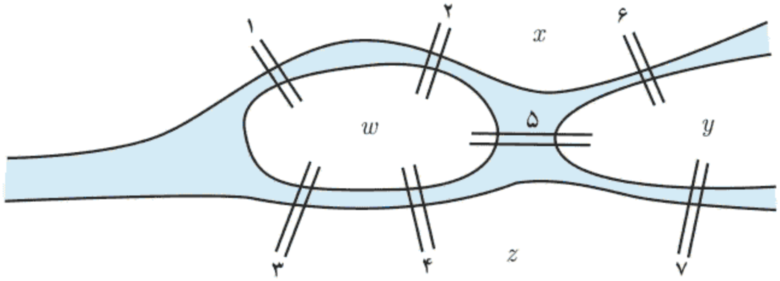
درس ۱ معرفی گراف

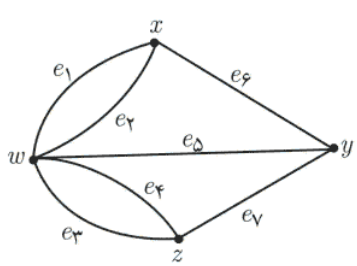
در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

رودخانهٔ این شهر که از میان شهر عبور می‌کرد مانند آنچه در شکل زیر می‌بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می‌کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها، به نقطهٔ شروع حرکت بازگشت؟



شکل ۱

لئونارد اویلر[1] (۱۷۸۳ ــ ۱۷۰۷)، ریاضی‌دان برجستهٔ سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه به آن «گراف» می‌گوییم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان‌پذیر نیست.



شکل ۲

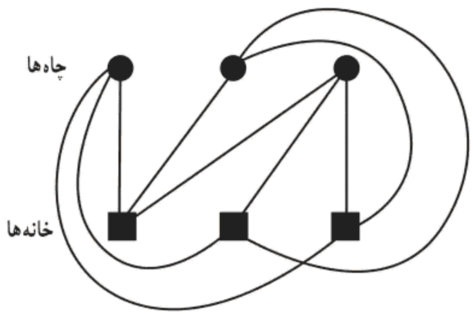
اگر چهار ناحیهٔ x و y و z و w را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه‌ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به‌دست می‌آید که گرافِ حاصل از مدل‌سازی مسئلهٔ مذکور است.
مدل‌سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته‌بندی منظم و تفکر منطقی دربارهٔ آنها را آسان‌تر می‌نماید.

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئلهٔ اویلر می‌دانند، اما بی‌تردید

۱ــ Leonhard Euler

متفکران و ریاضی‌دانان دیگری پیش از آن تاریخ نیز برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره گرفته‌اند. به‌طور مثال در حدود ۱۰۰ سال پیش از آن شیخ بهایی، ریاضی‌دان ایرانی[1] (۱۰۰۰ـ۹۲۵ خورشیدی) مسئله‌ای به این صورت طرح کرد:

سه خانه و سه چاه آب، مانند شکل مقابل مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟



شکل ۳

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را ۶ نقطه مشخص کنیم و کانال‌ها را با خط‌ها یا منحنی‌ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعهٔ مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعهٔ اوّل به تک‌تک نقاط مجموعهٔ دوم وصل شوند. شکل حاصل از این کار یک گراف است و می‌توان نشان داد که این کار نشدنی است و لااقل دو تا از خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.

حال به مثالی از تحلیل یک وضعیت به کمک گراف می‌پردازیم.

مثال: ۵ تیم فوتبال a، b، c، d و e در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دوبه‌دو با هم بازی می‌کنند و برخی از این بازی‌ها انجام شده است و اطلاعات زیر را داریم:

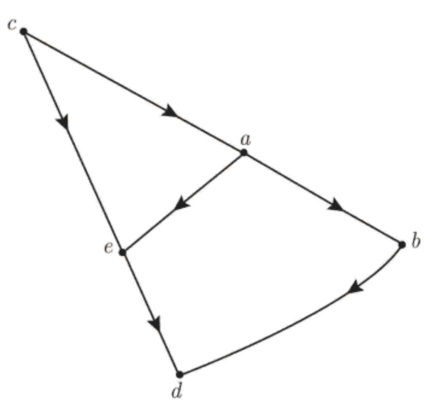
تیم a تیم‌های b و e را برده و به c باخته است.

تیم b به a باخته و از d برده است.

تیم c از تیم‌های a و e برده است.

تیم d به تیم‌های b و e باخته است.

تیم e به a و c باخته و از تیم d برده است.



شکل ۴

برای نمایش تمام اطلاعات بالا به‌صورت خلاصه، از نموداری به شکل ۴ استفاده می‌کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می‌گذاریم و هر دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند؛ و جهت خط یا منحنی‌ای که دو نقطه را به هم وصل می‌کند باید از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

حال با یک نگاه به نمودار رسم شده، علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به سادگی به سؤال‌های زیر نیز می‌توان جواب داد.

ـ مشخص کنید هر تیم با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

d,a ، e,b ، c,b ، c,d بازی نکرده اند .

ـ اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟ c,a

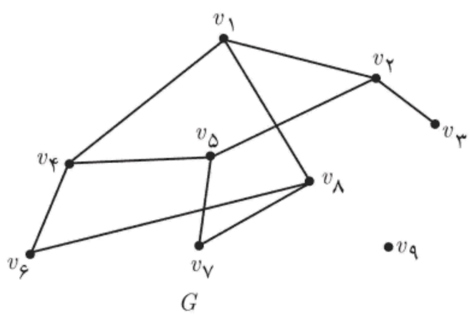
---

[1] ـ دکتر مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، ریاضی‌دان مشهور ایرانی، یکی از پیشگامانِ نظریه گراف در ایران است. بسیاری از پژوهش‌گران در این زمینه او را پدر علم گراف در ایران می‌دانند.

مسئله : سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گرافِ مثال قبل بتوان به آن جواب داد.

سوال : کدام تیم فقط بُرد و کدام تیم فقط باخت داشته است ؟

پاسخ : تیم c فقط بُرد و تیم d فقط باخت داشته اند.



شکل ۵

همان‌طور که دیدیم یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها، که به هر یک از این نقاط **رأس** و به هر یک از پاره‌خط‌ها **یال** می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً پاره‌خط راست باشند و می‌توانند به‌صورت منحنی نیز باشند و در هر سرِ یال باید رأسی قرار داشته باشد. همان‌طور که دیدیم یک گراف را می‌توان با رسم نمودارِ آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوهٔ نمایش یک گراف را بررسی می‌کنیم.

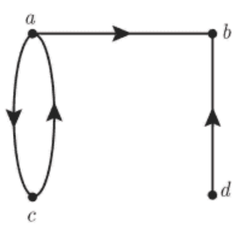
گراف G را با ۹ رأس و ۱۰ یال، مانند شکل ۵، در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم.

با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس و یال‌هاست می‌توان به جای نمایش آن با شکل بالا، با نمادهای ریاضی مجموعهٔ یال‌ها و رئوس آن را به‌صورت زیر نمایش داد.

مجموعهٔ رأس‌های گراف G [1] $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_8, v_9\}$

مجموعهٔ یال‌های گراف G [2] $E(G)=\{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_8, v_2v_3, v_2v_5, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_7, v_6v_8, v_7v_8\}$

به‌وضوح، با داشتن شکلِ گراف، شما می‌توانید مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ می‌توانید ابتدا به تعداد $n(V(G))$ (تعداد اعضای مجموعهٔ $V(G)$ که آن را با $|V(G)|$ نیز نمایش می‌دهیم) نقطه (رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به $E(G)$ رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.



شکل ۶

همان‌طور که در مثال تیم‌های فوتبال ملاحظه کردید گاهی‌اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم. به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار شکل ۶ را این‌گونه نمایش می‌دهیم. $V=\{a, b, c, d\}$ $\quad E\{(a,b),(a,c),(c,a)(d,b)\}$

کار در کلاس

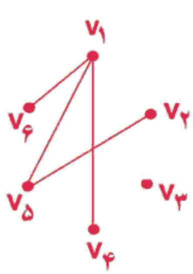
ــ دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

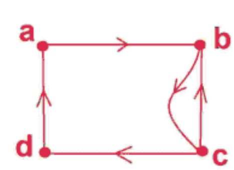
الف) $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$

$E(G)=\{v_1v_4, v_2v_5, v_6v_1, v_5v_1\}$

ب) $V(G)=\{a, b, c, d\}$

$E(G)=\{(a,b), (b,c), (c,b), (c,d), (d,a)\}$

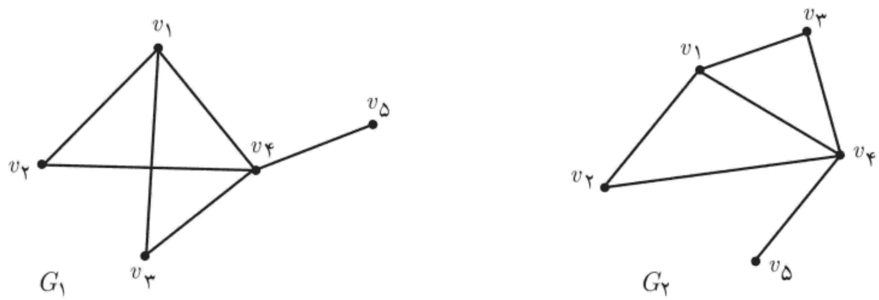




۱ــ Vertex

۲ــ Edge

توجه : برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی مدنظر نیست. آنچه مهم است این است که باید مشخص باشد که گراف مورد نظر گراف چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رئوس متصل است. به طور مثال با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.



شکل ۷

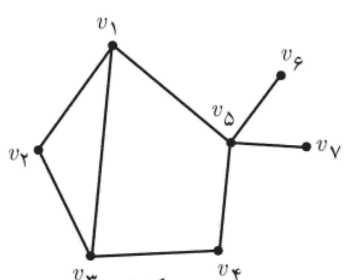
$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$

$V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G_2) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_3v_4, v_2v_4, v_4v_5\}$

■ **مرتبه و اندازهٔ یک گراف** : تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ آن گراف می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای $p(G)$ از p و به جای $q(G)$ از q استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال گراف‌های نمایش داده شده در شکل ۷ از مرتبهٔ ۵ و اندازهٔ ۶ هستند. بنابراین $p = ۵$ و $q = ۶$.



شکل ۸

■ **درجهٔ یک رأس** : درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $deg_G(v)$ یا به‌طور ساده‌تر با $deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می‌نامیم. به‌طور مثال در شکل مقابل داریم :

$deg(v_1) = ۳ \quad , \quad deg(v_5) = ۴$


شکل ۹

■ **گراف K ـ منتظم** : گرافی را که درجهٔ تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k ـ منتظم می‌نامیم. مثلاً گراف شکل ۹ یک گراف ۶ رأسیِ ۳ ـ منتظم است.

■ **رأس تنها** : به رأسی که درجهٔ آن صفر باشد؛ یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (یا ایزوله) می‌گوییم.

■ گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، **گراف تهی** می‌نامیم. بنابراین منظور از گراف تهیِ n رأسی، گرافی شامل n رأسِ تنها و بدون یال است.

کار در کلاس

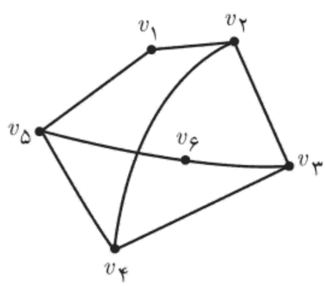
درجهٔ سایر رئوسِ گرافِ شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج‌اند.

رئوس درجه فرد $\Leftarrow$ $d(v_1)=3$, $d(v_3)=3$, $d(v_6)=1$, $d(v_7)=1$

رئوس درجه زوج $\Leftarrow$ $d(v_2)=2$, $d(v_4)=2$, $d(v_5)=4$


شکل ۱۰

بین دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد. همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خودِ آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال **طوقه**[1] گفته می‌شود. این دو مورد در شکل ۱۰ نمایش داده شده‌اند. گرافی را که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را **گراف ساده** می‌گوییم. دیدیم که گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب فقط گراف‌های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.



شکل ۱۱

دو رأس مجاور (همسایه): دو رأس u و v را دو رأسِ همسایه یا مجاور گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی $uv\in E(G)$. به طور مثال در گراف شکل ۱۱، رأس v_1 با رئوس v_2 و v_5 همسایه است و رأس v_2 با رئوس v_1 و v_3 و v_4 همسایه است.

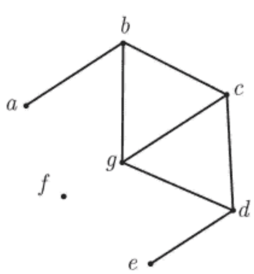
توجه: در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس: فرض کنیم $v\in V(G)$، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردنِ خودِ رأسِ v به $N_G(v)$ «همسایگی بستهٔ رأس v» را به‌دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v)=\{u\in V(G):\ uv\in E(G)\}$$

$$N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$$

به‌طور مثال در گراف شکل ۱۲ داریم:



شکل ۱۲

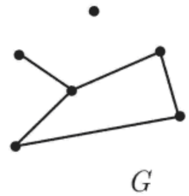
$N_G(a)=\{b\}$ $\qquad$ $N_G[a]=\{a,b\}$

$N_G(c)=\{b,d,g\}$ $\qquad$ $N_G[c]=\{b,c,d,g\}$

$N_G(f)=\varnothing$ $\qquad$ $N_G[f]=\{f\}$

دو یال مجاور: دو یال را مجاور گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به طور مثال در شکل ۱۲، یال‌های bc و cd مجاوراند.

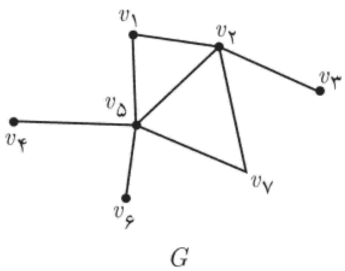
۱ـ Loop



شکل ۱۳

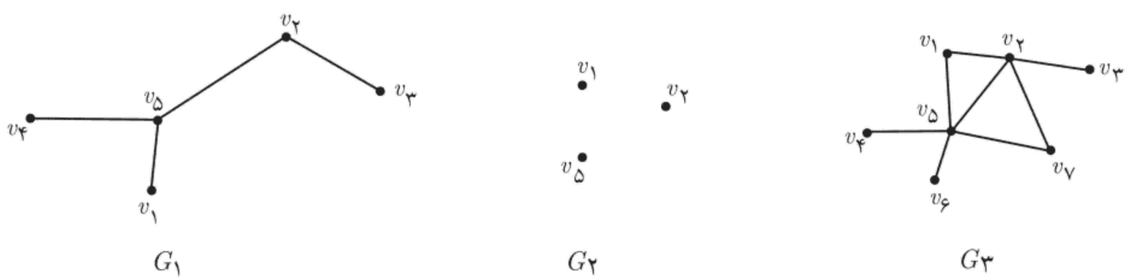
■ **بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف :** بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترینِ آنها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۳ داریم :

$$\Delta(G)=۳ \qquad , \qquad \delta(G)=۰$$



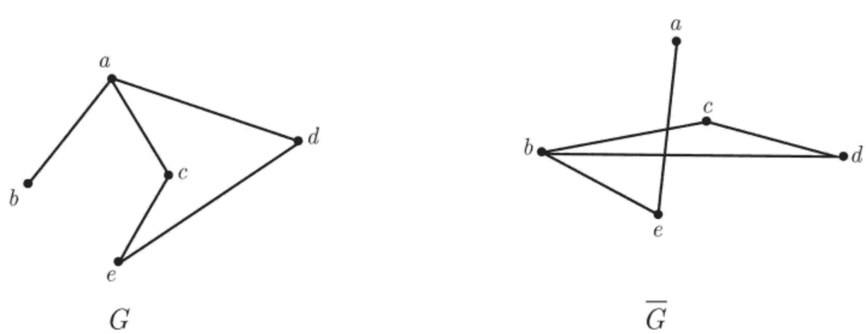
شکل ۱۴

■ **زیرگراف :** یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف G، و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های G باشد. به طور مثال گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ و $G_۳$ که در شکل ۱۵ آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف G در شکل ۱۴ هستند.



شکل ۱۵

■ **مکمل یک گراف :** مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد. در شکل ۱۶ یک گراف و مکملش نمایش داده شده است.



شکل ۱۶

مسئله ۱ : اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأسِ آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\overline{G}}(v)$ به ترتیب درجهٔ رأس v در گراف‌های G و $\overline{G}$ باشند، مقدار $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)$ را به‌دست آورید.

این مجموع برابر است با تعداد یال هایی که امکان رسم آنها از یک راس در گراف ساده ، وجود دارد . از طرفی در یک گراف ساده ی n راسی حداکثر $n-1$ یال از یک راس آن می گذرد بنابراین : $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=n-1$

مسئله ۲ : یک گراف n رأسی حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

برابر است با تعداد پاره خطهایی که با وجود n نقطه غیر واقع بر خط راست می توان رسم کرد یعنی : $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

مسئله ۳ : اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ را به‌دست آورید.

این مجموع برابر است با حداکثر تعداد یال های ممکن در یک گراف ساده n راسی ، که بنا به مسئله قبل $\frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود .

■ **گراف کامل :** گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوسِ دیگر، مجاور باشد گراف کامل می‌نامیم. گراف کاملِ n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. می‌توان گفت K_n یک گراف n رأسی و $n-1$–منتظم است.

مسئله ۱ : یک گراف کامل p رأسی چند یال دارد؟ بنا به مسئله ۲ در بالای صفحه ، تعداد یال ها برابر است با : $\frac{p(p-1)}{2}$

مسئله ۲ : اگر G یک گراف p رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌های گراف‌های G ، $\overline{G}$ و K_p وجود دارد؟ $q(G)+q(\overline{G})=q(K_p)$

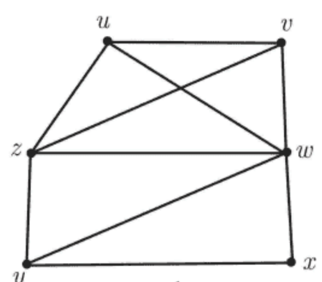
مسئله ۳ : مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟ گراف تهی

■ **مسیر :** اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک u ــ v مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می‌کنیم که دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأسِ v، یک مسیر است با طول صفر از رأس v به خودش.

مثال

uwv یک v ــ u مسیر به طول ۲ است.

$uzywv$ یک v ــ u مسیر به طول ۴ است.



شکل ۱۷

■ گرافی را که تنها از یک **مسیرِ n رأسی** تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال P_5 در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.


شکل ۱۸

■ **دور :** دنبالهٔ $v_1\ v_2\ v_3\ \dots\ v_n\ v_1$ $(n\geq 3)$ از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم. به‌طور مثال در گراف شکل ۱۷ $uvwu$ ، $ywuzy$ ، $xwvuzyx$ دورهایی به ترتیب با طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.

■ گرافی را که تنها از یک **دورِ n رأسی** تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال C_5 در شکل ۱۹ نمایش داده شده است.


شکل ۱۹

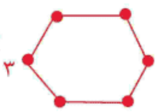
مسئله : در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ بیابید. $uvwyzu$

■ **همبندی و ناهمبندی یک گراف :** گراف G را **همبند** می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأسِ آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را **ناهمبند** می‌نامیم. به‌طور مثال گراف H در شکل ۲۰ همبند و گراف G ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس v و w هیچ مسیری وجود ندارد.

شکل ۲۰

فعالیت

۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.

$G_{۱}$  $G_{۲}$  $G_{۳}$ 

۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.

مجموع درجات رئوس گراف $G_{۱}$ = ۲+۲+۲ = ۶   مجموع درجات رئوس گراف $G_{۲}$ = ۳+۱+۱+۱+۰ = ۶   مجموع درجات رئوس گراف $G_{۳}$ = ۲+۲+۲+۲+۲+۲ = ۱۲

۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.

تعداد یالهای گراف $G_{۱}$ = ۳ و تعداد یالهای گراف $G_{۲}$ = ۳ و تعداد یالهای گراف $G_{۳}$ = ۶

۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.

مجموع درجات رئوس گراف = ۲× (تعداد یال های گراف)

۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

فعالیت

۱ یک گراف دلخواه مانند G با n رأسِ $v_{۱}$, $v_{۲}$, . . . و v_n و m یال $e_{۱}$, $e_{۲}$, . . . و e_m در نظر بگیرید.

۲ تمام یال‌های گراف G را حذف کنید.

۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ صفر تعداد یال‌های گراف حاصل چند است؟ صفر

و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟ ظاهراً با هم برابرند!!!

۴ یال $e_{۱}$ را در جای خود (بین همان دو رأسی که $e_{۱}$ قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید.

مجموع درجات برابر ۲ و تعداد یالها ۱ می باشد .

۵ تمام یال‌های $e_{۲}$, $e_{۳}$, . . . و e_m را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیهٔ G برسید و پس از اضافه‌کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید.

مجموع درجات ۴ و تعداد یالها ۲ است .

مجموع درجات ۶ و تعداد یالها ۳ است.

⋮

مجموع درجات $۲m$ و تعداد یالها m است .

۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟

خیر ، زیرا با اضافه کردن هر یال ، ۲ واحد به مجموع درجات افزوده می شود و با توجه به این که مجموع درجات در ابتدا صفر بوده ، غیر ممکن است که عددی فرد شود .

۷ برای تساوی $\sum_{i=۱}^{n}\deg(v_i)=\deg(v_{۱})+\deg(v_{۲})+\cdots+\deg(v_n)=۲m$ استدلال خود را بیان نمایید.

در شمارش درجه ها ، هر یال دارای دو راس است ، بنابراین در مجموع آنها هر یال دو بار حساب شده است ، پس مجموع درجات دو برابر تعداد یالهاست .

با توجه به آنچه در این فعالیت به‌دست آوردیم، می‌توان قضیهٔ زیر را بیان نمود.

قضیه : اگر G یک گراف با مرتبهٔ p و اندازهٔ q و $V=\{v_{۱}, v_{۲}, \ldots, v_p\}$ مجموعهٔ رئوس آن باشند، آنگاه : $\sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q$

نتیجه : تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات : فرض کنیم G یک گراف و A مجموعهٔ همهٔ رئوسِ فردِ گراف G و B مجموعهٔ همهٔ رئوس زوجِ گراف G باشد. در این صورت داریم $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \sum_{v\in A} \deg(v) + \sum_{v\in B} \deg(v)$.

از طرفی $\sum_{v\in V(G)} \deg(v)$ و $\sum_{v\in B} \deg(v)$ زوج‌اند. (چرا؟) طبق قضیه مجموع درجات رئوس ، زوج می باشد پس $\sum_{v\in V(G)} \deg(v)$ زوج است.

از طرفی درجه هر راس B عددی زوج است و مجموع چند عدد زوج ، عددی زوج است لذا $\sum_{v\in B} \deg(v)$ زوج می باشد .

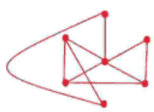
بنابراین $\sum_{v\in A} \deg(v)$ نیز عددی زوج است و این نتیجه می‌دهد که $n(A)$ عددی زوج است. (چرا؟)

درجه هر راس A فرد می باشد ، لذا باید تعداد آنها زوج باشد تا مجموع درجات عددی زوج شود .

فعالیت

یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطهٔ دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند و یا هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون :

الف) گرافِ ۷ رأسی G را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.



ب) با استفاده از قضیهٔ قبل نشان دهید که امکان ندارد درجهٔ تمام رئوسِ گرافِ حاصل برابر با ۳ باشد.

اگر درجه تمام رئوس گراف حاصل ۳ باشد آنگاه مجموع درجات رئوس $۲۱ = ۷ \times ۳$ خواهد شد که عددی فرد است و با قضیه تناقض دارد زیرا باید مجموع درجات رئوس عددی زوج باشد .

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

اگر تمام نفرات جمعِ فرد نفری ، دارای فرد تا دوست باشند ، یعنی در یک گراف تعداد رئوس درجه فرد ، فردتا است که با نتیجه گرفته شده از قضیه (بالای صفحه) تناقض دارد . لذا چنین موردی امکان پذیر نیست .

فعالیت

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq ۴$. می‌خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

۱ رأس دلخواه $v_۱$ را در G در نظر می‌گیریم. حتماً $v_۱$ به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس $v_۲$ باشد.
زیرا اگر به راس دیگری متصل نباشد درجه آن صفر خواهد بود ، در حالی که طبق فرض مسئله کمترین درجه ۴ در نظر گرفته شده است .

۲ حتماً $v_۲$ به رأسی به جز رأس $v_۱$ متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس $v_۳$ باشد.
زیرا اگر چنین نباشد ، درجه آن ۱ خواهدبود که با فرض مسئه (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد .

۳ حتماً $v_۳$ به رأسی از مجموعهٔ $V(G) - \{v_۱ , v_۲\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس $v_۴$ باشد.
زیرا در غیر این صورت ، درجه آن‌حداکثر ۲ خواهد بود و با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است)تناقض دارد .

۴ حتماً $v_۴$ به رأسی از مجموعهٔ $V(G) - \{v_۱ , v_۲ , v_۳\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس $v_۵$ باشد.
زیرا اگر چنین نباشد ، درجه آن حداکثر ۳ شده که با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد .

۵ مسیر $v_۱ v_۲ v_۳ v_۴ v_۵$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

کار در کلاس

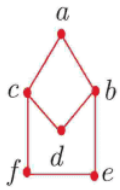
در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف G را به‌دست آورید.

الف) G یک گراف n رأسی K ـ منتظم است. طبق قضیه : $۲q = n \times k \Rightarrow q = \frac{۱}{۲} nk$

ب) G یک گراف n رأسی کامل است. $(G = K_n)$

درجه هر راس $n - ۱$ خواهد بود ، درنتیجه گراف $(n-۱)$-منتظم است. لذا طبق قسمت قبل : $q = \frac{۱}{۲} n(n-۱)$

۱ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{ab,ac,cd,ef,db,cf,be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.



الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. $p=۶$, $q=۷$

ب) درجهٔ رأس‌های G را مشخص نمایید.

$\deg(b)=\deg(c)=۳$ و $\deg(a)=\deg(d)=\deg(e)=\deg(f)=۲$

پ) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟ c,e

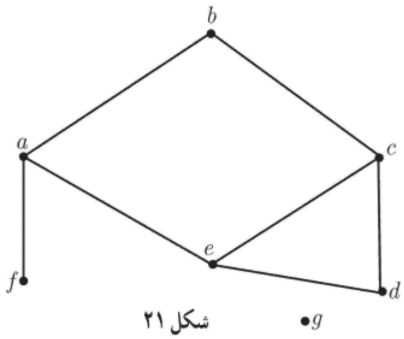
ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟ $۲+۳+۲+۲+۳+۲=۱۴$

ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(H)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (ت) در مورد گراف H پاسخ دهید.

الف) $p=۴$, $q=۶$ ب) $\deg(v_1)=\deg(v_2)=\deg(v_3)=\deg(v_4)=۳$

پ) راس f در این گراف تعریف نشده است. ت) $۴\times۳=۱۲$

۲ گراف G (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.



شکل ۲۱

الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

$V(G)=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ و $E(G)=\{ab,ae,af,bc,cd,ce,de\}$

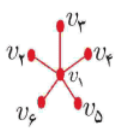
ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید. $\Delta(G)=۳ , \delta(G)=۰$

پ) مجموعهٔ همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

$N_G(f)=\{a\}$ و $N_G(g)=\varnothing$ و $N_G(e)=\{a,c,d\}$

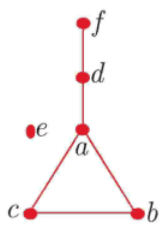
ت) اگر $N_G(x)=\{a, c\}$، آنگاه x کدام رأس است؟ x راسی هست که هم با a و هم با c همسایه باشد، با توجه به شکل $x=b$ است.

۳ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $۲\le i\le ۶$ تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.



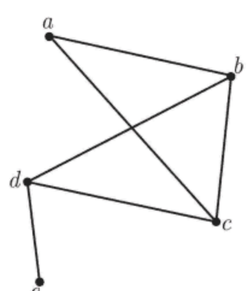
۴ در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:

$N_G(c)=\{a, b\}$	$N_G(b)=\{a, c\}$	$N_G(a)=\{b, c, d\}$
$N_G(f)=\{d\}$	$N_G(e)=\{\ \}$	$N_G(d)=\{a, f\}$



گراف G را رسم و اندازهٔ آن را مشخص کنید. $q=۵$

۵ گراف G (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\overline{G}$ را تعیین نمایید.



شکل ۲۲

تعداد یالهای گراف $\overline{G}$ = تعداد کل یال های ممکن درگراف ۵ راسی (K_5) − تعداد یالهای گراف G

$\Rightarrow$ تعداد یالهای گراف $\overline{G}$ $=\frac{۵\times۴}{۲}-۶=۴\xrightarrow{\times۲}$ $\boxed{\text{مجموع درجات گراف } \overline{G} = ۸}$

$$\begin{cases}\deg_G(a)=۲\Rightarrow \deg_{\overline{G}}(a)=۴-۲=۲\\ \deg_G(c)=۳\Rightarrow \deg_{\overline{G}}(c)=۴-۳=۱\end{cases}$$

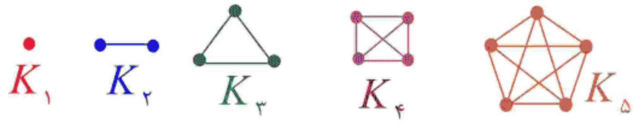
درجه هر راس در گراف کامل ۴ است

۶ گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

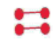
در گراف کامل p راسی تعداد یالها برابر است با $\frac{p(p-1)}{2}$ در نتیجه : $\frac{p(p-1)}{2}=36 \Rightarrow p(p-1)=72 \Rightarrow p=9$

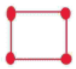
از طرفی گراف کامل K_9 یک گراف ۸ - منتظم است . بنابراین درجه تمام رئوس یکسان بوده و $\Delta=\delta=8$ است .

۷ گراف‌های کامل از مرتبهٔ ۱ تا ۵ را رسم کنید.



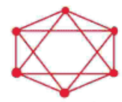
۸ در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r- منتظم از مرتبهٔ n رسم کنید.

الف) $n=4$ $r=1$ 

ب) $n=4$ $r=2$ 

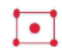
پ) $n=5$ $r=2$ 

ت) $n=5$ $r=3$ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات $3\times5=15$ عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد .

ث) $n=6$ $r=4$ 

ج) $n=7$ $r=3$ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات $3\times7=21$ عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد .

۹ برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که :

الف) یک رأس تنها داشته باشد. 

ب) دو رأس تنها داشته باشد. 

پ) سه رأس تنها داشته باشد. 

ت) چهار رأس تنها داشته باشد. امکان پذیر نیست ، زیرا اگر بخواهیم چهار راس تنها باشند ، راس پنجم نمی‌تواند به هیچکدام از آنها متصل شود پس راس پنجم نیز تنها خواهد ماند!

ث) پنج رأس تنها داشته باشد. 

۱۰ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

اگر هفت نفر را به عنوان ۷ راس یک گراف در نظر بگیریم و در صورتی که دو نفر با هم دست دهند ، بین دو راس منسوب به آنها یال رسم کنیم ، در نتیجه ۶ راس گراف درجه ۲ خواهد بود و اگر راس هفتم درجه ۵ باشد ، یعنی گراف دارای یک راس درجه فرد است که با نتیجه ی قضیه تناقض دارد زیرا باید تعداد رئوس درجه فرد ، زوج تا باشد . پس نفر هفتم نمی تواند با ۵ نفر دست داده باشد .

۱۱ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفرِ دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟ ۵ نفر را به عنوان ۵ راس یک گراف جهت دار در نظر می گیریم.
به طور مثال اگر نام علی در فهرست دوستان سامان وجود دارد ، یک یال جهت دار از علی به سمت سامان رسم می کنیم . و بر عکس اگر نام سامان در فهرست دوستان علی باشد یک یال جهت دار از سامان به علی رسم می کنیم . به همین ترتیب الی آخر پیش می رویم .

حداکثر تعداد یالها در گراف جهت دار ۵ راسی $p(p-1)=5\times4=20$ می باشد .

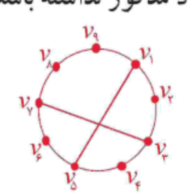
از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا وجود نداشتن آن یال) پس تعداد کل حالات برای آن 2^{20} می باشد .

ب) اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه‌ای دوطرفه داشته باشد؛ یعنی هر دونفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

این قسمت همچون قسمت الف بوده ، با این تفاوت که گراف جهت دار نیست ، پس حداکثر تعداد یالها $10=\frac{5\times4}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$ می باشد .

بنابراین تعداد کل حالات 2^{10} است .

۱۲ یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که : الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



دور به طول ۶: $v_1 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_1$

دور به طول ۵: $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_1$

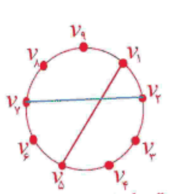
دور به طول ۹: $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_1$

دور به طول ۷: $v_1 v_5 v_4 v_3 v_7 v_8 v_9 v_1$

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ابتدا همچون قسمت الف گرافی با دوری به طول ۹ رسم می کنیم و از v_1 به v_5 یالی رسم کرده تا دورهایی به طول ۶ و۵ ساخته شود.

حال برای ساختن دورهایی به طولهای ۷و۸ باید یال دیگری رسم کنیم . به طور مثال راس v_2 را انتخاب می کنیم که فقط می توان آن را به راس v_7 رسم کرد زیرا در غیر این صورت دورهایی به طول ۳ یا ۴ ایجاد می شود که خواست مسئله نیست .



اگر مطابق شکل (یال آبی رنگ) v_2 را به v_7 وصل کنیم دور به طول ۸ ایجاد می شود($v_2 v_3 v_4 v_5 v_1 v_9 v_8 v_7 v_2$) ولی دور به طول ۷ ایجاد نمی شود !

همچنین در قسمت قبل مشاهده شد که اگر راس v_3 انتخاب شود ، دور به طول ۷ ایجاد شده ولی به طول ۸ ایجاد نمی شود !

به همین تریتب با انتخاب رئوس دیگرمتوجه می شویم‌که این کار با رسم دو قطر امکان پذیر نیست .

اما در صورتی که سه قطر رسم کنیم ، یکی برای ایجاد دورهایی به طول ۵و۶ و دیگری برای دور به طول ۷ و سومی برای ایجاد دور به طول ۸ ، باز هم قابل قبول نبوده زیرا دورهایی به طول ۳ یا ۴ نیز ساخته شده که خواسته مسئله نیست . بنابراین چنین گرافی وجود ندارد .

۱۳ فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است. درست است . اثبات :

راس دلخواه v_1 را در گراف G در نظر می گیریم ، حتماً v_1 به راس دیگری (مثل v_2) متصل است ، زیرا در غیر این صورت $\delta = 0$ خواهد شد.

همچنین v_2 به راسی به جز v_1 متصل می باشد (مثل v_3) زیرا در غیر این صورت $\delta = 1$ خواهد شد .

حتماً v_3 به راسی به غیر از v_1 و v_2 (مثل v_4)وصل است ، زیرا در غیر این صورت ، حداکثر مقدار δ ، دو خواهد بود.

این رَوَند ادامه دارد تا به راس جدید v_K برسیم که با استدلال مشابه قبل بایستی به راس جدیدی مانند v_{k+1} وصل باشد .

بنابراین مسیر $v_1v_2v_3\cdots v_{k+1}$ یک مسیر به طول k در گراف G است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+1$ است. نادرست است . مثال های نقض برای رَد آن مطرح می کنیم :

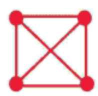
مثال نقض اول : در گراف یک راسی روبرو $K = \delta = 0$ مسیری به طول $1 = 1 + 0$ وجود ندارد .

مثال نقض دوم : در گراف دو راسی روبرو $K = \delta = 1$ مسیری به طول $2 = 1 + 1$ وجود ندارد .

توجه : هر گراف کامل می تواند یک مثال نقض برای آن محسوب شود .

۱۴ یک گراف ۴ رأسی غیرتهیِ K- منتظم بکشید که :

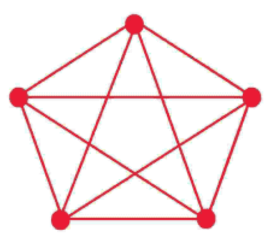
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۵ یک گراف ۵ رأسیِ غیرتهیِ K- منتظم بکشید که :

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.