درس اوّل

ماتریس[1] و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به‌صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است :

	برد	باخت	مساوی	امتیاز
تیم A	۹	۳	۳	۳۰
تیم B	۷	۴	۴	۲۵
تیم C	۶	۳	۶	۲۴
تیم D	۶	۵	۴	۲۲

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف M نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$M=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc}\text{برد} & \text{باخت} & \text{مساوی} & \text{امتیاز}\end{array} \\
\begin{array}{c}A\\B\\C\\D\end{array} & \begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۳ & ۳۰ \\ ۷ & ۴ & ۴ & ۲۵ \\ ۶ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ ۶ & ۵ & ۴ & ۲۲ \end{bmatrix}
\end{array}$$

تعریف: **هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم.**

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A ، B و C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال : ماتریس A ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای ۱۲=۴×۳ درایه است و مثلاً عدد حقیقی $\sqrt{۲}$ درایهٔ روی سطر اول و ستون چهارم است و درایهٔ (۷−) روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \sqrt{۲} \\ ۵ & ۳ & -۷ & ۱ \\ -۳ & ۲۰ & \pi & ۱۴ \end{bmatrix}$$

در حالت کلّی اگر ماتریسی چون A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم (A ماتریسی از مرتبه $m\times n$ (m در n) است.) برای هر درایهٔ ماتریس و

1- Matrix

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون (۱۸۶۵–۱۸۰۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمهٔ اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل وایراشتراوس (۱۸۹۷–۱۸۱۵) و دیگران در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستونِ آن درایه را مشخص می‌کند، a_{ij} یعنی درایهٔ روی سطر iام و ستون jام.

ماتریس $A_{2\times 3}$ و ماتریس $B_{m\times n}$ با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند :

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

درایهٔ b_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس B می‌نامیم که $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ تغییر می‌کنند. همهٔ درایه‌های ماتریس B را می‌توان توسط درایهٔ عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم $B=[b_{ij}]$.[1]

مثال : اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ ماتریسی 2×2 باشد و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-2$ در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

حل : $a_{11}=a_{22}=7$ و $a_{21}=5$ و $a_{12}=-2$ پس $A=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

کار در کلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A، B، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس 4×3 و یک بار با ماتریسی 3×4 نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

۱ــ اگر $m=n=1$ در این صورت ماتریس $[K]_{1\times 1}$ را مساوی با عدد حقیقی K تعریف می‌کنیم.

معرفی چند ماتریس خاص

۱ــ اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس **مربعی** از مرتبهٔ n ($n\times n$) می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}_{۳\times۳} \text{ و } C=[۵]_{۱\times۱}=۵$$

در ماتریس‌های A و B قطرهای مشخص شده را **قطر اصلی** این دو ماتریس می‌نامیم و اگر $i=j$ در این صورت درایهٔ a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

۲ــ اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس **سطری** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند :

$$A=[۱ \ \ ۲]_{۱\times۲} \quad , \quad B=[۲ \ \ -۱ \ \ ۴ \ \ ۵]_{۱\times۴} \quad , \quad C=[۷]_{۱\times۱}=۷$$

۳ــ اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس **ستونی** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ \\ \pi \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}_{۳\times۱} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۴\times۱} \text{ و } C=[۱۱۴]_{۱\times۱}=۱۱۴$$

۴ــ ماتریس **قطری**، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.) ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵ــ اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس **اسکالر** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \text{ و } C=[۲]$$

۶ـ ماتریس صفر، ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\overline{O}$ نشان می‌دهیم. ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس صفر ۲×۲ است.

