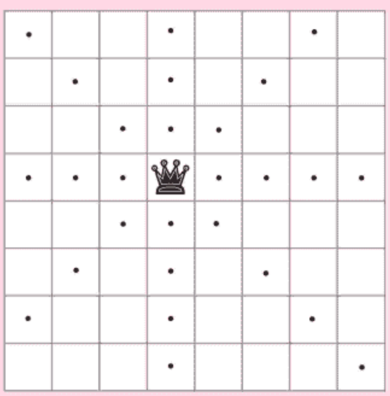
# درس ۲ مدل‌سازی با گراف

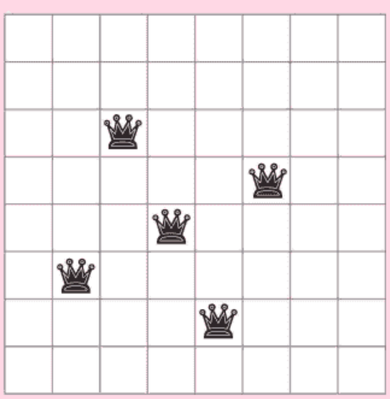
برخی از مسائل روزمرهٔ زندگی را می‌توان به کمک مدل‌سازی نخست به یک مسئلهٔ ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئلهٔ اصلی را نیز حل کرد. به‌طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل‌سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «**احاطه‌گری**» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

### تاریخچه

در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهرهٔ وزیری که می‌توانند با چینش مناسب تمام صفحهٔ شطرنج را بپوشانند» (یعنی هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.



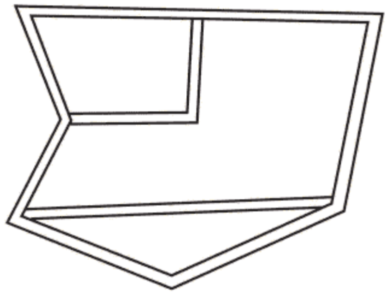
تفکر دربارهٔ پرسش‌هایی از این دست باعث به‌وجود آمدن مفهومی در شاخهٔ گراف در ریاضیات با نام **احاطه‌گری** شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئلهٔ بعد دقت کنید.





hamyar.in همیار

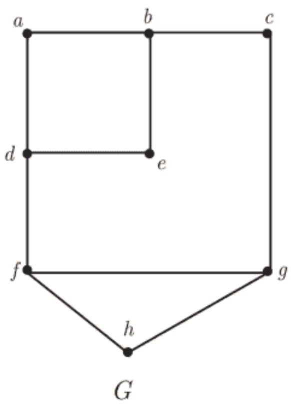
شکل مقابل نقشهٔ منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به‌گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد :



شکل ۱

**۱** برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به‌گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

**۲** به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.




شکل ۲

حال فرض کنید منطقهٔ مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم.

الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟ **تقاطع ها همان رئوس گراف و خیابان ها یال های گراف هستند.**

ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعهٔ **احاطه‌گر** برای گراف می‌نامیم. به‌طور مثال مجموعهٔ شامل همه رئوس گراف $G$، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟ $\{a, e, g, f\}$

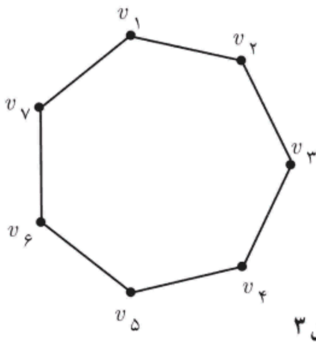
**تعریف :** زیر مجموعهٔ $D$ از مجموعهٔ رئوس گراف $G$ را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در $D$ باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در $D$ مجاور باشد.

معمولاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف $G$ را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف $G$ بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئلهٔ بالا صدق خواهد کرد.

**تعریف :** در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف $G$، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری گراف $G$** می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از گراف $G$، یک $\gamma$ــ مجموعه می‌گوییم.


hamyar.in
همیار



شکل ۳

**مثال :** برای گراف شکل ۳ که دور $C_7$ است، مجموعهٔ $\{v_1 , v_3 , v_5 , v_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر و مجموعه‌های $\{v_1 , v_4 , v_7\}$ و $\{v_1 , v_3 , v_5\}$ دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γـ‌مجموعه‌اند؛ و داریم $\gamma(G) = 3$.

**مثال :** فرض کنید $a$، $b$، $c$، $d$، $e$، $f$، $g$، $h$، $i$، $j$ و $k$ شهرهای یک استان باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشد.

