نویسنده پاسخ ها : افشین ملاسعیدی   شهرستان : آبادان

با تشکر فراوان از استاد عزیزآقای انارکی که همکاری بسیار زیاد داشته و بنده را در حل مسائل یاری نموده اند.

درس ۲ روش‌هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

واضح است که برای محاسبهٔ تعداد اعضای $(A\bigcup B)$ یعنی $|A\bigcup B|$ چون اعضای $(A\bigcap B)$ هم در A و هم در B هستند، اگر اعضای A و B را روی هم حساب کنیم اعضای $(A\bigcap B)$ دو بار محاسبه شده‌اند و می‌بایست یک‌بار از این مجموع کم شود و لذا خواهیم داشت :

$$|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|$$

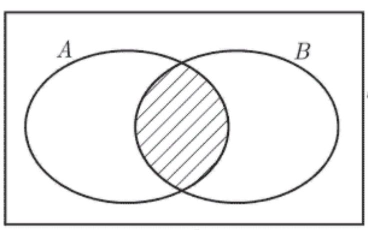
این تساوی به **اصل شمول** و **عدم شمول** برای دو مجموعه معروف است. (برای اختصار آن را **اصل شمول** می‌نامیم).

با توجه به تعریف متمم اگر S مجموعهٔ مرجع A و B باشد، داریم :

$$|(A\bigcup B)'|=|\overline{A\bigcup B}|=|S|-|A\bigcup B|$$

این تساوی نتیجهٔ اصل شمول است.

نتیجهٔ مهم : اگر S مجموعه‌ای متناهی و A و B زیرمجموعه‌های S باشند، در این صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B قرار ندارند. برابر است با :



شکل ۱

$$|S|-|A\bigcup B|=|S|-|A|-|B|+|A\bigcap B|$$

مثال : در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

حل : ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل در یکی از دو رشتهٔ ورزشی بازی می‌کنند مشخص می‌کنیم و سپس با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول تعداد افرادی را که در هیچ رشته ورزشی شرکت ندارند به‌دست می‌آوریم.

اگر مجموعهٔ افرادی را که فوتبال و والیبال بازی می‌کنند به‌ترتیب F و V بنامیم در این‌صورت خواهیم داشت :

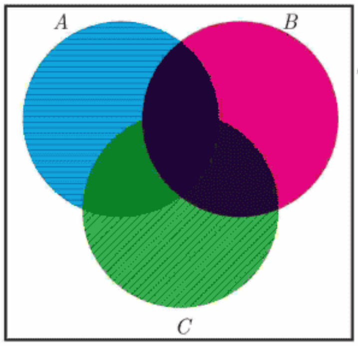
$$|F\cup V|=|F|+|V|-|F\cap V| \Rightarrow |F\cup V|=۱۵+۱۴-۹=۲۰$$

$\Rightarrow$ تعداد افرادی که نه در F و نه در V هستند $=|\overline{F\cup V}|=|S|-|F\cup V|=۲۵-۲۰=۵$

اصل شمول را می‌توان برای بیش از دو مجموعه هم تعمیم داده و بیان کرد که ما در این کتاب برای حداکثر سه مجموعه آن را بیان و مسائلی را با استفاده از این اصل طرح و حل خواهیم کرد.

اصل شمول برای سه مجموعه : اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع S باشند، در این‌صورت همواره تساوی زیر (اصل شمول) برقرار است :

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$



شکل ۲

(توضیح دهید چرا اشتراک‌های دوتایی کم و اشتراک سه تایی اضافه شده است؟)

چون در جمعِ تکی ها ، اشتراک های دو تایی مکرر شمرده شده اند ، باید اضافی آن حذف شود . لذا اشتراک های دو تایی را کم می کنیم .

از طرفی طی کم کردن آن اشتراک ها ، اشتراک سه تایی که قبلاً ۳ بار حساب شده ، ۳ بار هم کم می شود ، پس باید یکبار افزوده گردد .

با استفاده از تعریف متمم، نتیجهٔ اصل شمول نیز به صورت زیر بیان می‌شود :

(تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B و C قرار ندارند) $|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$

فعالیت

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $۱\le n\le ۴۰۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، بر ۴ بخش‌پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند).

۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک موردنظر می‌باشند؟ ۱۳ زیرا بر هیچکدام از اعداد ۳و۴و۵ بخش پذیر نیست .

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد موردنظر است؟ خیر ، زیرا بر هر سه عدد ۳و۴و۵ بخش پذیر است .

۳ اگر مجموعهٔ اعدادی را که بر ۳ بخش‌پذیرند A و اعداد بخش‌پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش‌پذیر بر ۵ را C بنامیم، $\overline{A}$، $\overline{B}$ و $\overline{C}$ را تعریف کنید.

$\overline{A}$ = مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیر نیستند . $\overline{B}$ = مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیر نیستند . $\overline{C}$ = مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش پذیر نیستند .

آیا مجموعهٔ $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ همه اعداد موردنظر را شامل می‌شود؟ بله

۴ آیا تساوی $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=(\overline{A\cup B\cup C})$ برقرار است؟ بله ، زیرا :

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{(A\cup B)\cup C}\overset{\text{دمورگان}}{=\!=}\overline{A\cup B}\cap\overline{C}\overset{\text{دمورگان}}{=\!=}(\overline{A}\cap\overline{B})\cap\overline{C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجهٔ اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [ ] جزء صحیح است).

$$A=\{۱\le n\le ۴۰۰ \mid ۳\mid n\}\rightarrow |A|=\left[\frac{۴۰۰}{۳}\right]=۱۳۳$$

(از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، پس تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر سه بخش‌پذیرند برابر است با $\left[\frac{k}{۳}\right]$).

$$B=\{۱\le n\le ۴۰۰ \mid ۴\mid n\}\rightarrow |B|=\left[\frac{۴۰۰}{۴}\right]=۱۰۰$$

$$C=\{۱\le n\le ۴۰۰ \mid ۵\mid n\}\rightarrow |C|=\left[\frac{۴۰۰}{۵}\right]=۸۰$$

$(A\cap B)$ یعنی مجموعهٔ اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش‌پذیرند و با توجه به قضیه‌ای در نظریه اعداد، «مجموعهٔ اعدادی که بر a و بر b بخش‌پذیر باشد با مجموعهٔ اعدادی که بر «ک‌م‌م» آن دو عدد یعنی بر $[a,b]$ بخش‌پذیرند، برابر می‌باشد». (این قضیه برای سه عدد یا بیشتر نیز برقرار است)

$$|A\cap B|=\left[\frac{۴۰۰}{[۳,۴]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۲}\right]=۳۳$$

$$|A\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{[۳,۵]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۵}\right]=۲۶$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{[۴,۵]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۲۰}\right]=۲۰$$

$$|A\cap B\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{۶۰}\right]=۶ \qquad ([۳,۴,۵]=[[۳,۴],۵]=[۱۲,۵]=۶۰)$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$
$$=۴۰۰-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$
$$=۴۰۰-(۱۳۳+۱۰۰+۸۰-۳۳-۲۶-۲۰+۶)=۱۶۰$$

کار در کلاس

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $۱\le n\le ۳۵۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۵،۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشند؟
(توجه داشته باشید که $[۵,۴,۶]=۶۰$, $[۴,۶]=۱۲$, $[۵,۶]=۳۰$)

مجموعه اعداد بخش پذیر بر۴ ، را با A و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۵ را با B و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۶ را با C نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A|=\left[\frac{۳۵۰}{۴}\right]=۸۷ \quad و \quad |B|=\left[\frac{۳۵۰}{۵}\right]=۷۰ \quad و \quad |C|=\left[\frac{۳۵۰}{۶}\right]=۵۸ \quad و \quad |A\cap B|=\left[\frac{۳۵۰}{۲۰}\right]=۱۷$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{۳۰}\right]=۱۱ \quad و \quad |C\cap A|=\left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right]=۲۹ \quad و \quad |A\cap B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{۶۰}\right]=۵$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۳۵۰-(۸۷+۷۰+۵۸-۱۷-۱۱-۲۹+۵)=۱۸۷$$

مثال : اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی‌هایی که در هریک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد.

حل : یک رمز ۴ رقمی را به‌صورت $\overline{abcd}$ نمایش می‌دهیم که در آن a ، b ، c و d ارقام صفر تا ۹ می‌باشند. محاسبهٔ تعداد چنین ارقامی به‌صورت مستقیم کاری وقت‌گیر است و امکان دارد رمزهایی را چندبار محاسبه کنیم یا رمزهایی را از قلم بیندازیم، لذا از اصل شمول استفاده می‌کنیم.

ابتدا مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر و مخالف با آنچه موردنظر مسئله است تعریف می‌کنیم!

$$A=\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۷\}\rightarrow |A|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$B=\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۸\}\rightarrow |B|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$(A\cap B)=\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۷,۸\}\rightarrow |A\cap B|=۸\times۸\times۸\times۸$$

واضح است که منظور از $\overline{A}$ مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی است که در هر یک از آنها رقم ۷ به‌کار رفته است و منظور از $\overline{B}$

اعداد ۴ رقمی است که در آنها عدد ۸ به‌کار رفته است. البته $(\overline{A}\cap\overline{B})$ یعنی مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ به‌کار رفته است و تعداد اعضای این مجموعه پاسخ سؤال مطرح شده است.

۱۰ ۱۰ ۱۰ ۱۰ ⟵ تعداد کل ۴ رقمی‌ها $=|S|=$ ۱۰×۱۰×۱۰×۱۰ = ۱۰۰۰۰

رقم چهارم   رقم سوم   رقم دوم   رقم اول

$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$

=۱۰۰۰۰−(۹۴+۹۴−۸۴) = ۹۷۴

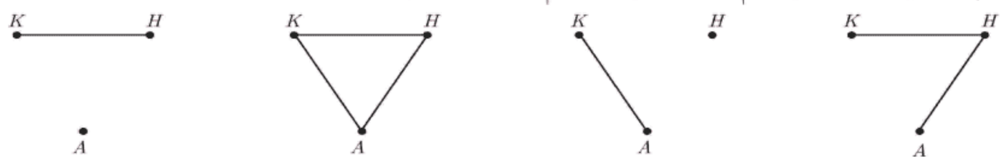
۴۸۷۰ = ۹۷۴×۵= زمان لازم برحسب ثانیه

کار در کلاس

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورهه، آبگرم و حاجی‌آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به‌طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را K، A و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K، A و H می‌توان تعریف کرد به‌طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد.

۱ از چهار گراف سادهٔ زیر کدام‌ها موردنظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟ گراف های ب و ت را نباید شمرد زیرا یک راس تنها می ماند .



ت   پ   ب   الف

شکل ۳

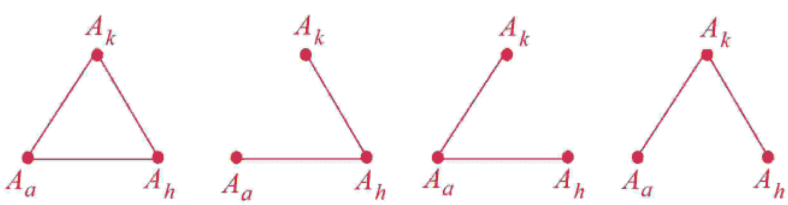
۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با : $|S|=2^{\binom{3}{2}}=2^3=8$

(بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده درنظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحیِ ما، باشد یا نباشد).

۳ اگر A_k را مجموعهٔ راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت A_a و A_h را تعریف کنید و با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

$|A_k|=|A_a|=|A_h|=2$ و $|A_k\cap A_a|=|A_a\cap A_h|=|A_h\cap A_k|=1$ و $|A_k\cap A_a\cap A_h|=1$

$\Rightarrow |\overline{A_k}\cap\overline{A_a}\cap\overline{A_h}|=|\overline{A_k\cup A_a\cup A_h}|=|S|-|A_k\cup A_a\cup A_h|=8-(2+2+2-1-1-1+1)=4$



۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $|A_k|=|A_a|=|A_h|=2$ یکی از روستا ها را کنار گذاشته و فقط بین دو روستای دیگر می تواند یک جاده باشد یا نباشد . لذا ۲ حالت داریم .

ب) $|A_k\cap A_a|=|A_k\cap A_h|=|A_a\cap A_h|=1$ یک راس مانده و فقط یک حالت داریم و آن گراف تهی است .

پ) $|A_k\cap A_a\cap A_h|=1$ تمام رئوس بدون یال هستند (بین روستاها جاده نیست) که گراف تهی بوده و فقط یک حالت محسوب می شود .

فعالیت

اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $۱\leq i\leq m$ می‌توان به n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد ($f(a_i)=b_۱$ یا $f(a_i)=b_۲$ یا ... یا $f(a_i)=b_n$) و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با : $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=۵$ و $|B|=۳$، در این‌صورت می‌خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به‌طوری که $R_f=B$. (روی تمام اعضای B، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع‌هایی، تابع پوشا گفته می‌شود.)

۱ اگر فرض کنیم $B=\{b_۱ , b_۲ , b_۳\}$ و $A=\{a_۱ , a_۲ , a_۳ , a_۴ , a_۵\}$ و تعریف کنیم،

$A_۱=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq b_۱ ; ۱\leq i\leq ۵\}$

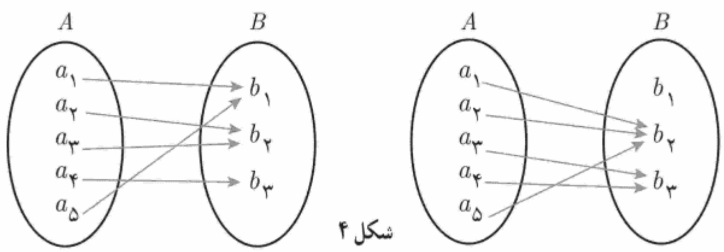
$A_۲=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq b_۲ ; ۱\leq i\leq ۵\}$

$A_۳=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq b_۳ ; ۱\leq i\leq ۵\}$

در این صورت $\overline{A_۱}$ مجموعه‌ای شامل همه تابع‌هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی $b_۱$ می‌آورند.

یکی از تابع‌های موجود در مجموعهٔ $A_۱$

یکی از تابع‌های موجود در مجموعهٔ $\overline{A_۱}$



شکل ۴

۲ مجموعهٔ $(\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳})=(\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}\cap\overline{A_۳})$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

$|S|=۳^۵=۲۴۳ , |A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲^۵=۳۲$

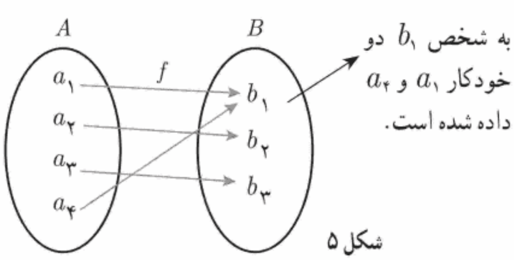
$|A_۱\cap A_۲|=|A_۱\cap A_۳|=|A_۲\cap A_۳|=۱ \quad , |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$

$(\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳})=|S|-|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$

$=۲۴۳-(۳۲+۳۲+۳۲-۱-۱-۱+۰)=۱۵۰$

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های از یک مجموعهٔ ۴ عضوی مانند A به یک مجموعهٔ ۳ عضوی مانند B، به طوری که بُرد این توابع همهٔ اعضای B باشد. (به هر عضو B حداقل ۱ عضو از A نسبت داده شود.)



شکل ۵

$A_i=\{f:A\to B \mid f(a_i)\neq b_j , ۱\leq i\leq ۴ , ۱\leq j\leq ۳\}$

$|S|=|B|^{|A|}=۳^۴=۸۱$

$|A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲^۴=۱۶$

$|A_۱\cap A_۲|=|A_۱\cap A_۳|=|A_۲\cap A_۳|=۱^۴=۱ , |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$

$|\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}\cap\overline{A_۳}| = |\overline{A_۱\cup A_۲\cup A_۳}| = |S| - |A_۱\cup A_۲\cup A_۳|$

$= ۸۱-(۳\times۱۶-۳\times۱+۰) = ۳۶$

تذکر : تعداد تابع‌هایی چون $f: A\to B$ با فرض $|A|=m \geq ۳$ و $|B|=۳$ به‌طوری که $R_f=B$، از رابطهٔ $۳^m-(۳\times۲^m-۳)$ به‌دست می‌آید.

مثال : ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل : حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی که برابر است با $۸^۴=۴۰۹۶$.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۶ عضوی را شمارش کنیم.

۱ اگر فرض کنیم $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,\cdots,b_۶\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_۱)$، چند راه انتخاب داریم؟ ۶ راه وجود دارد . زیرا $f(a_۱)$ می تواند $b_۱$ یا $b_۲$ یا $b_۳$ یا $b_۴$ یا $b_۵$ یا $b_۶$ انتخاب شود .

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_۱)$، برای تعریف f روی $a_۲$ چند راه انتخاب داریم؟ ۵ راه وجود دارد زیرا با انتخاب یکی از b_iها برای $f(a_۱)$ فقط ۵ انتخاب برای $f(a_۲)$ می ماند .

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان $f(a_۱)$ را تعریف کرد $\leftarrow f(a_۱)=b_۱$ یا $b_۲$ یا $\cdots$ یا $b_۶$

به ۵ طریق می‌توان $f(a_۲)$ را تعریف کرد $\leftarrow f(a_۲)\neq f(a_۱) \Leftarrow f$ یک‌به‌یک است

به ۴ طریق می توان $f(a_۳)$ را تعریف کرد . $\Leftarrow f(a_۳)\neq f(a_۱)\ ,\ f(a_۳)\neq f(a_۲) \Leftarrow f$ یک‌به‌یک است

....

طبق اصل ضرب $\Leftarrow$ تعداد کل تابع‌های یک‌به‌یک $= ۶\times۵\times۴\times۳ = \frac{۶!}{۲!} = (۶)_۴$

این نماد همان $P(۶,۴)$ می باشد

در حالت کلّی اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت با شرط $m\leq k$ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر است با تعداد انتخاب‌های m شیء از بین k شیء یا $(k)_m=\frac{k!}{(k-m)!}$.

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن

شکل ۶

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی یعنی، $(8)_4 = \frac{8!}{4!} = 1680$.

اصل لانه کبوتری[1]

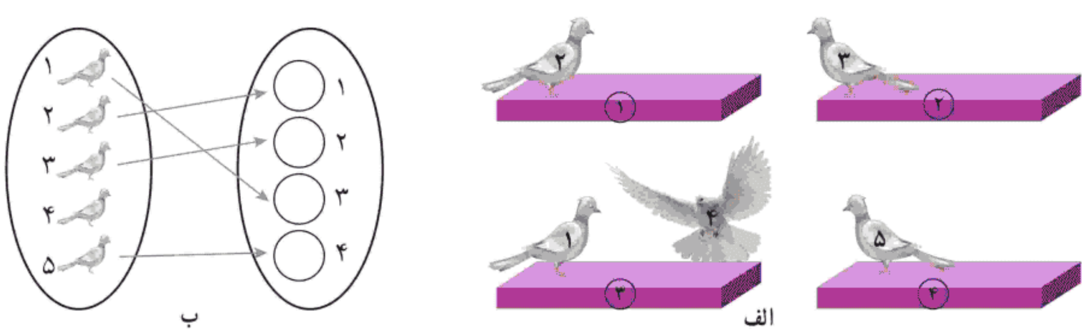
اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولّدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به‌دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دونفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

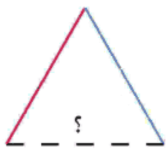
شکل ۷

اصل لانه کبوتری : اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



شکل ۸

[1]ــ اصل لانه‌کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود، این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.



مثال : نشان دهید اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همرنگ خواهند شد.

حل : اگر ضلع‌های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

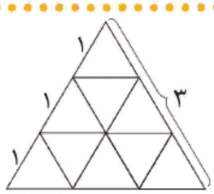
مثال : ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانهٔ ۴ هم‌نهشت می‌باشند.

حل : می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعهٔ $R=\{۰,۱,۲,۳\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهشتی باید $a \overset{۴}{\equiv} b$ و حکم به‌دست می‌آید.

تمرین : در حالت کلّی ثابت کنید در بین هر $(n+۱)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانهٔ n هم‌نهشت‌اند).

باقی مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعضای مجموعه $R=\{۰,۱,۲,...,n-۱\}$ است ، حال اگر $n+۱$ عدد طبیعی را کبوترها و باقی مانده های تقسیم اعداد بر n را لانه ها فرض کنیم ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت ،یعنی حداقل دو عدد از این $n+۱$ عدد باقی مانده های تقسیمشان بر n با هم برابر است .اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم ، آن دو در تقسیم بر n هم باقی مانده بوده و در نتیجه تفاضل آنها بر n بخش پذیر است . به عبارت دیگر $a \overset{n}{\equiv} b$.

کار در کلاس

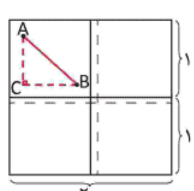


شکل ۹

۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.

مطابق شکل ، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع تقسیم می کنیم . حال ۱۰ نقطه را کبوتر و هر مثلث کوچک را یک لانه فرض می کنیم (۹ لانه داریم) ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت .

از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث کوچک ۱ واحد می باشد ، فاصله بین دو نقطه ی درون یک مثلث از ۱ واحد کمتر است .



شکل ۱۰

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.

سوال : ۵ نقطه درون مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض است . ثابت کنید ، حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود دارد به طوری که فاصله ی آنها از یکدیگر کمتر از $\sqrt{۲}$ است .

پاسخ : مطابق شکل روبرو مربع را به چهار مربع یکسان (به ضلع ۱ واحد) تقسیم می کنیم .

حال ۵ نقطه را کبوتر و مربعات کوچک را به عنوان ۴ لانه در نظر می گیریم .طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه واقع می شوند ، یعنی حداقل دونقطه مثل A و B یافت می شوند که در یک مربع کوچک قرار می گیرند .

حال با توجه به شکل ، طبق قضیه فیثاغورث می توان نوشت :

$$AB^۲=AC^۲+BC^۲ \xrightarrow[BC<۱]{AC<۱} AB^۲<۱^۲+۱^۲ \Rightarrow AB^۲<۲ \Rightarrow AB<\sqrt{۲}$$

۳ نشان دهید در یک خانوادهٔ حداقل ۵ نفری، دست‌کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

هر سال دارای ۴ فصل است که آنها را به عنوان ۴ لانه و هر یک از افراد خانواده را به عنوان یک کبوتر در نظر می گیریم . بنابراین می خواهیم حداقل ۵ کبوتر را در ۴ لانه جای دهیم ، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر یافت می شوند که در یک لانه جای گیرند ، یعنی حداقل دو نفر از افراد خانواده وجود دارند که در یک فصل از سال متولد شده اند .

۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبهٔ $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (**راهنمایی**: مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این‌صورت درجات رئوس از ۱ تا $P-1$ تغییر می‌کند.
(۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیهٔ رئوس از ۱ تا $P-2$ تغییر می‌کند)

با توجه به راهنمایی داده شده مسئله را حل می کنیم :

حالت اول (اگر گراف فاقد راس تنها باشد) : هر کدام از رئوس گراف را یک کبوتر و هر کدام از درجات ۱ تا $P-1$ را یک لانه فرض می کنیم . بنابراین P کبوتر و $P-1$ تا لانه کبوتر داریم ، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه جای می گیرند ، یعنی حداقل دو تا از رئوس دارای درجه یکسان می باشند .

حالت دوم (اگر گراف دارای یک راس تنها باشد) : درجه آن راس تنها صفر می باشد ، که با کنار گذاشتن آن ، $P-1$ راس داریم و آنها را به عنوان کبوتر در نظر می گیریم .

از طرفی هر کدام از این رئوس می توانند درجات ۱ تا $P-2$ داشته باشند . که اگر به عنوان لانه در نظر گرفته شوند ، طبق اصل لانه کبوتری با وجود $P-1$ کبوتر و $P-2$ لانه ، حداقل دو کبوتر یافت می شوند که در یک لانه جای گیرند . یعنی حداقل دو راس وجود دارد که دارای درجه یکسانند .

آیا نیازی هست حالتی را درنظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

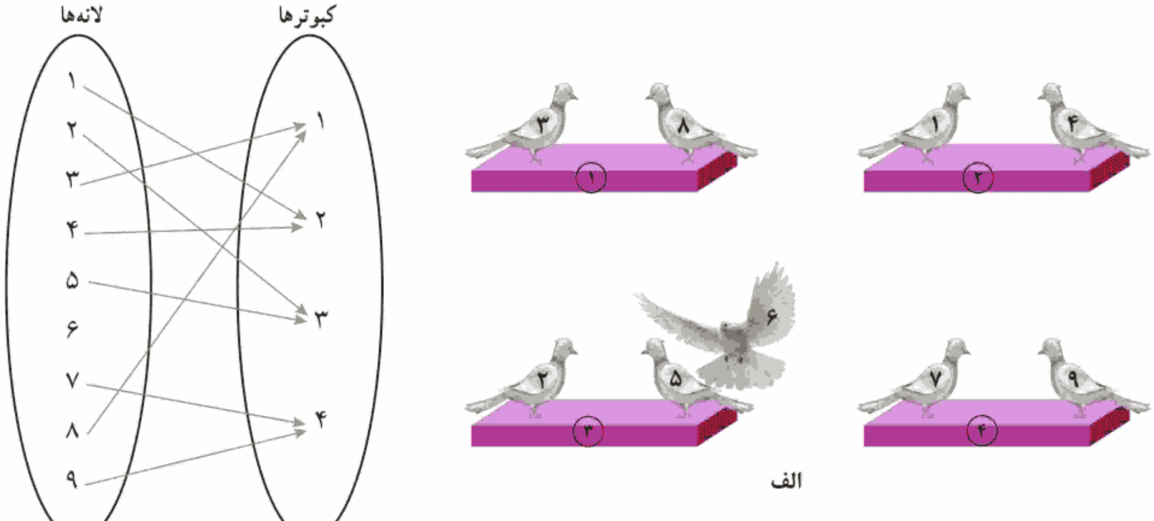
خیر ، زیرا هر چه راس تنها داشته باشیم ، آنها را کنار گذاشته و از تعداد رئوس و تعداد اعدادی که می توانند درجه ی آنها محسوب شوند ، به یک میزان کاسته می شود و همواره تعداد رئوس بیشتر از تعداد درجات است .

فعالیت

جدول زیر را (با توجه به قراردادن n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه‌گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر	تعداد کبوترها $(kn+1)$	تعداد لانه‌ها (n)
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر	$1 \times n + 1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر	$2 \times n + 1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر	$3 \times n + 1$	n
⋮	⋮	⋮
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $k+1$ کبوتر	$kn + 1$	n

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به‌ازای $n=4$ و $k=2$ تعداد کبوترها $9=1+4\times2$ می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کبوتر باقی‌مانده مجدّد در هر لانه ۱ کبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کبوتر است. توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همهٔ کبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کبوتر در ۱ لانه و ۴ کبوتر در لانه‌ای دیگر یا . . .).



الف

ب

شکل ۱۱

تعمیم اصل لانه کبوتری : هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال : در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل : در این مسئله ۷=۱+k یعنی ۶=k است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی ۱۲=n است، پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست ۷۳=۱+۱۲×۶=۱+kn باشد.

کار در کلاس

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفتهٔ تولدشان یکی است؟ هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز است ، لذا طبق اصل ضرب $n = ۱۲ \times ۷ = ۸۴$.

$$\left.\begin{array}{l} n = ۸۴ \\ k+۱ = ۱۰ \Rightarrow k = ۹ \end{array}\right) \Rightarrow \text{حداقل تعداد دانش آموزان} = k\,n + ۱ = ۸۴ \times ۹ + ۱ = ۷۵۷$$

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$k+۱ = ۵ \Rightarrow k = ۴$

$kn+۱ = ۵۴ \Rightarrow ۴n = ۵۳ \Rightarrow n = [\frac{۵۳}{۴}] = ۱۳$

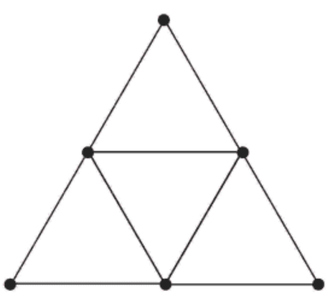
۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیرتکراری و مثل هم است؟ (فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی موردنظر است).

تعداد حروف الفبای فارسی ۳۲ می باشد ، پس برای حرف اول ۳۲ و برای حرف دوم ۳۱ حالت داریم ، که طبق اصل ضرب : $n = ۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲$

$$\left.\begin{array}{l} n = ۹۹۲ \\ k+۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲ \end{array}\right) \Rightarrow \text{حداقل تعداد افراد حاضر در سالن همایش} : k\,n + ۱ = ۲ \times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵$$

مثال : حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

حل : کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم‌بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست‌کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصلهٔ این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.



شکل ۱۲

مثال : نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز ($n \geq ۲$) حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل : قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطهٔ دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

طبق آنچه راهنمایی شده ، گرافی را تعریف می کنیم که راس های آن دانش آموزان و رابطه ی دوستی بین هر دو دانش آموز ، یالی بین راس های متناظرشان باشد . بنابراین درجه ی هر راس تعیین کننده تعداد دوستان شخص متناظر با آن راس است .

از طرفی در هر گراف ساده حداقل دو راس هم درجه وجود دارد ، یعنی حداقل دو دانش آموز وجود دارد که تعداد دوستان آنها با هم برابر است .

تمرین

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($۱\le n \le ۹۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند را با B نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A|=\left[\frac{۹۰}{۲}\right]=۴۵ \qquad |B|=\left[\frac{۹۰}{۳}\right]=۳۰ \qquad |A\cap B|=\left[\frac{۹۰}{۶}\right]=۱۵$$

$$\Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۴۵+۳۰-۱۵=۶۰$$

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($۱\le n \le ۲۰۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند را با B نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A|=\left[\frac{۲۰۰}{۴}\right]=۵۰ \quad \text{و} \quad |A\cap B|=\left[\frac{۲۰۰}{۲۸}\right]=۷ \Rightarrow |A\cap B'|=|A-B|=|A|-|A\cap B|=۵۰-۷=۴۳$$

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ‌یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند مشخص کنید :

الف) چند نفر هر سه رشتهٔ ورزشی را بازی می‌کنند؟

$$|F|=۱۵ \text{ و } |V|=۱۱ \text{ و } |B|=۹ \text{ و } |F\cap V|=۵ \text{ و } |V\cap B|=۶ \text{ و } |F\cap B|=۳ \text{ و } |F\cup V\cup B|=۳۴-۱۰=۲۴$$

$$\xrightarrow{|F\cup V\cup B|=|F|+|V|+|B|-|F\cap V|-|V\cap B|-|B\cap F|+|F\cap V\cap B|} ۲۴=۱۵+۱۱+۹-۵-۶-۳+|F\cap V\cap B| \Rightarrow |F\cap V\cap B|=۳$$

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

$$|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap V\cap B|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$$

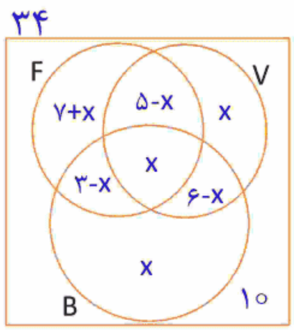
پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

$$|V-B|=|V|-|V\cap B|=۱۱-۶=۵$$

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

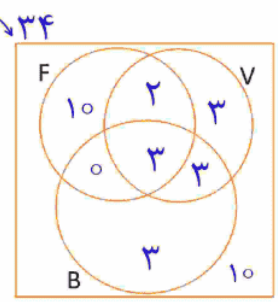
$$\left.\begin{array}{l}\text{فقط فوتبال}=|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap V\cap B|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰\\ \text{فقط والیبال}=|V|-|F\cap V|-|V\cap B|+|F\cap V\cap B|=۱۱-۵-۶+۳=۳\\ \text{فقط بسکتبال}=|B|-|B\cap F|-|V\cap B|+|F\cap V\cap B|=۹-۳-۶+۳=۳\end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۱۶$$

روش ساده تر : پیشنهاد می شود برای حل این نوع سوالات از نمودار ون به شکل زیر استفاده شود :



$$۷+x+۵-x+x+۳-x+x+۶-x+x+۱۰=۳۴ \Rightarrow x=۳$$

بنابراین می توان نمودار ون را به شکل زیر باز نویسی کرد :



الف) ۳

ب) ۱۰

پ) ۵=۳+۲

ت) ۱۶=۳+۳+۱۰

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

می خواهیم با ارقام ۹و۸و۷و۶و۵و۴و۳و۲و۱ رمز های ۵ رقمی بسازیم که شامل حداقل یک رقم ۲ و یک رقم ۳ و یک رقم ۷ باشند .

بدون در نظر گرفتن شرط وجود حداقل یک رقم اعداد گفته شده یعنی در حالت کلی $۹^۵$ رمز می توان ساخت . به عبارت دیگر : $|S|=۹^۵$.

مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۲ را با A و مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۳ را با B و مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۷ را با C نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A|=|B|=|C|=۸^۵ \quad و \quad |A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=۷^۵ \quad و \quad |A\cap B\cap C|=۶^۵$$

$$\xrightarrow{|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|} |A\cup B\cup C|=۳\times ۸^۵-۳\times ۷^۵+۶^۵$$

$$\Rightarrow |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۹^۵-(۳\times ۸^۵-۳\times ۷^۵+۶^۵)=۳۳۹۰$$

حال در صورتی که امتحان کردن هر ۵ رقمی ۶ ثانیه طول بکشد ، حداکثر ۲۰۳۴۰ = ۶×۳۳۹۰ ثانیه معادل۵ ساعت ۳۹ دقیقه وقت لازم است .

۵ چه تعداد تابع چون $f: A\to B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=۵$ و $|B|=۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

تعداد توابع مورد نظر برابر است با $۴^۵$ که هیچکدام از آنها یک به یک نیست ، زیرا تعداد اعضای دامنه ی تابع(A) بیشتر از تعداد اعضای هم دامنه ی تابع (B)است .

۶ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

روش اول : $\frac{۸!}{۳!} \xleftarrow{\times}$ ۴ (کتاب۵) ۵ (کتاب۴) ۶ (کتاب۳) ۷ (کتاب۲) ۸ (کتاب۱) : حالات انتخاب نفرات برای هر کتاب

روش دوم : تعداد حالت ها ی ممکن برابر است با تعداد توابع یک به یک از مجموعه ای ۵ عضوی به یک مجموعه ی ۸ عضوی : $(۸)_۵=\frac{۸!}{۳!}$

۷ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

تعداد این حالت ها برابر است با تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۶ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی .

با فرض $X=\{x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵,x_۶\}$ و $Y=\{y_۱,y_۲,y_۳\}$، تعداد توابع پوشا از X به Y را محاسبه می کنیم :

مجموعه ی تمام توابع قابل ساخت از X به Y $=S \Rightarrow |S|=۳^۶$

مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها $\{y_۲,y_۳\}$ می باشد(بُرد فاقد عضو $y_۱$ است) . $=A \Rightarrow |A|=۲^۶$

مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها $\{y_۱,y_۳\}$ می باشد(بُرد فاقد عضو $y_۲$ است) . $=B \Rightarrow |B|=۲^۶$

مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها $\{y_۱,y_۲\}$ می باشد(بُرد فاقد عضو $y_۳$ است) . $=C \Rightarrow |C|=۲^۶$

$$\Rightarrow |A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=۱ \quad و \quad |A\cap B\cap C|=۰$$

$$\xrightarrow{|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|} |A\cup B\cup C|=۳\times ۲^۶-۳\times ۱+۰$$

$$\Rightarrow |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۳^۶-(۳\times ۲^۶-۳\times ۱+۰)=۵۴۰$$

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

در صورتی که هر نفر را به عنوان یک کبوتر و هر روز را یک لانه در نظر بگیریم ، می خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ یا ۳۶۶ لانه (هر سال ۳۶۵ روز است به استثناء سالهای کبیسه که ۳۶۶ روز می باشند) جای دهیم .

لذا طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو لانه وجود دارد که حداقل دو کبوتر درون آن قرار خواهد گرفت ، به عبارت دیگر حداقل ۲ نفر هستند که در یک روز سال متولد شده اند .

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

منظور از یکسان بودن روزِهفته و ماه تولد آن است که ایام طبق اعضای مجموعه ی زیر در نظر گرفته شده اند :

{(اسفندوجمعه) و... و (اردیبهشت و شنبه) و (فروردین و جمعه) و (فروردین و پنجشنبه) و (فروردین و چهارشنبه) و (فروردین و سه شنبه) و (فروردین و دوشنبه) و (فروردین و یکشنبه) و (فروردین و شنبه)}

که هر عضو به عنوان یک لانه محسوب شده و درنتیجه $۷\times۱۲=۸۴$ لانه داریم .

حال در صورتی که هر دانش آموز را به عنوان یک کبوتر ، در نظر بگیریم ، ۵۰۵ کبوتر داریم . بنابراین :

$۵۰۵=k\times۸۴+۱\Rightarrow k=۶\Rightarrow k+۱=۷\Rightarrow$ حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است .

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (برای سهولت در حل مسئله ، سال را غیر کبیسه در نظر می گیریم .)

$$\left.\begin{array}{l} k+۱=۲۰\Rightarrow k=۱۹ \\ n=۳۶۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{n.k+۱}$$

$n=۳۶۵$: تعداد لانه ها همان تعداد ایام سال است .

حداقل $۶۹۳۶=۱+۱۹\times۳۶۵$ نفر تماشا گر مسابقه کشتی هستند .

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

می دانیم باقیمانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲ ، برابر۰ یا ۱ می باشد .

اگر سه عدد طبیعی را به عنوان کبوتر ها و باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی بر ۲ (یعنی۰ و۱) را به عنوان ۲ لانه در نظر بگیریم ، طبق اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای خواهند گرفت ، یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین اعداد انتخابی، باقیمانده یکسان در تقسیم بر ۲ دارند .

حال این دو عدد که باقیمانده یکسان دارند ، هر دو فرد یا هر دو زوج خواهند بود ، که در هر صورت مجموعشان عددی زوج است .

۱۲ مجموعهٔ اعداد $A=\{۱,۲,\ldots,۸۴\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

اعداد مجموعه ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افراز می کنیم :

$$\{۱,۸۴\} \text{ و } \{۲,۸۳\} \text{ و } \{۳,۸۲\} \text{ و } \ldots \text{ و } \{۴۲,۴۳\}$$

قفس ها را به عنوان لانه ها و اعداد درون آنها را کبوتر در نظر می گیریم ، به طوری که می خواهیم از این لانه ها ۴۳ کبوتر به عنوان یک زیر مجموعه ی ۴۳ عضوی انتخاب کنیم .

طبق اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد ، یعنی حداقل دو عدد در زیر مجموعه وجود دارند که مجموع آن ها ۸۵ است .

۱۳ مجموعهٔ اعداد $A=\{۱, ۵, ۹, ۱۳, \dots, ۷۷, ۸۱, ۸۵\}$ را که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

مجموعه A را به ۱۲ زیر مجموعه به شکل زیر افراز می کنیم :

$A_۱=\{۵,۸۵\}$ $A_۲=\{۹,۸۱\}$ $A_۳=\{۱۳,۷۷\}$ $A_۴=\{۱۷,۷۳\}$ $A_۵=\{۲۱,۶۹\}$ $A_۶=\{۲۵,۶۵\}$

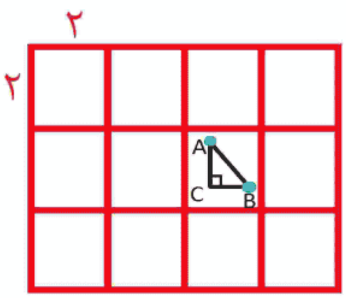
$A_۷=\{۲۹,۶۱\}$ $A_۸=\{۳۳,۵۷\}$ $A_۹=\{۳۷,۵۳\}$ $A_{۱۰}=\{۴۱,۴۹\}$ $A_{۱۱}=\{۴۵\}$ $A_{۱۲}=\{۱\}$

همانطور که مشاهده می شود ، مجموع اعداد درون زیر مجموعه های دو عضوی برابر ۹۰ است .

زیر مجموعه های فوق را به عنوان ۱۲ لانه در نظر می گیریم که می خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل از یکی از لانه ۲ کبوتر انتخاب خواهد شد ، یعنی حداقل دو عدد انتخاب شده از یک زیر مجموعه هستند .

واضح است که مجموع آن دو برابر ۹۰ است .

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.



مطابق شکل ، مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر کدام از آنها را به عنوان یک لانه در نظر می گیریم.

در صورتی که هر نقطه را به عنوان یک کبوتر فرض کنیم ، می خواهیم ۱۳ کبوتر را در ۱۲ لانه جای دهیم . طبق اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند ، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B در یک مربع واقع خواهند شد .

حال طبق قضیه فیثاغورث :

$$AB^۲=AC^۲+BC^۲ \xrightarrow[BC<۲]{AC<۲} AB^۲<۲^۲+۲^۲ \Rightarrow AB^۲<۸ \Rightarrow AB<\sqrt{۸}$$

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری‌که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

پنج نقطه با مختصات های صحیح را به عنوان ۵ کبوتر معرفی می کنیم .

برای هر نقطه با مختصات صحیح یکی از چهار حالت $\begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{فرد} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{فرد} \end{bmatrix}$ وجود دارد ، که اگر به عنوان چهار لانه در نظر گرفته شوند ،

طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند یعنی ، حداقل دو نقطه از آن نقاط از نظر زوج یا فرد بودن مختصات،شبیه هم خواهند بود .

پس مجموع طول های آنها زوج و مجموع عرض های آنها نیز زوج است ، در نتیجه مختصات نقطه ی وسط صحیح خواهد شد .