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j, a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

مثال: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \\ z-۱=۵ \end{cases} \Rightarrow x=۶,\ y=۳\ ,\ z=۶ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$

جمع ماتریس‌ها

در کاردرکلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکنندهٔ لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است :

	A	B	C	D
شلوار	۲۴+۲۰	۲۶+۲۰	۱۷+۲۰	۱۲+۲۰
بلوز	۱۵+۳۰	۱۹+۳۰	۲۸+۳۰	۳۱+۳۰
پیراهن	۷+۵۰	۱۱+۵۰	۲۲+۵۰	۳۵+۵۰

اگر این جدول را با یک ماتریس ۴×۳ نمایش دهیم می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴} + \begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ \\ ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ \end{bmatrix}_{۳\times۴} = \begin{bmatrix} ۴۴ & ۴۶ & ۳۷ & ۳۲ \\ ۴۵ & ۴۹ & ۵۸ & ۶۱ \\ ۵۷ & ۶۱ & ۷۲ & ۸۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی است چون C که از همان مرتبهٔ A و B است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت :

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

کار در کلاس

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\4&5&6&-1\\7&8&9&-1\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-1&-2&-3&1\\1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1+(-1)&2+(-2)&3+(-3)&(-1)+1\\4+1&5+2&6+3&(-1)+4\\7+5&8+6&9+7&(-1)+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\5&7&9&3\\12&14&16&7\end{bmatrix}$$

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-1&2\\3&4\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$

ب) $A=[1\ \ -1\ \ 3\ \ 7]\ ,\ B=[3\ \ 2\ \ -1\ \ 4]\Rightarrow A+B=[4\ \ 1\ \ 2\ \ 11]$

پ) $A=\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\\sqrt{2}&5&-1&4\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}0&1&4&-7\\1&2&3&-9\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\begin{bmatrix}2&-2&-1&9\\\sqrt{2}-1&3&-4&13\end{bmatrix}$

ت) $A=[5]\ ,\ B=[-7]\Rightarrow A+B=[2]$

ث) دو ماتریس 3×3 و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

تعریف: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$B=\begin{bmatrix}24\times2&26\times2&17\times2&12\times2\\15\times2&19\times2&28\times2&31\times2\\7\times2&11\times2&22\times2&35\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24+24&26+26&17+17&12+12\\15+15&19+19&28+28&31+31\\7+7&11+11&22+22&35+35\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24&26&17&12\\15&19&28&31\\7&11&22&35\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}24&26&17&12\\15&19&28&31\\7&11&22&35\end{bmatrix}=A+A=2A$$

کار در کلاس

۱ــ در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $-1\times\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-4&-5&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\-4&-5&-6\\+4&+5&+6\end{bmatrix}$

ب) $\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}4&6&8&1\\0&3&5&7\\\sqrt{2}&-1&2&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4&\frac{1}{2}\\0&\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{1}{2}&1&4\end{bmatrix}$

پ) $0\times\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-3&-4\\5&6&7\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

ت) $7\times\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

۲ــ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$\begin{bmatrix}2&4&6\\8&4&2\\10&3&1\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}1&2&3\\4&2&1\\5&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&-2\\3&1&4\\2&5&0\end{bmatrix}=(-1)\times\begin{bmatrix}-1&+1&+2\\-3&-1&-4\\-2&-5&0\end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد قرینهٔ ماتریس A را با $(-A)$ نمایش داده و از ضرب (-1) در ماتریس A به‌دست می‌آید. واضح است که $A+(-A)=\overline{O}$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A، B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند :

الف) $A+B=B+A$ خاصیت جابه‌جایی

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$ خاصیت شرکت‌پذیری

پ) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس‌ها

ت) $A+(-A)=(-A)+A=O$ خاصیت عضو قرینه

ث) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ج) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

چ) $rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

ح) $A=B \Rightarrow rA=rB$

مثال : فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

در این صورت نشان می‌دهیم که $(-۲)(A+B)=(-۲)A+(-۲)B$.

$$-۲(A+B)=(-۲)\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\right)$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱+(-۲) & ۲+۱ & ۳+۴ \\ (-۱)+۳ & ۳+۲ & (-۵)+۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)(۱+(-۲)) & (-۲)(۲+۱) & (-۲)(۳+۴) \\ (-۲)((-۱)+۳) & (-۲)(۳+۲) & (-۲)((-۵)+۰) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)\times۱+(-۲)\times(-۲) & -۲\times۲+(-۲)\times۱ & -۲\times۳+(-۲)\times۴ \\ (-۲)\times(-۱)+(-۲)\times۳ & -۲\times۳+(-۲)\times۲ & (-۲)\times(-۵)+(-۲)\times۰ \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{در } \mathbb{R}}{\overset{\text{توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع}}{=\!=\!=}}\begin{bmatrix} -۲\times۱ & -۲\times۲ & -۲\times۳ \\ (-۲)\times(-۱) & -۲\times۳ & (-۲)\times(-۵) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} (-۲)\times(-۲) & -۲\times۱ & -۲\times۴ \\ -۲\times۳ & -۲\times۲ & -۲\times۰ \end{bmatrix}$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+(-۲)\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=(-۲)A+(-۲)B$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت برای $r\in\mathbb{R}$ داریم :

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]=\left[r(a_{ij}\pm b_{ij})\right]$$

$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]$ توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در $\mathbb{R}$

$=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]$ تعریف جمع (تفاضل)

$=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]$ تعریف ضریب عدد در ماتریس

$=rA\pm rB$

کار در کلاس

۱ــ برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=۳$ و $s=-۲$ برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

$$(r+s)A=(\cancel{-۲+۳})\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$$

$$rA+sA=-۲\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ +۲ & -۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳ & ۶\\ -۳ & ۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$$

$$(r+s)A=rA+sA$$

۲ــ درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

$$rA\pm sA=r[a_{ij}]_{m\times n}\pm s[a_{ij}]_{m\times n}$$
$$=[ra_{ij}]_{m\times n}\pm[sa_{ij}]_{m\times n}$$
$$=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]_{m\times n}$$
$$=[(r\pm s)a_{ij}]_{m\times n}$$
$$=(r\pm s)[a_{ij}]_{m\times n}=(r\pm s)A$$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند در این صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایهٔ ماتریس A را در درایهٔ نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

مثال : اگر $A=[-۱\ \ ۲\ \ ۰\ \ ۳\ \ -۵]$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\\ ۷\\ -۱\\ -۲\end{bmatrix}$ در این صورت داریم :

$$A\times B=[-۱\ \ ۲\ \ ۰\ \ ۳\ \ -۵]\times\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\\ ۷\\ -۱\\ -۲\end{bmatrix}$$

$$=[(-۱)\times(-۲)+۲\times۳+۰\times۷+۳\times(-۱)+(-۵)\times(-۲)]$$
$$=[۲+۶+۰+(-۳)+۱۰]=[۱۵]=۱۵$$

کار در کلاس

یک ماتریس سطری ۳ × ۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱ × ۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۷$.

$$A=[۰\ \ ۰\ \ ۱],B=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ -۷\end{bmatrix}\Rightarrow[۰\ \ ۰\ \ ۱]\times\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ -۷\end{bmatrix}=[۰\times۰+۰\times۰+۱\times(-۷)]=[-۷]=-۷$$

ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد) در این صورت $A_{mp}\times B_{pn}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{mp}\times B_{pn}=C_{mn}=[c_{ij}]$، ماتریس C ماتریسی $m\times n$ بوده که درایهٔ روی سطر iاٌم و ستون jاٌم در آن یعنی، C_{ij} از ضرب سطر iاٌم A در ستون jاٌم B به‌دست می‌آید، یعنی

$c_{ij} = A$ سطر i ام $\times$ B ستون j ام

$$\Rightarrow C_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i۱} \times b_{۱j} + a_{i۲} \times b_{۲j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj}$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$

اگر فرض کنیم، $A_{۳\times۳} \times B_{۳\times۲} = C = [c_{ij}]_{۳\times۲}$ در این صورت ماتریس حاصل ضرب یعنی C ماتریسی ۲×۳ بوده و داریم :

$$c_{۱۲} = A \text{ سطر اول} \times B \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۱\times۳ + ۲\times۲ + (-۱)\times۵ = \cdots$$

$$c_{۳۲} = A \text{ سطر سوم} \times B \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = (-۳) + (-۴) + ۲۰ = \cdots$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & -۲ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-۲-۴ & ۳+۴-۵ \\ ۶-۲+۴ & ۹+۴+۵ \\ -۲+۲+۱۶ & -۳-۴+۲۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۸ & ۱۸ \\ ۱۶ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

آیا ضرب $(B \times A)$ امکان‌پذیر است؟ چرا؟ خیر ، زیرا تعداد ستون های B با تعداد سطرهای A مساوی نیست

کار در کلاس

۱ــ برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$, $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & ۶ & -۲ & +۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۸ & ۵ & ۲ & -۵ \end{bmatrix}$$

ب) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$, $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \Rightarrow A\times B = \cdots , B\times A = \cdots$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۴ \\ ۷ & -۲ & ۷ \\ ۰ & -۳ & -۷ \end{bmatrix}, B \times A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۱۸ & -۱۳ \end{bmatrix}$$

پ) $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$, $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}_{۱\times۳} \Rightarrow A\times B = \cdots$, $B \times A = \cdots$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix}, B \times A = \begin{bmatrix} ۷ \end{bmatrix} = ۷$$

ت) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ $A \times B = \begin{bmatrix} ۰ & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر $a\times b=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$» مقایسه کنید.

اگر A و B دو ماتریس باشند که $A\times B=\overline{O}$ لزوماً نمی توان نتیجه گرفت $A=\overline{O}$ یا $B=\overline{O}$

۲ــ اگر A ماتریسی ۳×۵ باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبهٔ آن را بیابید:

الف) $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$ ب) $B=[b_{ij}]_{۲\times۵}$ پ) $B=[b_{ij}]_{۵\times۳}$

ت) $B=[b_{ij}]_{۵\times۴}$ ث) $B=[b_{ij}]_{۵\times۵}$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

کاردرکلاس

۱ــ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۴ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه

در حالت کلّی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ..... ندارد

۲ــ ماتریس اسکالر $I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ماتریس اسکالر روبه‌رو که آن را ماتریس واحد یا همانیِ مرتبهٔ n می‌نامیم، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعیِ مرتبهٔ n است یعنی:

$$A_{n\times n}\times I_n=I_n\times A_{n\times n}=A_{n\times n}$$

$$I_n=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و $C=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ در این صورت درستی تساوی $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ را بررسی کنید.

گروه ریاضی استان خوزستان

پاسخ سوال ۱ کاردرکلاس

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +۱ & -۴ \\ ۴ & +۴ \end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +۳ & -۱۴ \\ +۱ & +۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times B\neq B\times A$$

پاسخ سوال ۲ کاردرکلاس

$$A\times I=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$I\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times I=I\times A=A$$

پاسخ سوال ۳ کاردرکلاس

$$A\times\left(B+C\right)=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A\times B+A\times C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ -۲ & -۳ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times\left(B+C\right)=A\times B+A\times C$$

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ در این صورت ضرب ماتریس A در مجموع $(B+C)$ خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی دارد یعنی :

$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

۴ـ با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید :

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times h}$ و $C=[c_{ij}]_{h\times n}$ در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت‌پذیری دارد یعنی :

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

پاسخ سوال ۴ کاردرکلاس

$$A\times(B\times C)=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\2&-1\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\2&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&2\\1&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&20\\-3&-2\\5&-5\end{bmatrix}$$

$$(A\times B)\times C=\left(\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\2&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&5\\-1&1\\0&-5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&20\\-3&-2\\5&-5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

تمرین

۱ـ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۴×۳ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۳ـ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq \overline{O}$ و $B\neq \overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$.

۴ـ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۵ـ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^۲=AA$ و $A^۳=AA^۲$ و ... و $A^n=AA^{n-۱}$ $(n\in\mathbb{N}\ \ n>۱)$ در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^۲$ و $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید.

پاسخ سوال ۱

$$A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 4}=\begin{cases}7 & i=j\\ i+j & i>j\\ i^2 & i<j\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}7&1&1&1\\3&7&4&4\\4&5&7&9\end{bmatrix}$$

پاسخ سوال ۲

$$\begin{cases}2x-\cancel{y}=3\\ 2x+\cancel{y}=5\end{cases}$$
$$\overline{4x=8}\Rightarrow x=2\ ,y=1\ ,z=-2$$
$$\Rightarrow x+y+z=2+1-2=1$$

پاسخ سوال ۳

$$A=\begin{bmatrix}2&3&0\\4&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}\neq\overline{O},B=\begin{bmatrix}0&3&-6\\0&-2&4\\2&4&5\end{bmatrix}\neq\overline{O}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\overline{O}$$

پاسخ سوال ۴

مثال نقض اول :

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1&2\\2&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}-3&8\\3&-2\end{bmatrix}\Rightarrow AB=AC=\begin{bmatrix}3&4\\6&8\end{bmatrix}\ ;B\neq C$$

مثال نقض دوم

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&0&-1\\1&-2&-3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}2&1&2\\-1&-1&-1\\2&3&1\end{bmatrix}\Rightarrow AB=AC=\begin{bmatrix}2&2&1\\0&-2&1\\-2&-6&1\end{bmatrix};B\neq C$$

پاسخ سوال ۵

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^3=AA^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\ldots\begin{cases}A=A^3=A^5=A^7=\ldots=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\\ A^2=A^4=A^6=\ldots=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\end{cases}$$

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

۷ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

۸ــ اگر $A=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹ــ اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

۱۰ــ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

۱۱ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل $A^۳$ را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ سوال ۶

$$A\times B=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3a & -8+2a\\ b-3 & -2b+2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-8+2a=0\Rightarrow a=4\\ b-3=0\Rightarrow b=3\end{cases}$$

پاسخ سوال ۷

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\\ 8 & 16 & 3\\ 6 & 7 & 1\end{bmatrix},\ B\times A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 7 & 18\end{bmatrix}$$

پاسخ سوال ۸

$$A=\begin{bmatrix}r_1 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0\\ 0 & 0 & r_3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}r_1a_{11} & r_1a_{12} & r_1a_{13}\\ r_2a_{21} & r_2a_{22} & r_2a_{23}\\ r_3a_{31} & r_3a_{32} & r_3a_{33}\end{bmatrix}$$

نتیجه : اگر A ماتریسی قطری و B یک ماتریس مربعی هم مرتبه با A باشد. برای محاسبه $A\times B$ کافی است درایه های قطر اصلی A را در درایه های سطرهای نظیر آنها در ماتریس B ضرب کنیم.

پاسخ سوال ۹ اگر $B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{bmatrix}$ آنگاه :

$$A\times B=\begin{bmatrix}ra_{11} & ra_{12} & ra_{13}\\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23}\\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33}\end{bmatrix}=rB,\ B\times A=\begin{bmatrix}ra_{11} & ra_{12} & ra_{13}\\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23}\\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33}\end{bmatrix}=rB\Rightarrow A\times B=B\times A=rB$$

پاسخ سوال ۱۰ الف:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B=A^2+BA+AB+B^2=A^2+AB+AB+B^2=A^2+2AB+B^2$$

ب : $(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B=A^2+BA-AB-B^2=A^2+AB-AB-B^2=A^2-B^2$

پاسخ سوال ۱۱

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & 27 & 0\\ 0 & 0 & 64\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}\xrightarrow{k\in\mathbb{N}}A^k=\begin{bmatrix}{a_{11}}^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & {a_{22}}^k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & {a_{nn}}^k\end{bmatrix}_{n\times n}$$