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | ۰ | ۵۰ | ۸۰ | ۴۰ | ۶۰ | ۹۰ | ۵۰ | ۷۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۵۰ |
| $b$ | ۵۰ | ۰ | ۵۵ | ۳۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۶۰ | ۶۰ | ۹۰ | ۸۵ | ۸۰ |
| $c$ | ۸۰ | ۵۵ | ۰ | ۴۰ | ۶۰ | ۲۰ | ۵۰ | ۵۵ | ۱۰۰ | ۹۵ | ۹۰ |
| $d$ | ۴۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۰ | ۳۰ | ۵۵ | ۳۰ | ۳۰ | ۸۰ | ۷۵ | ۷۰ |
| $e$ | ۶۰ | ۶۰ | ۶۰ | ۳۰ | ۰ | ۵۰ | ۱۰ | ۵ | ۶۰ | ۵۵ | ۵۵ |
| $f$ | ۹۰ | ۷۰ | ۲۰ | ۵۵ | ۵۰ | ۰ | ۴۰ | ۴۵ | ۱۰۰ | ۹۰ | ۸۰ |
| $g$ | ۵۰ | ۶۰ | ۵۰ | ۳۰ | ۱۰ | ۴۰ | ۰ | ۵ | ۷۰ | ۶۵ | ۶۰ |
| $h$ | ۷۰ | ۶۰ | ۵۵ | ۳۰ | ۵ | ۴۵ | ۵ | ۰ | ۶۵ | ۶۰ | ۵۵ |
| $i$ | ۵۰ | ۹۰ | ۱۰۰ | ۸۰ | ۶۰ | ۱۰۰ | ۷۰ | ۶۵ | ۰ | ۵ | ۱۰ |
| $j$ | ۶۰ | ۸۵ | ۹۵ | ۷۵ | ۵۵ | ۹۰ | ۶۵ | ۶۰ | ۵ | ۰ | ۵ |
| $k$ | ۵۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۷۰ | ۵۵ | ۸۰ | ۶۰ | ۵۵ | ۱۰ | ۵ | ۰ |

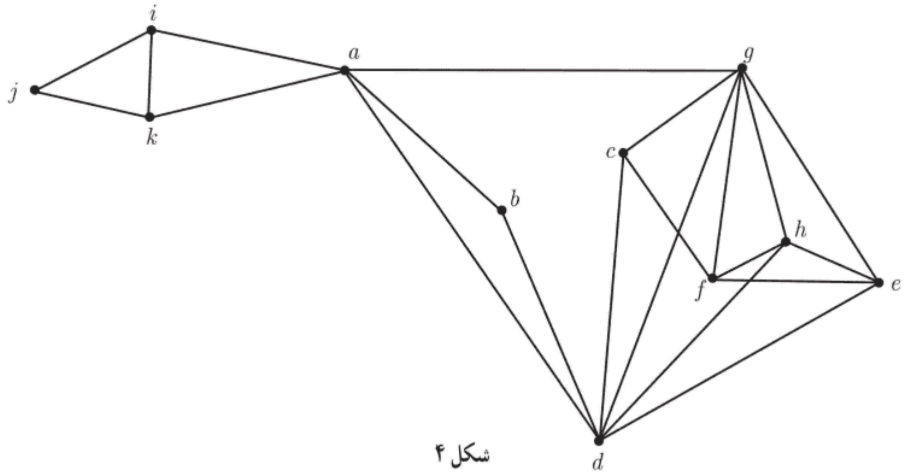
شایسته است در سطر اول نام شهرها با حروف کوچک نوشته شوند .
لذا این تغییر اعمال شده است.

می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به‌طوری که همهٔ شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه‌ها می‌خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

**حل :** برای مدل‌سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصلهٔ مستقیم آن دو شهر از ۵۰ کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می‌کند. (چرا؟)

**به دلیل وجود خاصیت احاطه گری،هر شهر از پوشش امواج رادیویی برخوردار می گردد . همچنین به جهت‌مینیمم بودن احاطه گری ، کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی و به دنبال آن کمترین میزان هزینه صورت خواهد گرفت.**

با توجه به آنچه گفته شد گرافِ زیر، گرافِ حاصل از مدل‌سازی برای این مسئله است.

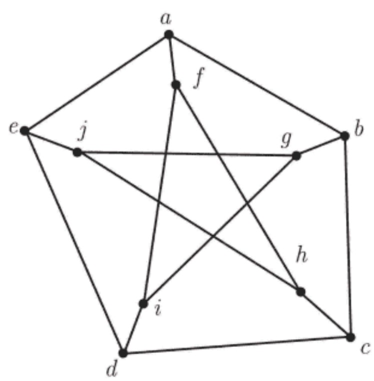


شکل ۴

حال کافی است یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه‌های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه‌گرِ مینیمال مستقر کنیم. یافتن یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

## کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک ازمجموعه‌های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه‌گر هست و کدام نیست؟



شکل ۵

الف) $A=\{a,b,c,d,e\}$ احاطه گر هست

ب) $B=\{f,g,h,i,j\}$ احاطه گر هست

پ) $C=\{a,b,j,h,g\}$ احاطه گر نیست

ت) $D=\{a,i,h\}$ احاطه گر هست

ث) $E=\{f,g,h,e,d\}$ احاطه گر هست

ج) $F=\{f,g,h,e\}$ احاطه گر هست

۲ از مجموعه‌های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه‌گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس‌هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعهٔ باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد؟ قسمت ث ، اگر از مجموعه ی $E=\{f,g,h,e,d\}$ راس $d$ را حذف کنیم ، مجموعه جدید همان مجموعه ی $F=\{f,g,h,e\}$ بوده که احاطه گر است .

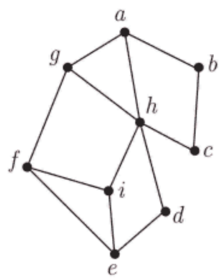
**تعریف**: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد احاطه‌گر **مینیمال** می‌نامیم.

۳ مجموعه‌ای احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

$\{c, j, f\}$

۴ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. $A=\{a,b,c,d,e\}$

۵ آیا می‌توان هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟(استدلال کنید) بله ، اگر $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ یک مجموعه احاطه گر باشد ، عضوی مانند $v_1$ را در نظر می گیریم ، اگر با حذف آن ، هنوز مجموعه احاطه گر باقی ماند ، آن را حذف می کنیم ، در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم .
با توجه به غیر مینیمال بودنِ مجموعه ، قطعاً حداقل یک عضو یافت می شود که با حذف آن ، هنوز مجموعه احاطه گر خواهد ماند .

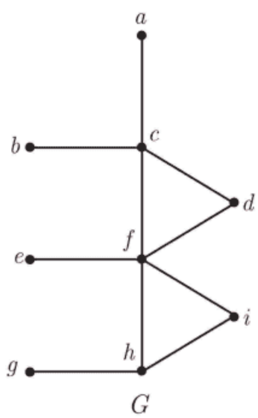


شکل ۶

**مثال :** در گراف شکل ۶ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.

**حل :** مجموعه $\{a,b,c,d,e,f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس $a$) این مجموعه باز هم احاطه‌گر خواهد بود، لذا احاطه‌گر مینیمال نیست. حال با حذف سه رأس $c$ ، $a$ و $e$ از آن، مجموعهٔ $\{b,d,f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه‌گراست اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نخواهد بود لذا احاطه‌گر مینیمال است.

## کار در کلاس



شکل ۷

در گراف شکل ۷ :

۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشد. $\{c,f,i,g\}$

۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشد. $\{c,f,g\}$

۳ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید. $\{c,e,h\}$

۴ آیا رأسی در گراف $G$ وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس $b$ ، $e$ و $g$ را احاطه کند؟ خیر

۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتاست؟ ($\gamma(G)$ چند است؟) $\gamma(G)=۳$

## معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح[1] یک عدد آشنا هستید و می‌دانید که اگر $x$ یک عدد صحیح باشد، $[x]$ برابر با خود $x$ است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از $x$ است.

$$[x]=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟ ۳ تاکسی

۱ــ گاهی‌اوقات به جزء صحیح یک عدد، کفِ آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها $[a]$ را با $\lfloor a \rfloor$ نمایش می‌دهند و به آن کفِ $a$ می‌گویند.


hamyar.in همیار

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ ۴ تاکسی

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ ۴ تاکسی

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به‌دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟ تعداد کارمندان را بر عدد ۴ تقسیم می کنیم ، اگر عدد صحیحی بدست آمد همان عدد تعداد تاکسی ها است .در غیر این صورت کوچکترین عدد صحیح بعد از آن ، نشان دهنده تعداد تاکسی ها می باشد .

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به‌کار برد.

در صورتی که $x$ عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیحِ بعد از $x$ از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقفِ $x$ می‌خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

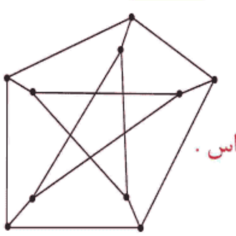
بنابراین :

⌊۳/۵⌋ = ۳      ⌊۳⌋ = ۳

⌈۳/۵⌉ = ۴      ⌈۳⌉ = ۳

■ سؤال : برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟ اعداد صحیح

## فعالیت



$G$

شکل ۸

۱ در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

۲ در گراف مقابل $\Delta$ چند است؟ $\Delta = ۳$

۳ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟ هر راس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می کند یعنی ۴ راس .
و این تعداد چه ارتباطی با $\Delta$ دارد؟ این تعداد همان $\Delta + ۱$ است.

