درس دوم

وارون ماتریس و دترمینان[1]

وارون ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند a ($a\neq 0$) را با $\frac{1}{a}$ نشان می‌دهیم و همواره $a\times\frac{1}{a}=1$ (عدد یک عضو خنثی برای عمل ضرب است)

برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به‌طوری‌که $A\times B=B\times A=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

از وارون ماتریس‌ها در حل دستگاه‌های معادلات استفاده خواهد شد.

مسئله : نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & -7\end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ است.

کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم $AB=BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس 2×2 مانند $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ (در صورت وجود) باید ماتریسی چون $B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ بیابیم طوری که $A\times B=B\times A=I$ یا $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ که این تساوی x، y، z و t را بر حسب a، b، c و d نتیجه

1- Determinant

می‌دهد و ماتریس B یا A^{-1} به صورت $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$ به دست می‌آید

که با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس می‌توان نوشت:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

عدد $(ad-bc)$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم و با نماد $|A|$ (می‌خوانیم، دترمینانِ A) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت:

نتیجه

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

تذکر: با توجه به قاعدهٔ محاسبهٔ A^{-1} واضح است که اگر $|A|=0$ آنگاه A^{-1} وجود ندارد. (A وارون‌پذیر نیست.) به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه A^{-1} وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) آن است که $|A|\neq 0$.

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}10 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

چون $|A|=2\neq 0$ پس A دارای وارون است (وارون‌پذیر است) و داریم

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}1 & -2\\ -4 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

پاسخ به‌دست آمده را امتحان کنید.

حل دستگاه معادلات (دومعادله و دومجهولی) با استفاده از ماتریس وارون

یکی از کاربردهای ماتریس و ماتریس وارون در حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول می‌پردازیم.

آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

خیر، زیرا

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\neq I$$

اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ مفروض باشد ماتریس $(A^{-1})^{-1}$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$det(A)=2\times 4-1\times 3=5\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

$$det(A^{-1})=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

$$(A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}=A\Rightarrow (A^{-1})^{-1}=A$$

قضیه یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های 2×2 محاسبه شده است) در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

اثبات: فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می‌کنیم $B=C$

طبق فرض: $AB=BA=I$

طبق فرض: $AC=CA=I$

$B=IB=(CA)B=C(AB)$

$=CI=C$

فعالیت

دستگاه $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 7x+4y=15 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به‌صورت یک تساوی ماتریسی نوشت :

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ 7x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم :

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ 7x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهول مفروض است.

۱ــ حال اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ (A را ماتریس ضرایب می‌نامیم) در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون‌پذیر است) و درثانی A^{-1} را بیابید.

$|A| = 8 - 7 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ A وارون‌پذیر است

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

۲ــ معادلهٔ ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\text{شرکت‌پذیری} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

نتیجه

در حالت کلی اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولاتِ دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ نوشته شده و درصورتی‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد یا $|A|\neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادلهٔ فوق می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

مثال : دستگاه $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

حل : ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و چون $|A|=2\neq 0$ پس A^{-1} وجود دارد. با جابه‌جایی درایه‌های روی قطر اصلی و قرینه کردنِ درایه‌های روی قطر فرعیِ ماتریس A و تقسیم درایه‌های ماتریس حاصل بر $|A|=2$، ماتریس A^{-1} را به‌دست می‌آوریم.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{4}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تعریف تساوی ماتریس‌ها}} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

تذکر: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، پیدا کردن x و yای است که در هر دو معادلهٔ دستگاه که هرکدام معادلهٔ یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط است.

دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -4x+2y=2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟ خیر زیرا: $|A|=2\times 2-(-1)(-4)=0$

این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟ موازی اند

یادآوری

در واقع یک دستگاه دو معادله دو مجهولی از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادلهٔ یک خط هستند. لذا با دیدگاه هندسی می‌توان گفت وقتی صحبت از جواب این دستگاه می‌کنیم منظور یافتن نقطه‌ای است که روی هر دو خط واقع شده باشد. بنابراین سه حالت زیر را برای یک دستگاه می‌توان در نظر گرفت :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

نتیجه

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم در این صورت با توجه به (الف) و (ب) می‌توان گفت:

I) اگر $|A|\neq ۰$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصربه‌فرد است (دو خط متقاطع‌اند).

II) اگر $|A|=۰$ در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی‌اند) و یا اینکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط برهم منطبق هستند).

کار در کلاس

دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x-۳y=۳ \\ -۴x+۶y=۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ هریک از معادلات دستگاه معادلهٔ یک خط در صفحه است. شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲ــ ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ چرا؟

۳ــ سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $\begin{cases} x-۳y=۲ \\ -۳x+۹y=-۶ \end{cases}$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A|=۰$ برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

گروه ریاضی استان خوزستان

hamyar.in

همیار

پاسخ سوال ۱ کاردرکلاس

$$L:۲x-۳y=۳ \Leftrightarrow y=\frac{۲}{۳}x-۱ \Leftrightarrow m=\frac{۲}{۳}, h=-۱$$

$$L':-۴x+۶y=۱ \Leftrightarrow y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۶} \Leftrightarrow m'=\frac{۲}{۳}, h'=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow m=m' \ , h\neq h' \Leftrightarrow L \parallel L'$$

پس دو خط موازی اند و برهم منطبق نیستند زیرا عرض از مبداء های آنها مساوی نیست.

پاسخ سوال ۲ کاردرکلاس

$$\begin{cases} ۲x-۳y=۳ \\ -۴x+۶y=۱ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$det(A)=(۲)(۶)-(-۳)(-۴)=۰$$

پس A وارون پذیر نیست لذا این دستگاه جواب ندارد.

پاسخ سوال ۳ کاردرکلاس

$$L:x-۳y=۲ \Leftrightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳} \Leftrightarrow m=\frac{۱}{۳}, h=\frac{۲}{۳}$$

$$L':-۳x+۹y=-۶ \Leftrightarrow y=\frac{۳}{۹}x+\frac{۶}{۹} \Leftrightarrow m'=\frac{۱}{۳}, h'=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow m=m', h=h' \Rightarrow L \parallel L'$$

پس دو خط موازی اند و برهم منطبق اند زیرا عرض از مبداء های آنها مساوی است

$$\begin{cases} x-۳y=۲ \\ -۳x+۹y=-۶ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

$$det(A)=(۱)(۹)-(-۳)(-۳)=۰$$

پس A وارون پذیر نیست لذا این دستگاه بی شمار جواب دارد.

نتیجه : اگر $det(A)=۰$ و عرض از مبداهای دو معادله مساوی باشند ، دستگاه دو معادله دو مجهولی بی شمار جواب دارد و اگر $det(A)\neq ۰$ و عرض از مبداهای دو معادله مساوی نباشند ، دستگاه دو معادله دو مجهولی هیچ جوابی ندارد

دترمینان و کاربردهای آن

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه : وارون‌پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود. همان‌طور که ملاحظه شد، در حل دستگاه‌ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می‌شود. دترمینان در هندسه برای محاسبهٔ مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به‌کار می‌رود. به کمک دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ می‌توان حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار را به‌دست آورد و نیز در محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمی‌گردیم مشاهده می‌کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می‌شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی‌ها و پژوهش‌های «گابریل کرامر» ریاضی‌دان سوئیسی (۱۷۵۲-۱۷۰۴) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه‌های معادلات خطی پدید می‌آید.

تعریف: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد $(1 \le n \le 3)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

(ما در این کتاب دترمینان را برای ماتریس‌های حداکثر از مرتبهٔ ۳ تعریف می‌کنیم.)

$$\text{I) } A=[k]_{1\times 1} \Rightarrow |A|=k \qquad \text{II) } A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$\text{III) } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

برحسب سطر اول $|A|=a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که همواره حاصل، عددی حقیقی و منحصربه‌فرد است.)

در واقع دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ را می‌توان تابعی در نظر گرفت که دامنهٔ آن مجموعهٔ ماتریس‌های ۲ × ۲ و هم‌دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

$\det : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$

$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=ad-bc$

(منظور از $M_{2\times 2}$ مجموعهٔ ماتریس‌های ۲ × ۲ است).

مثال : دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $A=[-7]\rightarrow|A|=-7$

ب) $A=\left[\sqrt{2}\right]\rightarrow|A|=\sqrt{2}$

پ) $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}\rightarrow|A|=[(4\times 4)-(2\times 8)]=0$

hamyar.in
همیار

ت) $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}\rightarrow |A|=(-۱۰)-(۱۲)=-۲۲$

ث) $A=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}\rightarrow |A|=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

مثال : دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را برحسب یک سطر و یک ستون دلخواه به‌دست آورید :

الف) $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۳\\ -۲ & ۴ & ۰\end{bmatrix}$

برحسب سطر اول

$|A|=۱\times\begin{vmatrix}۱ & ۳\\ ۴ & ۰\end{vmatrix}-(-۱)\times\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ -۲ & ۰\end{vmatrix}+۲\times\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ -۲ & ۴\end{vmatrix}$

$=۱\times(۰-۱۲)+(۰+۶)+۲\times(۸+۲)=(-۱۲)+۶+۲۰=۱۴$

برحسب ستون سوم

$|A|=۲\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ -۲ & ۴\end{vmatrix}+۳\times(-۱)^{۲+۳}\times\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ -۲ & ۴\end{vmatrix}+۰\times(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}$

$=۲\times(۸+۲)-۳\times(۴-۲)+۰=۲۰-۶=۱۴$

تذکر: همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، درایه یا درایه‌های صفر هستند دترمینان آن ماتریس برحسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

ب) $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۴\\ -۳ & ۴ & ۱\end{bmatrix}$

برحسب سطر دوم

$|A|=۰+۰+۴\times(-۱)^{۲+۳}\times\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ -۳ & ۴\end{vmatrix}=-۴\times(۸-۳)=-۲۰$

برحسب ستون اول

$|A|=۲\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}۰ & ۴\\ ۴ & ۱\end{vmatrix}-۰+(-۳)\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ ۰ & ۴\end{vmatrix}$

$=۲\times(۰-۱۶)-۳\times(-۴-۰)=-۳۲+۱۲=-۲۰$

(درایهٔ (۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و درایهٔ (۳-) روی سطر سوم و ستون اول واقع است.)

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}۴ & ۲\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}۱ & ۵\\ ۲ & ۱۱\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & ۵\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}(۲)(۲)-(۱)(۳) & (۴)(۱)-(-۱)(۲)\\ -((۱)(۱۱)-(۵)(۲)) & (۲)(۵)-(۱)(-۳)\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & ۶\\ -۱ & ۱۳\end{bmatrix}$

$\Rightarrow det(A)=(۱)(۱۳)-(-۱)(۶)=۱۹$

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در این روش (فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است). دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right|$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

مثال : دترمینان ماتریس A را برحسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به‌دست آورید (کدام روش راحت‌تر است؟).

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

برحسب سطر سوم

$$|A| = (-۱)\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} + (-۲)\times(-۱)^{۳+۲}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} + ۱\times(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -۱\times(۹-۸)+۲(۶-۴)+۱\times(۴-۳) = -۱+۴+۱ = ۴$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۳ & ۴ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ & ۱ & -۱ & -۲ \end{array}\right|$$

با دستور ساروس $|A| = (۴-۹-۸)-(-۸-۱۲+۴) = -۱۳+۱۷ = ۴$

کاردرکلاس

۱ــ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورده و برقراری تساوی $|AB| = |A||B|$ را بررسی کنید.

۲ــ ماتریسی ۳×۳ چون A بنویسید طوری که $|A| = -۶$، سپس ماتریس $A^۲$ را محاسبه و $|A^۲|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت اعداد حقیقی a، b، c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^۲ - ۵|A| + ۶ = ۰$ برقرار باشد.

$$|A|^۲ - ۵|A| + ۶ = ۰$$
$$\Leftrightarrow (|A|-۲)(|A|-۳) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = ۲ \Rightarrow ad - bc = ۲ \\ or \\ |A| = ۳ \Rightarrow ad - bc = ۳ \end{cases}$$

پس مسئله بی شمار جواب دارد مثلا با اختیار مقادیر

$$a = b = ۲, c = ۳, d = ۴$$
$$\Rightarrow det(A) = ۲\times۴ - ۲\times۳$$
$$= ۸ - ۶ = ۲$$

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را برحسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطرِ اصلی A، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

نتیجه

۱ــ دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با .... حاصل ضرب درایه های قطر اصلی

۲ــ دترمینان ماتریس مربعی صفر، ....صفر....... **است.**

۴ــ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و داشته باشیم $A=۴\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \circ & \circ \\ \circ & \frac{۵}{۴} & \circ \\ \circ & \circ & \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به‌دست آورید.

اگر A ماتریسی ۳ × ۳ و اسکالر باشد و $a_{۱۱}=۴$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

$$a_{۱۱}=۴ \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۴ & \circ & \circ \\ \circ & ۴ & \circ \\ \circ & \circ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = ۴\times۴\times۴ = ۶۴$$

گروه ریاضی استان خوزستان

پاسخ سوال ۱ کار درکلاس

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۲۵ & ۱۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB|=(۲)(۱۱)-(۰)(۲۵)=۲۲$$

