\b=mq'+r_2\end{array}\right\} \Rightarrow a-b=m(q-q')+(r_1-r_2) \quad ①$$

از طرفی: $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a-b=mq'' \quad ②$

$\xrightarrow{①,②} mq''=m(q-q')+(r_1-r_2)$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow r_1-r_2=m(q''-q-q') \Rightarrow m|r_1-r_2 \\ \text{از طرفی}: 0\leq r_1,r_2<m \rightarrow |r_1-r_2|<m\end{array}\right\} \Rightarrow r_1-r_2=0 \rightarrow r_1=r_2$$

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a+b)^n=\binom{n}{۰}\times a^n+\binom{n}{۱}\times a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}\times a^{n-۲}b^۲+\binom{n}{۳}\times a^{n-۳}b^۳+\cdots+\binom{n}{n}\times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$.

$$\left.\begin{aligned}
&\binom{n}{۰}a^n=a^n\overset{ab}{\equiv}a^n\\
&\binom{n}{۱}a^{n-۱}b\overset{ab}{\equiv}۰\\
&\binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲\overset{ab}{\equiv}۰\\
&\binom{n}{۳}a^{n-۳}b^۳\overset{ab}{\equiv}۰\\
&\vdots\\
&\binom{n}{n-۱}ab^{n-۱}\overset{ab}{\equiv}۰\\
&\binom{n}{n}b^n=b^n\overset{ab}{\equiv}b^n
\end{aligned}\right\}\xrightarrow{+}(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

طبق تمرین قبل (تمرین ۷) می‌توان نوشت:

$$(۲۳)^{۵۱}=(۱۱+۱۲)^{۵۱}\overset{۱۱\times۱۲}{\equiv}۱۱^{۵۱}+۱۲^{۵۱}$$

$$\xrightarrow{-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}}۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}\overset{۱۳۲}{\equiv}۰\longrightarrow$$ عدد $۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}$ بر ۱۳۲ بخش‌پذیر است

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(۲^{۱۱}+۷)\times۹$ را بر ۲۳ بیابید.

$$۲^۵\overset{۲۳}{\equiv}۹\xrightarrow{\text{توان ۲}}۲^{۱۰}\overset{۲۳}{\equiv}۸۱\xrightarrow{۸۱\overset{۲۳}{\equiv}۱۲}۲^{۱۰}\overset{۲۳}{\equiv}۱۲\xrightarrow{\times۲}۲^{۱۱}\overset{۲۳}{\equiv}۲۴$$

$$\xrightarrow{۲۴\overset{۲۳}{\equiv}۱}۲^{۱۱}\overset{۲۳}{\equiv}۱\xrightarrow{+۷}۲^{۱۱}+۷\overset{۲۳}{\equiv}۸\xrightarrow{\times۹}(۲^{۱۱}+۱)\times۹\overset{۲۳}{\equiv}۷۲$$

$$\xrightarrow{۷۲\overset{۲۳}{\equiv}۳}A\overset{۲۳}{\equiv}۳\longrightarrow r=۳$$

۱۰ اگر دو عدد $(۳a-۵)$ و $(۴a-۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۹a+۶)$ را به‌دست آورید.

طبق تمرین ۵، دو عدد $۳a-۵$ و $۴a-۷$ به پیمانهٔ ۱۰، با یکدیگر هم‌نهشت اند:

$$۴a-۷\overset{۱۰}{\equiv}۳a-۵\Rightarrow۴a-۳a\overset{۱۰}{\equiv}۷-۵\Rightarrow a\overset{۱۰}{\equiv}۲$$

$$\xrightarrow{\times۹}۹a\overset{۱۰}{\equiv}۱۸\xrightarrow{+۶}۹a+۶\overset{۱۰}{\equiv}۲۴\xrightarrow{۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴}۹a+۶\overset{۱۰}{\equiv}۴\Rightarrow$$ رقم یکان ۴ است

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

$$\left.\begin{array}{l} 1! \overset{10}{\equiv} 1 \\ 2! \overset{10}{\equiv} 2 \\ 3! \overset{10}{\equiv} 6 \\ 4! = 24 \overset{10}{\equiv} 4 \\ 5! = 120 \overset{10}{\equiv} 0 \\ 6! \overset{10}{\equiv} 0 \\ \vdots \\ 500! \overset{10}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} A \overset{10}{\equiv} 1+2+6+4+0+\dots+0 = 13 \xrightarrow{13 \overset{10}{\equiv} 3} A \overset{10}{\equiv} 3$$

رقم یکان عدد A، ۳ است.

۱۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $7x + 5y = 11$ را به‌دست آورید.

$$\Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 + 2\times 5 = 21$$

$$\xrightarrow{\div 7} x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x = 5k + 3 \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{7x+5y=11} 7(5k+3) + 5y = 11 \Rightarrow y = -7k - 2 \quad , k \in \mathbb{Z}$$

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی را x و تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی را y در نظر می‌گیریم بنابراین:

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29$$

$$5y \overset{2}{\equiv} 29 \Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 29 - 12\times 2 = 5 \overset{\div 5}{\Rightarrow} y \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow y = 2k+1$$

$$\xrightarrow{2x+5y=29} 2x + 5(2k+1) = 29 \Rightarrow x = -5k + 12$$

k	۰	۱	۲
$y = 2k+1$: تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی	۱	۳	۵
$x = -5k+12$: تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی	۱۲	۷	۲

⇐ به ۳ طریق می‌توان خُرد کرد

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به‌دست آورید.

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79$ می‌دانیم: $423 \overset{11}{\equiv} 5 \quad , \quad 79 \overset{11}{\equiv} 2$

$$\Rightarrow \text{معادله هم نهشتی: } 5x \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 2 + 3\times 11 = 35 \xrightarrow{\div 5} x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow x = 11k + 7 \quad , k \in \mathbb{Z}$$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20$

$$8x \overset{12}{\equiv} 20 - 12 = 8 \xrightarrow[(8,12)=4]{\div 8} x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 3k+1 \, , k \in \mathbb{Z}$$

ج) $51x \overset{6}{\equiv} 11$

$(51, 6) = 3 \quad , \quad 3 \nmid 11 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد