درس ۱ مباحثی در ترکیبیّات

یادآوری و تکمیل

در سال‌های قبل با ابزارهایی همچون اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش آشنا شده و با بعضی از تکنیک‌ها و روش‌های شمارش مانند تبدیل[1] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد) و ترکیب[2] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد) نیز آشنایی داشته و از آنها در حل مسائل شمارشی استفاده کرده‌اید.

گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم.

در این درس با توجه به طرح و حل مثال‌هایی، شما با این روش‌ها آشنا خواهید شد.

مثال : فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «چ»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است :

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل :

الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به !۷ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

ب) کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء درنظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این‌صورت !۵ جایگشت دارند؛ در هر جایگشت، سه حرفِ داده شده هم در عین

۱ـ $(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

۲ـ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

حال که کنار هم هستند !۳ جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای موردنظر برابر است با ۵!×۳!

۴	۵	ژ	پ	چ	۳	۲

$\underbrace{\text{ژ پ چ}}_{\text{۳! جایگشت}}$

پ) مشابه قسمت (ب) ابتدا ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می‌کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و !۴ جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده هم !۴ در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از ۴!×۴!

چ	ژ	۴	۵	۲	۳	پ

$\underbrace{\text{۴ ۵ ۲ ۳}}_{\text{۴! جایگشت}}$

ت) حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می‌کنیم که روی هم دو شیء شده و !۳ حروف در کنار هم و !۴ نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند که طبق اصل ضرب تعداد رمزهای موردنظر عبارت‌است از ۲!×۳!×۴!

چ	ژ	پ	۵	۳	۴	۲

$\underbrace{\text{چ ژ پ}}_{\text{۳! جایگشت}}$ $\underbrace{\text{۵ ۳ ۴ ۲}}_{\text{۴! جایگشت}}$

ما برای حل این مثال از دسته‌بندی اشیا استفاده کردیم.

حال مسئله‌ای را طرح و حل می‌کنیم ولی هیچ توضیحی برای حل آن نمی‌دهیم تا شما خودتان راه‌حل این مسئله را توضیح دهید.

مثال : ۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم :

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به‌صورت یک‌درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به‌صورت یک‌درمیان قرار داد؟

الف) ۵!×۴!×۲!

روش اول : ب) ۵!×۴!

روش دوم : $\underline{۵}$ $\underline{۴}$ $\underline{۴}$ $\underline{۳}$ $\underline{۳}$ $\underline{۲}$ $\underline{۲}$ $\underline{۱}$ $\underline{۱}$ ← ۵×۴×۴×۳×۳×۲×۲=۵!×۴!

پ) ۲×(۵!×۵!)

جایگشت‌های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف a ، b و c برابر با $3!=6$ است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف a و a و b برابر با ۳ است $(aab\ ,\ aba\ ,\ baa)$ درواقع چون جابه‌جایی دو حرف a حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کلّ جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی !۲ تقسیم کنیم، پس پاسخ این سؤال $\frac{3!}{2!}=3$ است.

چون دو حرف a به !۲ طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و این تعداد جابه‌جایی به صورت ضربی در !۳ محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم !۳ بر !۲ از عملیات ضربی خارج شود.

کار در کلاس

محاسبه کنید با ارقام ۲، ۱، ۱ و ۱ چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟

اگر ۴ رقم متمایز بودند جواب این سؤال !۴ بود ولی چون در این !۴ و به‌صورت ضربی، !۳ حالتِ ممکن برای یک‌ها محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، لذا کافی است برای رسیدن به جواب، تعداد کل حالت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که رمز ۴ رقمی جدید تولید نمی‌شود تقسیم کنیم یعنی پاسخ، $\frac{4!}{3!}=4$ است.

اعداد ۴ رقمی ممکن $\underbrace{1112,1121,1211,2111}_{\text{۴ رمز ممکن}}$

تذکر : هرگاه n شیء مفروض باشند و در بین آنها k شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های این n شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را بر جایگشت‌های اشیای تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی این تعداد برابر است با : $\frac{n!}{k!}$.

با همین استدلال می‌توان قضیهٔ زیر را، که به آن قضیهٔ جایگشت با تکرار می‌گوییم، بیان کرد :

قضیهٔ جایگشت با تکرار : اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که n_1تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_kتای آنها از نوع kام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با :

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$$

مثال : با ارقام ۵، ۴، ۴، ۳، ۳، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

حل : طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار

$$\frac{9!}{\underbrace{2!}_{\text{تعداد چهارها}}\times\underbrace{3!}_{\text{تعداد دوها}}\times\underbrace{2!}_{\text{تعداد یک‌ها}}}$$

مثال : ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

کل جایگشت‌های ۹ نفر عبارت از !۹ است که چون دونفری که در اتاق دونفره هستند با جابه‌جایی آنها مجدداً همان دو نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جابه‌جایی سه نفر و چهار نفر در اتاق‌های سه‌نفره و چهارنفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر برای دو نفر، سه نفر و چهار نفر به‌ترتیب !۲، !۳ و !۴ است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه برابر است با $\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۴!}$. این مثال به روشی دیگر و با استفاده از ترکیب برای انتخاب افراد (جابه‌جایی افراد انتخاب شده برای اتاق‌ها مهم نیست) :

$$\underbrace{\binom{۹}{۲}}_{\text{انتخاب دو نفر برای اتاق دونفره}}\times\underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{انتخاب سه نفر از ۷ نفر باقی برای اتاق سه‌نفره}}\times\binom{۴}{۴}=\frac{۹!}{۲!\times \cancel{۷!}}\times\frac{\cancel{۷!}}{۳!\times ۴!}\times ۱=\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۴!}$$

فعالیت

شخصی وارد یک گل‌فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

۱ هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.

	دسته‌گل انتخابی	مریم	رُز	میخک
۱	یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	*	*	*
۲	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	*		**
۳	سه شاخه گل رُز	...	***	...
۴	یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل رُز	...	**	*
۵	سه شاخه گل مریم	***	...	...
۶	یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل مریم	**	...	*
۷	دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	**	*	...
۸	سه شاخه گل میخک	...	...	***
۹	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	...	*	**
۱۰	دوشاخه گل رُز و یک شاخه گل مریم	*	**	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از * استفاده شده است.

۲ آیا در هر حالت از حالت‌های ۱ تا ۱۰ جابه‌جایی ستاره‌ها با هم دسته گل جدیدی تولید می‌کند؟ خیر

جابه‌جایی دو خط عمودی با هم چطور؟ خیر

۳ با توجه به قضیهٔ جایگشت با تکرار تعداد کلّ جایگشت‌های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به‌دست آورید.

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{5!}{2!\times 3!} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$$

۴ این مسئله را در حالت کلّی و برای انتخاب دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل بررسی کنید.

n = تعداد ستاره‌ها = تعداد شاخه گل‌های انتخابی

$k-1$ = تعداد خط‌های عمودی برای جدا کردن k نوع گل

$n+(k-1)$ = تعداد کل اشیا (شامل ستاره‌ها و خط‌های عمودی)

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{[n+(k-1)]!}{n!\times (k-1)!} = \binom{n+(k-1)}{k-1}$$

جابه‌جایی ستاره‌ها باهم، دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند.

جابجایی خطهای عمود با هم دسته گل جدیدی تولید نمی کند.

مثال : به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل :

$$\text{انواع گل} = k = 4,\quad \text{تعداد شاخه گل انتخابی به دلخواه} = n = 8 \xRightarrow{\text{فعالیت قبل}} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\times 8!}$$

مثال : به چند طریق می‌توان دسته‌گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل : ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل برمی‌داریم. ۵=۴−۹ شاخه گل باقی‌مانده را به‌دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم :

$$k=4,\quad \text{تعداد انتخاب‌های دلخواه} \leftarrow n = 9-4 = 5 \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{3}$$

فعالیت

می‌خواهیم تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم x_1 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول و x_2 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم و x_3 تعداد انتخاب ها از گل نوع سوم باشد، در این صورت می‌بایست جمع انتخاب‌ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی $x_1+x_2+x_3=7$ با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان‌دهندهٔ یک انتخاب هفت‌تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب هفت‌تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح ونامنفی برای این معادله است جدول زیر را کامل کرده و سپس تعداد جواب‌های معادله را به‌دست آورید.

$x_۱+x_۲+x_۳=۷$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم $x_۳$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم $x_۲$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول $x_۱$
۱+۰+۶=۷	۶	۰	۱
۱+۱+۵=۷	۵	۱	۱
۴+۲+۱=۷	۱	۲	۴
۰+۷+۰=۷	۰	۷	۰
۱+۴+۲=۷	۲	۴	۱
۰+۳+۴=۷	۴	۳	۰

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل یعنی، $\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۹}{۲}=۳۶$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت :

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل یعنی برابر است با $\binom{n+k-۱}{k-۱}$.

کار در کلاس

۱ معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ (**راهنمایی** : مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

ابتدا از هر نوع گل یک شاخه بر می داریم : $\underbrace{(x_۱-۱)}_{y_۱}+\underbrace{(x_۲-۱)}_{y_۲}+\underbrace{(x_۳-۱)}_{y_۳}=۷-۱-۱-۱ \Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳=۴$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی‌جدید (همان تعداد انتخاب های دلخواه ۴ شاخه گل از بین ۳ نوع گل) پاسخ سوال می باشد ، که برابر است با : $\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-۱}{k-۱}$. (**راهنمایی** : ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و...) دقیقاً مشابه سوال قبل عمل می کنیم :

$$\underbrace{(x_۱-۱)}_{y_۱}+\underbrace{(x_۲-۱)}_{y_۲}+\cdots+\underbrace{(x_k-۱)}_{y_k}=n\underbrace{-۱-۱-\cdots-۱}_{-k} \Rightarrow y_۱+y_۲+\cdots+y_k=n-k$$

$\Rightarrow$ تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله جدید = تعداد جوا ب های صحیح و مثبت معادله ی مورد سوال $=\binom{(n-k)+k-۱}{k-۱}=\binom{n-۱}{k-۱}$

۳ معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_۱>۱$ و $x_۳>۳$[1] باشد؟

$x_۱>۱\Rightarrow x_۱\ge ۲\Rightarrow \underbrace{x_۱-۲}_{y_۱}\ge ۰\Rightarrow \boxed{x_۱=y_۱+۲}$

$x_۳>۳\Rightarrow x_۳\ge ۴\Rightarrow \underbrace{x_۳-۴}_{y_۳}\ge ۰\Rightarrow \boxed{x_۳=y_۳+۴}$

$\Rightarrow$ معادله جدید : $y_۱+۲+x_۲+y_۳+۴+x_۴+x_۵=۱۴$

$\Rightarrow y_۱+x_۲+y_۳+x_۴+x_۵=۸$

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله ی اخیر ، پاسخ می باشد ، یعنی : $\binom{۸+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۲}{۴}$

۱ــ طرح سؤال‌هایی برای معادلات سیّاله که شرط‌هایی برای x_iها به‌صورت $a\le x_i\le b$ در آن لحاظ شده باشد در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نیست.

۴ معادلهٔ ۱۱=$x_1+x_2+\cdots x_5$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i \geq 1$ ، $1 \leq i \leq 5$)

از شرط قرار داده شده ($x_i \geq 1$) نتیجه می شود ، پاسخ مسئله ، همان تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله می باشد ، که طبق سوال ۲ ، برابر است با : $\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210$

۵ معادلهٔ ۱۲=$x_1+x_2+\cdots+x_6$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_3=4$ و $x_5>2$ باشد؟

$$\left.\begin{array}{l} x_5>2 \Rightarrow \underbrace{x_5-2}_{y_5}>0 \Rightarrow x_5=y_5+2 \\ x_3=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{معادله جدید}: x_1+x_2+4+x_4+y_5+2+x_6=12$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_4+y_5+x_6=6$$

حال با توجه به رابطه بدست آمده در سوال ۲، تعداد جواب ها برابر است با : $\binom{6-1}{5-1}=\binom{5}{4}=5$

حال می‌خواهیم ابزارهای شمارشی دیگری را معرفی کنیم که با استفاده از آنها می‌توان به حل مسائلی پرداخت که حل آنها با استفاده از روش‌های معمولی، دشوار و گاهی اوقات بسیار وقت‌گیر است!

مربع‌های لاتین

سه مدرس به نام‌های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰ـ۸، ۱۲ـ۱۰ و ۴ـ۲ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسهٔ درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس‌ها دقیقاً یک‌بار باید تدریس کند. نام مدرس‌ها را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

کلاس‌ها / جلسات	۱۰ـ۸	۱۲ـ۱۰	۴ـ۲
A	احمدی	کریمی	عباسی
B	عباسی	احمدی	کریمی
C	کریمی	عباسی	احمدی

فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول ۳ × ۳ از اعداد به‌دست آورید.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم. — a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.

ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم. — b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس‌ها تدریس داشته است.

پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است. — c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.

ت) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است. — d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.

تعریف : یک جدول مربعی از اعدادِ ۱، ۲، . . . و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، . . . و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «**مربع لاتین**[1]» می‌نامیم. (به هر یک از اعدادِ درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.)

۱ـ اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شده‌اند.

مثال : دو مربع لاتین ۳ × ۳ و دو مربع لاتین ۴ × ۴ در زیر نمایش داده شده است.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

کار در کلاس

۱ دو مربع لاتین ۵ × ۵ بنویسید.

۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱
۴	۵	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۲ با استدلال کلاسی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟ زیرا در هر سطر و در هر ستون ، هر کدام از اعداد ۱ تا n فقط یک بار نوشته شده اند .

۳ شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن **«مربع لاتین چرخشی»** می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟ زیرا در هر سطر و در هر ستون ، هر کدام از اعداد ۱ تا n فقط یک بار نوشته شده اند .

۱	۲	۳	...	...	...	$n-۱$	n
n	۱	۲	۳	...	...	$n-۲$	$n-۱$
$n-۱$	n	۱	۲	۳	...	$n-۳$	$n-۲$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۳	۴	۵				۱	۲
۲	۳	۴	...	...	...	n	۱

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد.

حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱ , ۲ , ۳ , . . . , n یک مربع جدید به‌دست آورده‌ایم. خواهیم دید که مربع به‌دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می‌کند که در سطر یا ستونی از مربع اوّل نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

۱ → ۳
۲ → ۲
۳ → ۴
۴ → ۱

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۳، ۲، ۴ و ۱ جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مربع‌های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت‌ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به‌دست آورید.

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱ → ۲
۲ → ۱
۳ → ۴
۴ → ۳

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱ → ۲
۲ → ۳
۳ → ۱

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

۱ → ۴
۲ → ۲
۳ → ۵
۴ → ۳
۵ → ۱

۴	۵	۱	۳	۲
۱	۳	۲	۴	۵
۲	۴	۵	۱	۳
۵	۱	۳	۲	۴
۳	۲	۴	۵	۱

دو مربع لاتین متعامد

تعریف : فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «**متعامدند**» هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

به‌طور مثال برای دو مربع A و B به‌صورت زیر داریم :

$A =$

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

$B =$

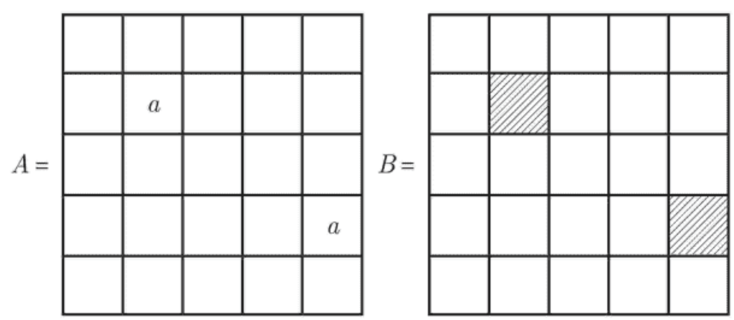
۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

$\Rightarrow$

۲۲	۳۳	۴۴	۱۱
۳۴	۲۱	۱۲	۴۳
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۱۳	۴۲	۳۱	۲۴

یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو جایگاه (درایه) در یکی از مربع‌ها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه‌های (درایه‌های) نظیر به آنها از مربع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می‌خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند به کار می‌رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مربع دو درایهٔ یکسان پیدا کنیم به‌طوری که در جایگاه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه‌های مربع اوّل) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مربع لاتینِ A دو عدد یکسان (مانند a در شکل) به گونه‌ای بیابیم که در جایگاه‌های متناظر با آنها در مربع لاتینِ B (جایگاه‌های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه‌های هاشور خورده هر دو حاوی عدد b باشند در این صورت دو مربع A و B متعامد نیستند.



مثال : در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

(الف)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

(ب)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

(پ)

حل : الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه‌های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامدند.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد یک هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند.

۳		
	۳	

۱		
	۱	

پ) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند و در مربعِ دوم نیز درایه‌های یکسان (هر عدد ۲ هستند) دارند.

	۲		
۲			

	۲		
۲			

کار در کلاس

۱ چند مربع لاتین ۱ × ۱ وجود دارد؟ یک مربع وجود دارد که به صورت روبروست :

۱

۲ آیا دو مربع لاتین ۲ × ۲ متعامد وجود دارد؟

خیر ، زیرا فقط دو مربع لاتین ۲×۲ وجود دارد (شکل روبرو)، که تلفیق آنها دارای عضو تکراری است .

۱	۲
۲	۱

و

۲	۱
۱	۲

تلفیق

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین ۳ × ۳ روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

تلفیق

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

بله ، زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد .

۴ آیا دو مربع لاتینِ ۴ × ۴ زیر متعامدند؟ بله زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد .

$A =$

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

$B =$

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

تلفیق $\Rightarrow$

۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

دیدیم که برای ۲ و ۱ $= n$، دو مربع لاتین متعامد $n \times n$ وجود ندارد. ثابت شده است[۱] که اگر ۶ و ۲ و ۱ $\neq n$، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد و برای ۶ و ۲ و ۱ $= n$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد.

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B، مربع لاتین جدیدی به‌دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

۱ → ۲
۲ → ۴
۳ → ۳
۴ → ۱

$B' =$

۳	۱	۲	۴
۲	۴	۳	۱
۴	۲	۱	۳
۱	۳	۴	۲

تلفیق $\Rightarrow$

۳۳	۴۱	۱۲	۲۴
۴۲	۳۴	۲۳	۱۱
۱۴	۲۲	۳۱	۴۳
۲۱	۱۳	۴۴	۳۲

بله متعامدند زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری نداریم.

خواندنی

اویلر[۲] در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی n به صورت ۲ + $n = ۴k$، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد. در واقع اویلر پس از بررسی‌های زیاد بر روی وجود دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مسئله تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری[۳] ثابت کرد که ادعای اویلر برای ۶ = n درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای ۱۰ = n و اعداد بزرگ‌تر کسی جواب را نمی‌دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی‌دان آمریکایی به نام پارکر[۴] و دو ریاضی‌دان هندی به نام‌های بوس[۵] و شریخاند[۶] ثابت کردند که حدس اویلر به جز برای حالت ۶ = n برای سایر ۲ + $n = ۴k$ درست نیست؛ یعنی برای هر عدد ۶ و ۲ و ۱ $\neq n$ حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد.

۱ــ اثبات این مطلب در این کتاب مد نظر نیست.

۲ــ Euler
۳ــ Tarry
۴ــ Parker
۵ــ Bose
۶ــ Shrikhande

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به‌دست می‌آید نیز با مربع لاتینِ دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_2 نیز متعامدند.

۱ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 نیز مربع لاتینِ حاصل از تعویض تمام اعداد ۱ و ۲ با هم، در B باشد. (یعنی در B به جای تمام ۱ها، ۲ و به جای تمام ۲ها، ۱ قرار دهیم و آن را B_1 بنامیم.) نشان دهید A و B_1 متعامدند. (**راهنمایی :** دو درایهٔ یکسان در A را در نظر بگیرید و نشان دهید که جایگاه‌های متناظر با آنها در B_2 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند.)

دو درایه یکسان درA را درنظر می گیریم ، اگر درایه های نظیر آنها در B_1 یکسان باشند ، آنگاه این درایه ها درB نیز یکسان خواهند بود ، که با متعامد بودن A وB تناقض دارد . پس A وB_1 متعامدند .

۲ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد. نشان دهید A و B_2 نیز متعامدند. (**راهنمایی :** دو درایهٔ یکسان در A در نظر بگیرید و با برهان خلف نشان دهید درایه‌های نظیر به آنها در B_2 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند. برای این کار از برهان خلف و خاصیت جایگشت استفاده کنید.)

دو درایه یکسان درA را درنظر می گیریم ، اگر درایه های نظیر آنها درB_2 یکسان باشند ، آنگاه این درایه ها درB نیز یکسان خواهند بود ، که با متعامد بودن A وB تناقض دارد . پس A وB_2 متعامدند .

مثال : قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برایِ کارِ ۵ کارگر با ۵ ماشین ریسندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریسندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد.

برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین 5×5 استفاده کنیم. فرض کنید هر **ستون** نشان‌دهندهٔ یک **کارگر** و هر **سطر** نشان‌دهندهٔ یک **روز هفته** و هر کدام از **اعدادِ** ۱ و ۲ و ... و ۵ که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از **ماشین‌های ریسندگی** باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر W_1 با ماشین ریسندگی شماره ۲ کار می‌کند.

$= A$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت (الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک‌بار استفاده کند.

برای این کار مانند قسمت (الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر **ستون** را نشان‌دهندهٔ یک **کارگر** و هر **سطر** را نشان‌دهندهٔ یک **روز هفته** و هر کدام از **اعداد** ۱ و ۲ و ... و ۵ را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند

$= B$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

نمایانگر یکی از انواع الیاف در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شمارهٔ ۴ با الیاف شمارهٔ ۳ کار می‌کند.

پ) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع ۵ × ۵ به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به‌طور مثال کارگر شمارهٔ ۴ در روز یکشنبه با ماشین شمارهٔ ۳ و الیاف شمارهٔ ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه‌ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین A و B متعامد هم هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع A و B به این معناست که مربع دو رنگِ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقمی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شمارهٔ ماشین ریسندگی و اعداد سمت راست شمارهٔ الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به کار رفته است.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

کار در کلاس

۱ در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده است؟
چون مربع نوشته شده ، مربع لاتین است و هر عدد نشان دهنده یک ماشین می باشد .

۲ در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف‌ها دقیقاً یک‌بار کار می‌کند.
چون مربع مربوطه ، مربع لاتین است و هر عدد نمایشگر یک نوع الیاف است .

۳ در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شده است؟ چون A و B متعامدند .

۴ اگر سه برادرِ تقریباً هم‌سن‌وسال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اوّل هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

ابتدا برای استفاده سه برادر از ۳ کُت در سه روز هفته به گونه ای برنامه ریزی می کنیم که هر کدام در هر روز یک کُت بپوشد . لذا مربع لاتین روبرو را چنان رسم کرده که هر سطر نشان دهنده یکی از سه روز هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران باشد و هر کدام از اعداد ۱و۲و۳ در آن مربع ، نمایانگر یکی از کُت ها باشد .

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

به همین ترتیب یک مربع لاتین دیگر که هر سطر نشان دهنده ی یکی از روزهای هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران است و هر کدام از اعداد ۱و۲و۳ در آن مربع ، نمایانگر یکی از پیراهن ها باشد ، رسم می کنیم . به طوری که با مربع قبلی متعامد باشد . (شکل روبرو)

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

تلفیق دو مربع(شکل روبرو) که متعامد می باشد ، برنامه مورد نظر را در اختیار ما قرار می دهد .
به طور مثال در روز شنبه برادر اول باید کُت۱ و پیراهن ۱ را بپوشد و در روز یکشنبه کُت ۲ و پیراهن ۳ را بپوشد و . . .

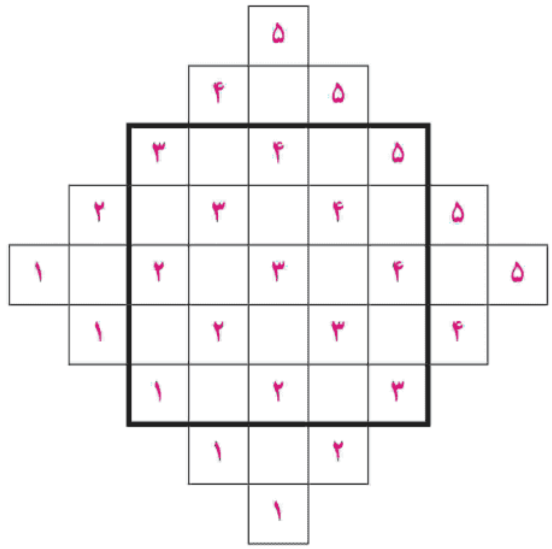
تلفیق دو مربع بالا

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱۱	۲۲	۳۳
یکشنبه	۲۳	۳۱	۱۲
دوشنبه	۳۲	۱۳	۲۱

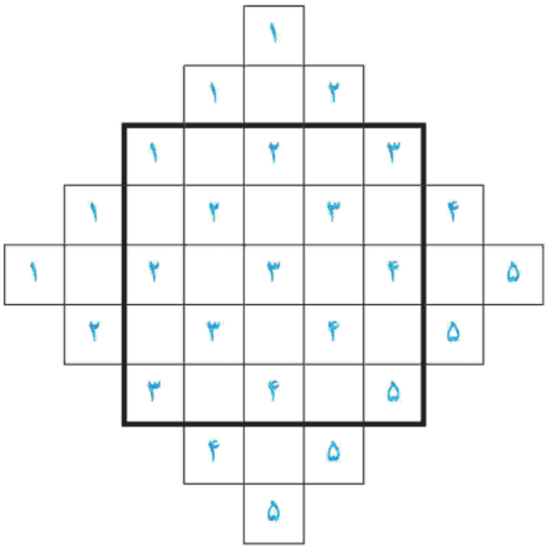
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ یک عدد فرد[1]

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین ۵ × ۵ متعامد به‌دست آورید.

۱ اعداد ۱، ۲، . . . و ۵ با نظمی خاص (به نحوهٔ چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.

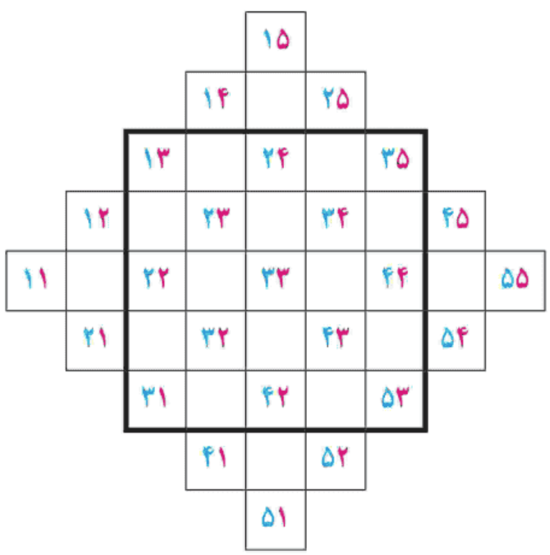


الف)



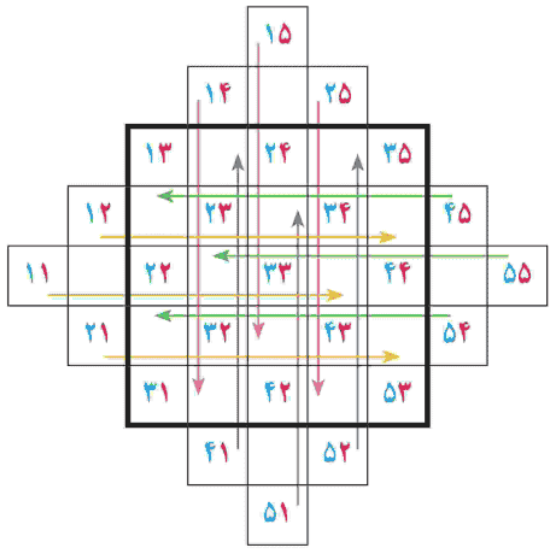
ب)

۲ از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل‌های (الف) و (ب) شکل زیر به‌دست می‌آید که در آن عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.



۱ـ از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ غیرفرد چندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن برداخته نمی‌شود.

۳ حال مربع پررنگِ ۵ × ۵ وسط، در شکل مرحلهٔ ۲ را در نظر بگیرید (شکل زیر) و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن با روش زیر مربع مقابل را پر کنید.



۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

الف) در هر کدام از مربع‌های سمت چپ، ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.

ب) در هر کدام از مربع‌های سمت راست، ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.

پ) در هر کدام از مربع‌های بالا، ۵ خانه به پایین انتقال دهید.

ت) در هر کدام از مربع‌های پایین، ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۴ حال دو مربع ۵ × ۵ بکشید و در یکی از آنها اعداد سمتِ چپ در مربع مرحلهٔ قبل و در دیگری اعداد سمتِ راست را قرار دهید. دو مربع لاتین حاصل متعامد خواهند بود.

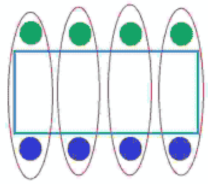
۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

۵ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n به‌دست آورید.

تمرین

۱ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



مسئله را به این صورت بیان می کنیم که :

مطابق شکل دور یک میز ۴ جفت صندلی روبروی هم داریم که می خواهیم ۴ جفت برادر را روی آنها بنشانیم . طبق اصل شمارش این عمل به !۴ حالت امکان پذیر است .

از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می خواهند روی آن بنشینند ۲ حالت داریم(کدام برادر روی صندلی آبی و کدام روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود ۴ صندلی طبق اصل شمارش باید !۴ در $۲^۴$ ضرب شود . بنابراین جواب مسئله $۲^۴$×!۴ است .

۲ اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$، در این‌صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟

تعداد حالات انتخاب ۲ رقم از ۴ رقم مجموعه یAبرابر است با : $\binom{۴}{۲}$

تعداد حالات انتخاب ۳ رقم از ۵ رقم مجموعه یBبرابر است با : $\binom{۵}{۳}$

از طرفی تعداد حالات چینش ۵ رقم به صورت یک کد ۵ رقمی برابر !۵ می باشد ،لذا طبق اصل ضرب جواب مسئله $!۵\times\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۲}$ است .

۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر :

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛ چیدن ۹ کتاب بدون هیچ محدودیت به !۹ طریق امکان پذیر است .

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک پَک کتاب که به همراه ۵ کتاب ریاضی ، ۶ شیء محسوب می شود و تعداد جایگشت آنها !۶ خواهد بود .

از طرفی ۴ کتاب فیزیک به تعداد !۴ طریق با هم امکان جابجایی دارند ، لذا طبق اصل ضرب ، جواب مسئله !۴×!۶ است .

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

باید کتاب ها بنا به موضوع یکی در میان چیده شوند : $RFRFRFRFR$

لذا برای ریاضی ها !۵ و برای فیزیک ها !۴ حالت داریم و طبق اصل ضرب در کل !۴×!۵ روش امکان پذیر است .

ت) یک کتاب ریاضیِ خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

کتاب های خاص را به عنوان یک پک ۳ تایی که به !۳ طریق کنار هم قرار می گیرند در نظر می گیریم.

از طرفی یک پک به همراه ۶ کتاب باقی مانده به !۷ طریق می توان کنار هم چید .

در نتیجه بنا به اصل ضرب به !۷×!۳ روش امکان پذیر است .

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن !۴×!۷ باشد.

۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند ، به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم پهلوی هم باشند ؟

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟ $\frac{!۶}{!۲\times!۳}$

۶ می‌خواهیم روی تعدادی جعبهٔ حاوی اجناس تولید شدهٔ خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرفِ a,a,b,a,c,c,d,d,d، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟ $\frac{!۹}{!۳\times!۳\times!۲}$

۷ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟ $\dfrac{7!}{3!\times 2!\times 2!}$

۸ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم :

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛ x_i را به عنوان گل نوع i اُم معرفی می کنیم در نتیجه جواب مسئله ، همان تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ است . بنابراین پاسخ آن $\binom{15}{4}=\binom{11+5-1}{5-1}$ است .

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

تعداد جواب های صحیح مثبت معادله قسمت قبل، جواب مسئله می باشد یعنی : $\binom{10}{4}=\binom{11-1}{5-1}$

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

یعنی در معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ شرایط $x_2\geq 2$ و $x_5>3$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیر های آن برقرار است .

$$x_2\geq 2\Rightarrow \underbrace{x_2-2}_{y_2}\geq 0\Rightarrow \boxed{x_2=y_2+2}$$

$$x_5>3\Rightarrow x_5\geq 4\Rightarrow \underbrace{x_5-4}_{y_5}\geq 0\Rightarrow \boxed{x_5=y_5+4}$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+2+x_3+x_4+y_5+4=11$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+x_3+x_4+y_5=5\Rightarrow \binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}$$

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

یعنی در معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ شرایط $x_3=0$ و $x_4\geq 5$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیر های آن برقرار است .

$$x_4\geq 5\Rightarrow \underbrace{x_4-5}_{y_4}\geq 0\Rightarrow \boxed{x_4=y_4+5}\xrightarrow{x_3=0} x_1+x_2+0+y_4+5+x_5=11$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+y_4+x_5=6\Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}$$

۹ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده :

الف) $x_1+x_2+\cdots+x_5=10 \qquad x_i>0\ ,\ 2\leq i\leq 5$

$$\xrightarrow{2\leq i\leq 5} x_i>0\Rightarrow x_i\geq 1\Rightarrow \underbrace{x_i-1}_{y_i}\geq 0\Rightarrow \boxed{x_i=y_i+1}\Rightarrow x_1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=10$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6\Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}$$

ب) $x_1+x_2+\cdots+x_6=12 \qquad x_1>2\ ,\ x_5\geq 4$

$$x_1>2\Rightarrow x_1\geq 3\Rightarrow \underbrace{x_1-3}_{y_1}\geq 0\Rightarrow \boxed{x_1=y_1+3}$$

$$x_5\geq 4\Rightarrow \underbrace{x_5-4}_{y_5}\geq 0\Rightarrow \boxed{x_5=y_5+4}$$

$$\Rightarrow y_1+3+x_2+x_3+x_4+y_5+4+x_6=12$$

$$\Rightarrow y_1+x_2+x_3+x_4+y_5+x_6=5\Rightarrow \binom{5+6-1}{6-1}=\binom{10}{5}$$

پ) $x_1+x_2+\cdots+x_5=11 \qquad x_i\geq 1\ ,\ 1\leq i\leq 5$

طبق شرط مسئله ، باید تعداد جواب های صحیح و مثبت(طبیعی) را محاسبه کنیم که برابر است با : $\binom{10}{4}=\binom{11-1}{5-1}$

ت) $x_1+3x_2+x_3+x_4=7 \qquad x_i \geq 0\ ,\ 1 \leq i \leq 4$

بدیهی است که با توجه به ضریب x_2 ، برای آن ۳ حالت می توان در نظر گرفت :

حالت اول : $x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=7 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=36$

حالت دوم : $x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=4 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

حالت سوم : $x_2=2 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

$$36+15+3=54$$

ث) $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3 \qquad x_i \geq 0\ ,\ 1 \leq i \leq 4$

با توجه به شرایط معادله ، چهار حالت برای x_2 وجود دارد :

حالت اول : $x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=3 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10$

حالت دوم : $x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=2 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

حالت سوم : $x_2=4 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

حالت چهارم : $x_2=9 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=0 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{0+3-1}{3-1}=\binom{2}{2}=1$

بنابراین تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله برابر است با : $10+6+3+1=20$

۱۰ به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$$x_1+x_2+x_3=5 \xrightarrow{x_i \geq 0} \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

به ۲۱ طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد .

۱۱ به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8 \xrightarrow{x_i \geq 1} \text{تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی)} = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

به ۳۵ طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر چنان توزیع کرد که به هر نفر حداقل یک توپ تعلق گیرد.

۱۲ آیا مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

خیر امکان ندارد متعامد باشند زیرا اگر مثلاً در جایگشت، $1 \to a$ باشد ، آنگاه در مقابل تمام ۱ های مربع اول ، عدد a در مربع دوم ظاهر می شود که در مربع تلفیق زوجِ $1a$ تکراری خواهد بود .

برای درک بهتر به مربع روبرو همراه با جایگشت آن دقت کنید :

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$1 \to a$
$2 \to ?$
$3 \to ?$

a	?	?
?	?	a
?	a	?

۱۳ مربع لاتین ۳ × ۳ مقابل را در نظر بگیرید.

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

الف) سطر دوم و سومِ مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_1 بنامید. آیا A و A_1 متعامدند؟

$A_1 =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

تلفیق

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

متعامدند .

ب) ابتدا سطرِ اول و سطرِ سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_2 بنامید. آیا A و A_2 متعامدند؟

$A_2 =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

و $A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

متعامد نیستند زیرا مطابق شکل روبرو ، برای دو عدد یکسان ۱ ، دو عدد یکسان ۲ نظیر شده است .

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

خیر ، به طور قطع نمی توان گفت ، ممکن است متعامد باشند یا نباشند .

۲ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

خیر ، در بعضی مواقع ممکن است .

۱۴ قرار است شش مدرس T_1، T_2 و ... و T_6 در شش جلسهٔ متوالی در شش کلاسِ C_1، C_2 و ... و C_6 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

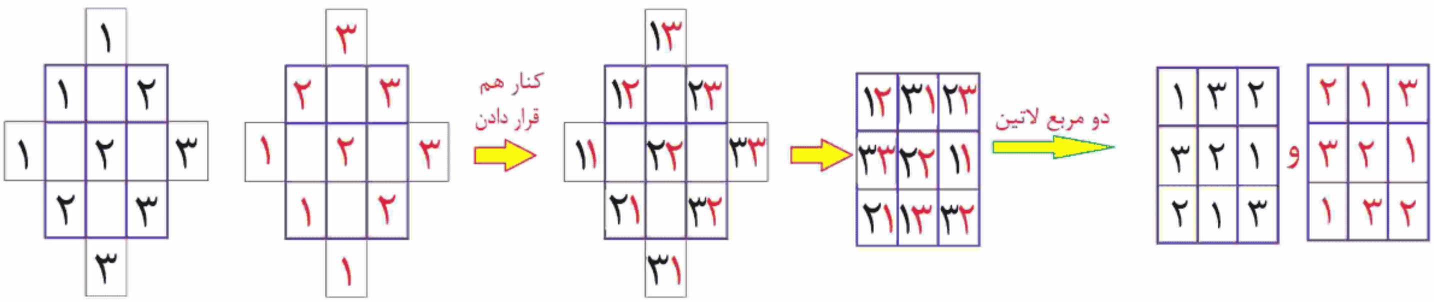
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
جلسه اول	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
جلسه دوم	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
جلسه سوم	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
جلسه چهارم	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
جلسه پنجم	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
جلسه ششم	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

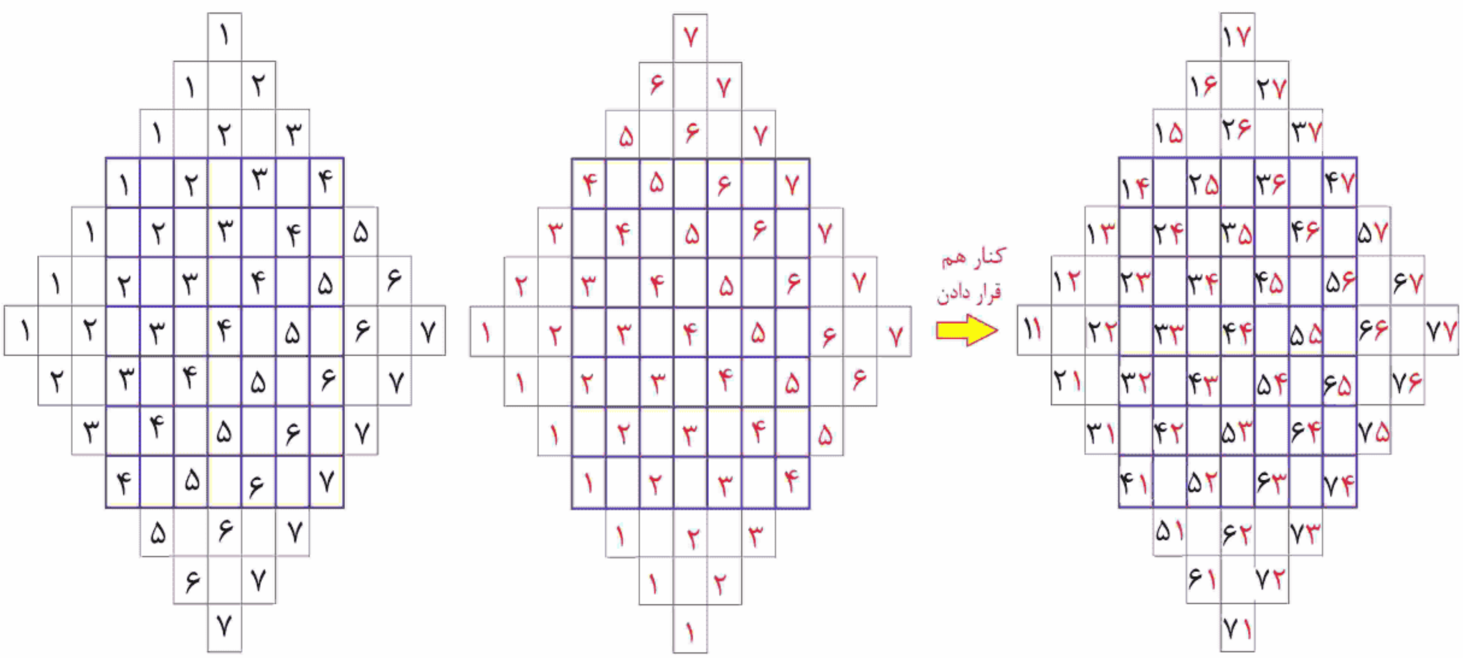
یک مربع لاتین 6×6 که هر سطر آن یکی از جلسات و هر ستون آن یکی از کلاس ها را مشخص می کند.

به عنوان نمونه معلم T_1 جلسه اول را در کلاس C_1 است.

و معلم T_6 جلسه چهارم را در کلاس C_3 است.

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ بنویسید.





۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷
۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴

دو مربع لاتین

۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

و

۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

۱۶ در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی قرار است ۷ راننده در هفت روزِ هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد :

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شود.

ــ برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

کافیست دو مربع لاتین 7×7 بنویسیم ، به طوری که سطر های آنها ، روز های هفته و ستون های آنها راننده ها نام گذاری شوند .

((برای سهولت در نوشتن ، راننده ها را a,b,c,d,e,f,g نام گذاری می کنیم .))

اگر آن دو مربع را A و B بنامیم ، اعداد درون مربع های A شماره ماشین و اعداد درون مربع های B شماره مسیر را مشخص می کنند .

لذا مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه های آنها ، جواب مسئله است .

برای این منظور از مربع های بدست آمده در سوال ۱۵ استفاده می کنیم :

$A=$

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
یکشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
دوشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
پنجشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
جمعه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

و

$B=$

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
یکشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
دوشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
پنجشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
جمعه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

تلفیق

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷
یکشنبه	۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
دوشنبه	۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
سه شنبه	۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
چهارشنبه	۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
پنجشنبه	۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
جمعه	۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴

به عنوان نمونه راننده a روز شنبه با ماشین شماره ۱ در مسیر شماره ۴ خواهد بود .