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(۲)(۴)-(۳)(-۱)=۱۱$$

$$B=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=(۳)(۲)-(۴)(۱)=۲$$

$$|AB|=|A||B|$$

پاسخ سوال ۲ کار درکلاس

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(-۱)^{۱+۱}\times ۲\times\begin{vmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۳\end{vmatrix}+۰+۰=-۶\Rightarrow |A|^۲=(-۶)^۲=۳۶$$

$$\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۰\\ ۱۰ & ۰ & ۹\end{bmatrix}$$

$$|A^۲|=(-۱)^{۱+۱}\times ۴\times\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۹\end{vmatrix}=۳۶$$

$$\Rightarrow |A^۲|=|A|^۲$$

پاسخ سوال ۳ کار درکلاس

$$A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(-۱)^{۱+۱}\times a\times\begin{vmatrix}b & ۰\\ ۰ & c\end{vmatrix}+۰+۰=abc$$

پاسخ سوال ۴ کار درکلاس

$$A=۴\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰\\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱۰\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۲\times ۵\times ۱۰=۱۰۰$$

روش دوم :

$$A=۴\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰\\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۴^۳\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۴}\times\frac{۵}{۲}=۱۰۰$$

گروه ریاضی استان خوزستان

hamyar.in

همیار

تمرین

۱ــ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\1 & 0 & -5\end{bmatrix}$ در این صورت $|A^{2}|$ را به‌دست آورید.

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix}5|A| & |A|\\5 & 4|A|^{2}\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(-2|A|^{3}\right)$ را بیابید.

۴ــ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\a & b & c\\d & e & f\end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ ماتریسی 3×3 چون A بیابید که $|A|=3$.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 5 & -1\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(2A^{-1}-3B^{-1})$ را بیابید.

۷ــ اگر $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

۸ــ الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb\\ c & d\end{bmatrix}$ بررسی کنید.

۹ــ برای ماتریس 2×2 مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰ــ اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A|=5$ در این صورت حاصل $\big|\,|A|A\,\big|$ را بیابید.

۱۱ــ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}1\\ 10\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

۱۲ــ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases}kx+3y=4\\ x-2y=3\end{cases}$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد دارد.

۱۳ــ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف) $\begin{cases}3x-5y=-1\\ 2x+y=8\end{cases}$

ب) $\begin{cases}x+3y=5\\ -2x-6y=1\end{cases}$

پ) $\begin{cases}-2x+3y=2\\ 4x-6y=-4\end{cases}$

گروه ریاضی خوزستان

پاسخ تمرین ۱

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۳\end{bmatrix}=-۱۳\Rightarrow |A\times B|=-۱۳$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴ & +۶\\-۱ & -۲ & +۳\\۳ & ۶ & -۹\end{bmatrix}\Rightarrow |B\times A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}-۲ & -۴ & +۶ & -۲ & -۴\\-۱ & -۲ & +۳ & -۱ & -۲\\۳ & ۶ & -۹ & ۳ & ۶\end{array}\right|$$

$$\Rightarrow |B\times A|=\big((-۲)(-۲)(-۹)+(-۴)\times ۳\times ۳+۶\times(-۱)\times ۶\big)-\big(۶\times(-۲)\times ۳-۲\times ۳\times ۶+(-۴)(-۱)(-۹)\big)=-۱۰۸+۱۰۸=۰$$

پاسخ تمرین ۲

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\۰ & -۳ & ۰\\۱ & ۰ & -۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\۰ & -۳ & ۰\\۱ & ۰ & -۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\۰ & ۹ & ۰\\-۷ & ۰ & ۲۵\end{bmatrix}\Rightarrow |A^۲|=۴\times ۹\times ۲۵=۹۰۰$$

روش دوم :

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\۰ & -۳ & ۰\\۱ & ۰ & -۵\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(-۱)^{۱+۱}(-۲)\begin{vmatrix}-۳ & ۰\\۰ & -۵\end{vmatrix}=(-۲)(-۳)(-۵)=-۳۰\Rightarrow |A^۲|=(-۳۰)^۲=۹۰۰$$

پاسخ تمرین ۳

$$A=\begin{bmatrix}۵|A| & |A|\\۵ & ۴|A|^۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(۵|A|)(۴|A|^۲)-۵|A|\Rightarrow ۱۰۰|A|^۳-۶|A|=۰$$

$$\Rightarrow |A|(۲۵|A|^۲-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۰\Rightarrow \boxed{|A|^۳-۲=-۲}\\[2mm]|A|^۲=\dfrac{۳}{۲۵}\Rightarrow\begin{cases}|A|=\dfrac{\sqrt{۳}}{۵}\Rightarrow \boxed{|A|^۳-۲=\dfrac{\sqrt{۳}-۱۰}{۵}}\\[2mm]|A|=-\dfrac{\sqrt{۳}}{۵}\Rightarrow \boxed{|A|^۳-۲=\dfrac{-\sqrt{۳}-۱۰}{۵}}\end{cases}\end{cases}$$

پاسخ تمرین ۴

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\a & b & c\\d & e & f\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(-۱)^{۳+۱}d(bc-bc)+(-۱)^{۳+۲}e(ac-ac)+(-۱)^{۳+۳}f(ab-ab)=۰$$

نتیجه : اگر درایه های دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مربعی ، نظیر به نظیر مساوی باشند دترمینان آن ماتریس ، صفر است.

پاسخ تمرین ۵

کافی است یک ماتریس قطری (یا مثلثی) بیابیم که حاصل ضرب درایه های قطر اصلی آن ۳ باشد مثلا :

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\۰ & -۱ & ۰\\۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(۳)(-۱)(-۱)=۳$$

گروه ریاضی استان خوزستان

پاسخ تمرین ۶

$$A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۲۰-۶=۱۴\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۱۴} & \frac{-۳}{۱۴}\\ \frac{-۲}{۱۴} & \frac{۴}{۱۴}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=۲+۱۵=۱۷\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ -۵ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-۱}{۱۷} & \frac{۳}{۱۷}\\ \frac{-۵}{۱۷} & \frac{-۲}{۱۷}\end{bmatrix}$$

$$۲A^{-۱}-۳B^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷} & \frac{-۳}{۷}\\ \frac{-۲}{۷} & \frac{۴}{۷}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{+۳}{۱۷} & \frac{-۹}{۱۷}\\ \frac{۱۵}{۱۷} & \frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱۰۶}{۱۱۹} & -\frac{۱۱۴}{۱۱۹}\\ \frac{۷۱}{۱۱۹} & \frac{۱۱۰}{۱۱۹}\end{bmatrix}$$

پاسخ تمرین ۷

$$A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۱۰-۶=۴\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۵}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \boxed{|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}}$$

پاسخ تمرین ۸

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\begin{matrix}a & b\\ d & e\\ g & h\end{matrix}\Rightarrow |A|=(aei+bfg+cdh)-(bdi+afh+ceg)$$

$$B=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\begin{matrix}ka & kb\\ d & e\\ g & h\end{matrix}\Rightarrow |B|=(kaei+kbfg+kcdh)-(kbdi+kafh+kceg)\Rightarrow \boxed{|B|=k|A|}$$

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc\ ,B=\begin{bmatrix}ka & kb\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=kad-kbc\Rightarrow \boxed{|B|=k|A|}$$

پاسخ تمرین ۹

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc\ ,\ kA=\begin{bmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{bmatrix}\Rightarrow |kA|=(ka)(kd)-(kb)(kc)=k^{۲}ad-k^{۲}bc\Rightarrow |kA|=k^{۲}|A|$$

پاسخ تمرین ۱۰

$$|A_{۳\times۳}|=۵\Rightarrow \big||A|A\big|=|۵A|=۵^{۳}|A|=۵^{۳}\times ۵=۵^{۴}=۶۲۵$$

گروه ریاضی استان خوزستان

پاسخ تمرین ۱۱

$$\begin{cases} ۳x - ۵y = ۱ \\ ۴x + ۲y = ۱۰ \end{cases}$$

$$|A| = ۶ + ۲۰ = ۲۶ \neq ۰ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-۱} \times B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۵۲ \\ ۲۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵۲}{۲۶} \\ \frac{۲۶}{۲۶} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۱ \end{cases}$$

پاسخ تمرین ۱۲

$$\begin{cases} kx + ۳y = ۴ \\ x - ۲y = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{۱} \neq -\frac{۳}{۲} \Rightarrow k \neq -\frac{۳}{۲}$$

پاسخ تمرین ۱۳

الف : $\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۲} \neq -\frac{۵}{۱} \Rightarrow$ دستگاه فقط یک دسته جواب منحصر به فرد دارد

ب: $\begin{cases} x + ۳y = ۵ \\ -۲x - ۶y = ۱ \end{cases} \Rightarrow -\frac{۱}{۲} = -\frac{۳}{۶} \neq \frac{۵}{۱} \Rightarrow$ دستگاه هیچ جوابی ندارد

پ : $\begin{cases} -۲x + ۳y = ۲ \\ ۴x - ۶y = -۴ \end{cases} \Rightarrow -\frac{۲}{۴} = -\frac{۳}{۶} = -\frac{۲}{۴} \Rightarrow$ دستگاه بی شمار جواب دارد

گروه ریاضی خوزستان