۴ آیا ۲ رأس می‌توانند همهٔ رئوس گراف $G$ را احاطه کنند؟ خیر

۵ حداقل $\left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس لازم است. چرا؟ یک راس آن حداکثر۴ راس را احاطه می کند . حال اگر راس دیگری را چنان انتخاب کنیم که رئوس احاطه شده قبلی مجاور آن نباشند ، آنگاه این راس نیز ۴ راس دیگر را احاطه می کند . لذا از بین ۱۰ راس ۸ راس احاطه شده اند . که باید برای احاطه ی دو راس باقی مانده از راس جدیدی استفاده کنیم ، پس حداقل ۳ راس برای احاطه ی همه ی راس ها نیاز داریم . از طرفی $۳ = \left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ می باشد .

۶ $\gamma(G)$ چند است؟ $\gamma(G) = ۳$

۷ در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجهٔ $\Delta$ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟ $\Delta + ۱$

۸ تعداد کمتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ رأس نمی‌توانند تمام $n$ رأسِ یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

یک راس دخواه حداکثر $\Delta + ۱$ راس را احاطه می کند . حال برای تعیین حداقل تعداد رئوسی که تمام $n$ راس گراف را احاطه کنند ، باید حساب کرد برای جابجایی $n$ مسافر به چند تاکسی با ظرفیت حداکثر $\Delta + ۱$ نفر احتیاج داریم . برای این کار نسبت $\frac{n}{\Delta + ۱}$ را حساب می کنیم ، اگر عدد صحیح شد که جواب می باشد ، در غیر این صورت کوچکترین عدد صحیح بعدی آن جواب است تا اینکه تمام رئوس احاطه شده باشند . و این همان $\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ است.



hamyar.in همیار

بنابراین :

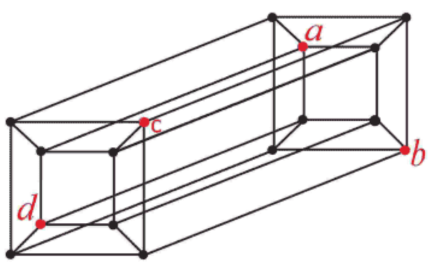
اگر $G$ یک گراف $n$ رأسی با ماکزیمم درجهٔ $\Delta$ باشد و $D$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le |D|$

و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود

در گراف $G$ عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$ ؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

## کار در کلاس

**۱** یک شبکه رایانه‌ای متشکل از ۱۶ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل ۹ به چند کامپیوتر دیگر متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترهای نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به‌طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این شبکه وصل باشیم. مجموعهٔ انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟ مجموعه ی احاطه گر مینیمم

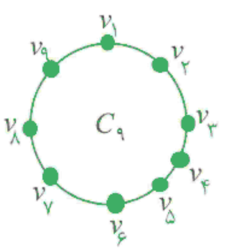


شکل ۹

**۲** با توجه به رابطهٔ $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le \gamma(G)$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ $\left\lceil \frac{16}{4+1} \right\rceil = 4$

آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟ $\{a,b,c,d\}$

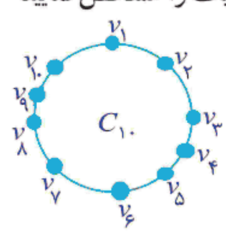
**۳** گراف‌های $P_{10}$ , $P_9$ , $C_{10}$ و $C_9$ را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید




$\gamma(C_9) \ge \left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$

$\{v_2, v_5, v_8\}$

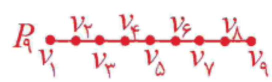
$\Rightarrow \gamma(C_9) = 3$




$\gamma(C_{10}) \ge \left\lceil \frac{10}{2+1} \right\rceil = 4$

$\{v_1, v_4, v_7, v_9\}$

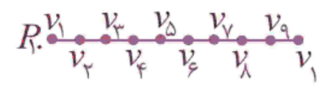
$\Rightarrow \gamma(C_{10}) = 4$




$\gamma(P_9) \ge \left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$

$\{v_2, v_5, v_8\}$

$\Rightarrow \gamma(P_9) = 3$



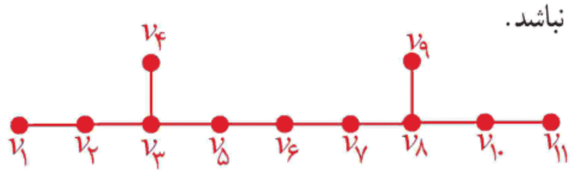

$\gamma(P_{10}) \ge \left\lceil \frac{10}{2+1} \right\rceil = 4$

$\{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$

$\Rightarrow \gamma(P_{10}) = 4$

**۴** گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد. در گراف $P_9$ عدد احاطه گری $\left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$ است .

**۵** گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.



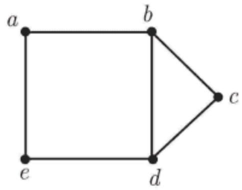

$\{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{11}\}$ = مجموعه احاطه گر مینیمم

$\Rightarrow \gamma(G) = 5 \ne \left\lceil \frac{11}{4} \right\rceil$



hamyar.in همیار

**مثال :** عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



$G$

شکل ۱۰

**حل :** به سادگی می‌توان دید که مجموعهٔ دو عضوی $\{a,c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G)\leq ۲$.

اما اگر $\gamma(G)=۱$، یعنی یک رأس در گراف $G$ وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجهٔ ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G)>۱$. بنابراین $۱<\gamma(G)\leq ۲$ و لذا $\gamma(G)=۲$.

**روش دیگر برای حل :** نوع دیگری از استدلال به این صورت است که باتوجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G)=۳$ داریم :

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۵}{۴} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

بنابراین $۲\leq\gamma(G)$ و با توجه به مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G)\leq ۲$ و لذا $\gamma(G)=۲$.

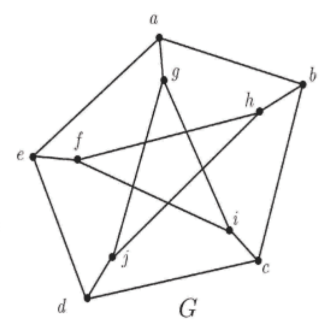
## کار در کلاس

**۱** تمام $\gamma$ـ مجموعه‌هایِ (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف $G$ در مثال قبل را بنویسید.

$\{a,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{a,d\},\{a,b\},\{c,e\},\{e,d\}$

**۲** عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.

الف)

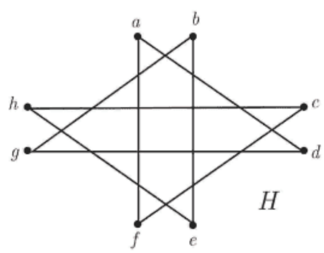


$$\gamma(G)\geq\left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil=۳$$

از طرفی $\{a,c,h\}$ یک مجموعه احاطه گری است ، بنابراین :

$$\gamma(G)=۳$$

ب)



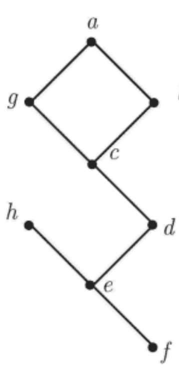
$$\gamma(H)\geq\left\lceil \frac{۸}{۲+۱} \right\rceil=۳$$

از طرفی $\{a,b,c\}$ یک مجموعه احاطه گری است ، بنابراین :

$$\gamma(G)=۳$$

## فعالیت

**۱** می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.



$G$

شکل ۱۲

الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ برای $\gamma(G)$ حداقل $۲=\left\lceil \frac{۸}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطه تمام رئوس این گراف کافی نیست.

ب) برای احاطه‌کردن رئوس $a$، $b$، $c$، $d$ و $g$ حداقل دو تا از آنها باید در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند. (چرا؟) زیرا $۲=\left\lceil \frac{۵}{۳+۱} \right\rceil$

پ) برای احاطه‌کردن رئوس $e$، $f$ و $h$ حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند. (چرا؟) $۱=\left\lceil \frac{۳}{۳+۱} \right\rceil$

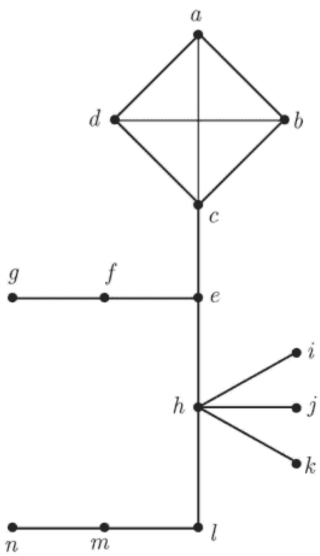
ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعهٔ احاطه‌گر از گراف $G$ باشد یعنی $\gamma(G)\geq ۳$.

ث) از طرفی چون $\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، $\gamma(G)\leq ۳$ . پس $\gamma(G)=۳$.



همیار hamyar.in

۲ می‌خواهیم عدد احاطه‌گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.



شکل ۱۳

الف) ابتدا کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ را بررسی می‌کنیم که عدد $۳ = \left\lceil \frac{۱۴}{۶} \right\rceil$ را می‌دهد. پس $\gamma(G) \geq ۳$.

ب) اما حداقل یکی از رئوس $a$، $b$، $c$ و $d$ باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{۴}{۴+۱} \right\rceil = ۱$

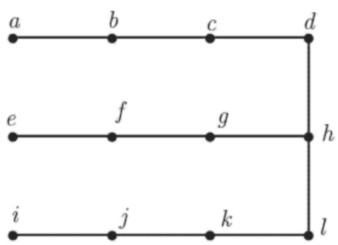
پ) حداقل یکی از رئوس $e$، $f$ و $g$ باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{۳}{۳+۱} \right\rceil = ۱$

ت) حداقل یکی از رئوس $h$، $i$، $j$ و $k$ باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{۴}{۵+۱} \right\rceil = ۱$

ث) حداقل یکی از رئوس $l$، $m$ و $n$ باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{۳}{۲+۱} \right\rceil = ۱$

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعهٔ احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \geq ۴$ و با توجه به اینکه $\{c,f,h,m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq ۴$ بنابراین $\gamma(G) = ۴$.

**مثال :** عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۴ را به‌دست آورید و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای آن ارائه کنید.



شکل ۱۴

**حل :** برای احاطه‌کردن رأس $a$ لازم است یکی از دو رأس $a$ و $b$ در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند و بهتر آن است که رأس $b$ انتخاب شود.(چرا؟)

زیرا با این انتخاب ، راس c نیز احاطه می شود ، که برای مینیمم کردن احاطه گری مفید است .

به همین صورت رئوس $j$ و $f$ را نیز می‌توان در مجموعهٔ احاطه‌گر در نظر گرفت.

حال مجموعهٔ $\{b,f,j\}$ تمام رئوس گراف به جز سه رأس $l,h,d$ را احاطه می‌کند و برای احاطهٔ این سه رأس نیز کافی است رأس $h$ اضافه شود یعنی $\{b,f,j,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است.

از طرفی با کمتر از ۴ رأس نیز نمی‌توان رئوس این گراف را احاطه کرد. زیرا مثلاً اگر ۳ رأس تمام رئوس را احاطه کنند، چون هیچ رأسی بیش از ۴ رأس را احاطه نمی‌کند (چرا؟) زیرا حداکثر درجه رئوس ۳ است .

باید هر کدام از این ۳ رأس دقیقاً ۴ رأس را احاطه کنند تا تمام ۱۲ رأس گراف احاطه شده باشند این یعنی باید حداقل ۳ رأس از درجهٔ ۳ داشته باشیم و چنین رأس‌هایی در این گراف وجود ندارند. پس حداقل تعداد رئوس لازم برای احاطه تمام رئوس این گراف همان ۴ تا است.


hamyar.in همیار

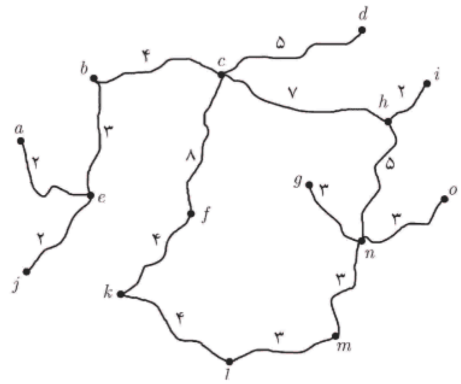
## تمرین

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید. حداقل سه ایستگاه باید نصب شود ، که می توان آن ایستگاه ها را به صورت $\{g,a,k\}$ یا $\{f,d,j\}$ یا $\{g,b,i\}$ یا $\{d,c,i\}$ یا . . . انتخاب کرد.

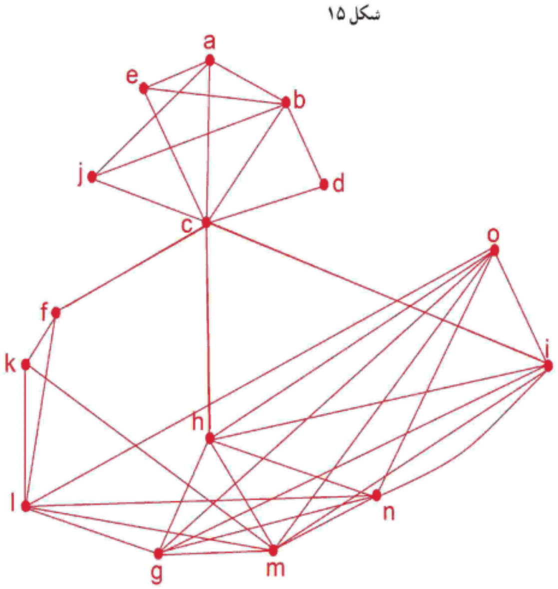
ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر $b$ احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟ حداقل دو ایستگاه دیگر باید احداث نمود . این دو ایستگاه می تواند $\{i,g\}$ یا $\{f,k\}$ یا ... باشد .

۲ نقشهٔ مقابل نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به‌گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشهٔ فوق، مسئلهٔ مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.



شکل ۱۵

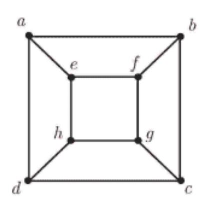
ابتدا هر روستا را به عنوان یک راس گراف (با حرف کوچک انگلیسی) مشخص می کنیم ، سپس بین دو راس (دو روستا) به شرطی یال رسم می کنیم که فاصله ی بین آن دو بیشتر از ۱۰ کیلومتر نباشد .

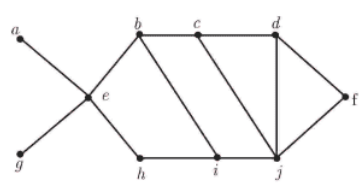


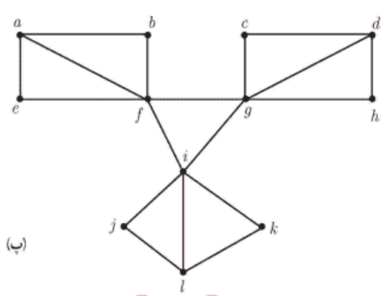

$$\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{۱۵}{۸+۱}\right\rceil=۲$$

یک مجموعه ی احاطه گری می تواند $\{c,m\}$ باشد . بنابراین کافیست دو بیمارستان در روستاهای $c,m$ احداث کرد .

۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.


(الف)


(ب)


(پ)

(الف) $\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{۸}{۳+۱}\right\rceil=۲$ مجموعه $\{a,g\}$ یک مجموعه ی احاطه گری برای آن است .پس $\gamma(G)=۲$

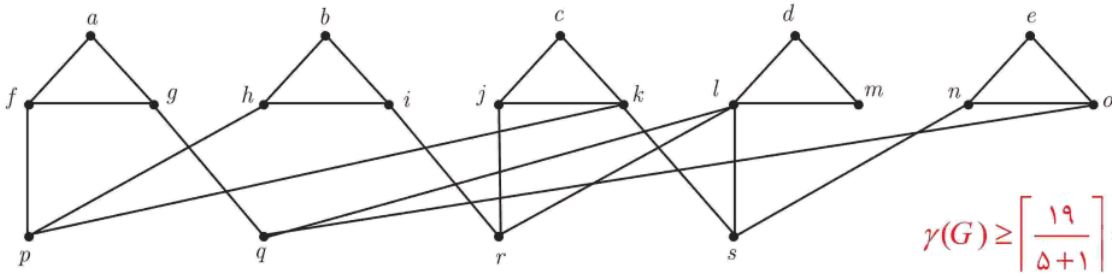
(ب) $\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{۱۰}{۴+۱}\right\rceil=۲$ مجموعه $\{e,j\}$ یک مجموعه ی احاطه گری برای آن است .پس $\gamma(G)=۲$

(پ) $\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{۱۲}{۵+۱}\right\rceil=۲$ مجموعه $\{f,d,l\}$ یک مجموعه ی احاطه گری برای آن است .پس $\gamma(G)=۳$



hamyar.in همیار

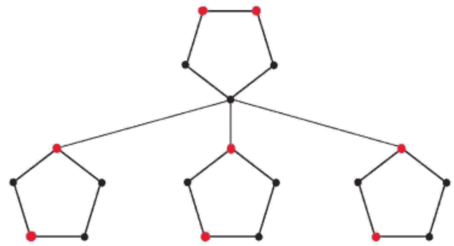
(ت)




$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۹}{۵+۱} \right\rceil = ۴$

از طرفی از هر مثلث حداقل یک راس باید انتخاب کنیم ، به عنوان نمونه مجموعه $\{f, i, k, l, e\}$ یک مجموعه احاطه گری آن است . بنابراین : $\gamma(G) = ۵$

(ث)



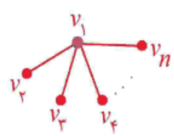
$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۲۰}{۵+۱} \right\rceil = ۴$

از طرفی از هر پنج ضلعی حداقل دو راس باید انتخاب کنیم ،

لذا $۸ = ۲\times۴$ یعنی : $\gamma(G) = ۸$ به عنوان نمونه رئوس قرمز

رنگ به عنوان یک مجموعه احاطه گری محسوب می شوند .

**۴** اگر برای گراف $G$ داشته باشیم $\gamma(G)=۱$، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف $G$ می‌توان پی‌برد؟ ($\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف $G$ می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)




حداقل یک راس با ماکزیمم درجه (راس فول) وجود دارد .

با فرض اینکه گراف دارای $n$ راس باشد ، حداقل باید $n-۱$ یال داشته باشد که می توان شکل مقابل را برای آن پیشنهاد کرد :

حداکثر میزان تعداد یال $\frac{n(n-۱)}{۲}$ می باشد (حالتی که گراف کامل باشد). در هر صورت $\Delta(G) = n-۱$ است .

**۵** $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ مشخص کنید.

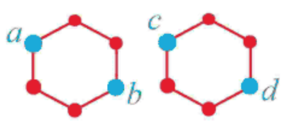
با توجه به اینکه در هر دو ، حداکثر درجه رئوس ۲ می باشد داریم :

$$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{۲+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$$

**۶** اگر $G$ یک گراف $k$- منتظم $n$ رأسی باشد نشان دهید $\left\lceil \frac{n}{k+۱} \right\rceil \leq \gamma(G)$

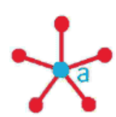
در گراف $k$- منتظم $n$ راسی ، $\Delta = \delta = k$ می باشد ، بنابراین : $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{k+۱} \right\rceil$

**۷** یک گراف ۲ــ منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.



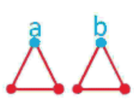

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۲}{۲+۱} \right\rceil = ۴$ ، مجموعه ی $\{a,b,c,d\}$ یک مجموعه ی احاطه گری است . بنابراین عدد احاطه گری آن ۴ می باشد .

**۸** الف) یک گراف ۶ رأسی که $\gamma$- مجموعهٔ آن با اندازه یک باشد رسم کنید.




مجموعه احاطه گری آن $\{a\}$ است .

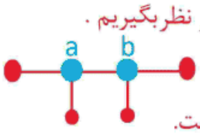
ب) یک گراف ۶ رأسی که $\gamma$- مجموعهٔ آن با اندازه دو باشد رسم کنید. در گراف مقابل مجموعه احاطه گری $\{a, b\}$ است .




پ) فرض کنید $n$ و $k$ دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n$. روشی برای رسم یک گراف $n$ رأسی که عدد احاطه‌گری آن $k$ باشد، ارائه دهید.

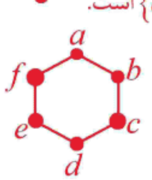
کافیست گراف را به صورت $k$ بخشی رسم کنیم و در هر بخش راسی که همه ی رئوس آن بخش را احاطه می کند در نظربگیریم .

**۹** الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.




مجموعه ی احاطه گری آن $\{a,b\}$ است.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.




گراف مقابل دارای سه مجموعه ی احاطه گری به اندازه ۲ می باشد . که عبارتند از :

$\{a,d\}$ و $\{f,c\}$ و $\{e,b\}$

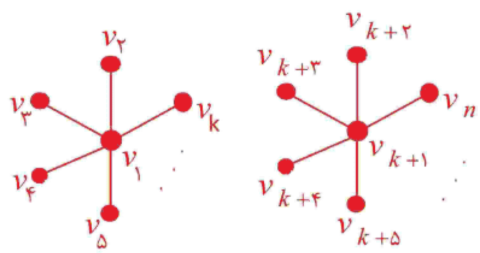


hamyar.in
همیار

**۱۰** برای هر $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq ۴)$ دلخواه توضیح دهید که

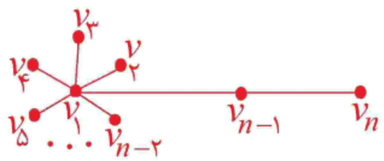
الف) چگونه می‌توانید یک گراف $n$ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

کافیست مطابق شکل روبرو ، یک گراف دو بخشی رسم کنیم به طوری که یک بخش آن شامل $k$ راس و بخش دیگر آن شامل $n-k$ راس باشد .




ب) چگونه می‌توانید یک گراف $n$ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

مطابق شکل روبرو باید گراف را رسم کرد . که دو مجموعه ی احاطه گری آن $\{v_۱, v_n\}$ و $\{v_۱, v_{n-۱}\}$ می باشند .




**۱۱** گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید.


الف) یک $\gamma$ ــ مجموعه از آن را مشخص نمایید. مجموعه $\{b, e, h, k\}$ یک ۴- مجموعه است .

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید. مجموعه $\{b, c, f, g, j, k\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی است .


نویسنده پاسخ ها : افشین ملاسعیدی شهرستان : آبادان

با تشکر فراوان از اساتید محترم آقایان انارکی و عباس زاده که همکاری بسیار زیاد داشته و بنده را در حل مسائل یاری نموده اند .

هزینه این فایل : قرائت صلوات جهت سلامتی مُنجی عالم بشریت ، قُطب دایره امکان (عج)

عزیزان می توانند به محض آماده شدن دیگر فایل ها به وبلاگ مراجعه نموده و دانلود کنند .

آدرس وبلاگ : sinxcosx.blogfa.com

همچنین در صورت مشاهده اشتباه در محاسبه و پاسخ ها بنده را از طریق شماره ۰۹۱۶۸۳۲۴۵۰۰ مطلع سازید .

*سپاسگزارم*