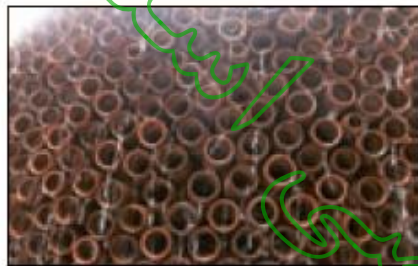


آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

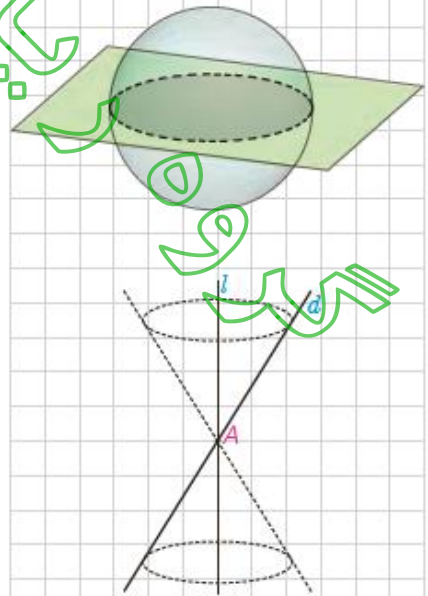
مقاطع مخروطی



در پایه دهم با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شدید. فرض کنید یک کره را (مانند شکل) توسط یک صفحه قطع کنیم (برش دهیم). منظور از فصل مشترک خط و کره مجموعه نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند. به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می تواند باشد؟

رویۀ مخروطی: فرض کنید دو خط d و l در نقطه A (مانند شکل) متقاطع (غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویۀ مخروطی (سطح مخروطی) می نامیم. در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می نامیم.

حال می خواهیم به طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا شویم. از تصاویر ارائه شده برای درک بهتر شکل حاصل کمک بگیرید.



الف) در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.
 - در چه حالتی فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها نقطه A خواهد بود؟

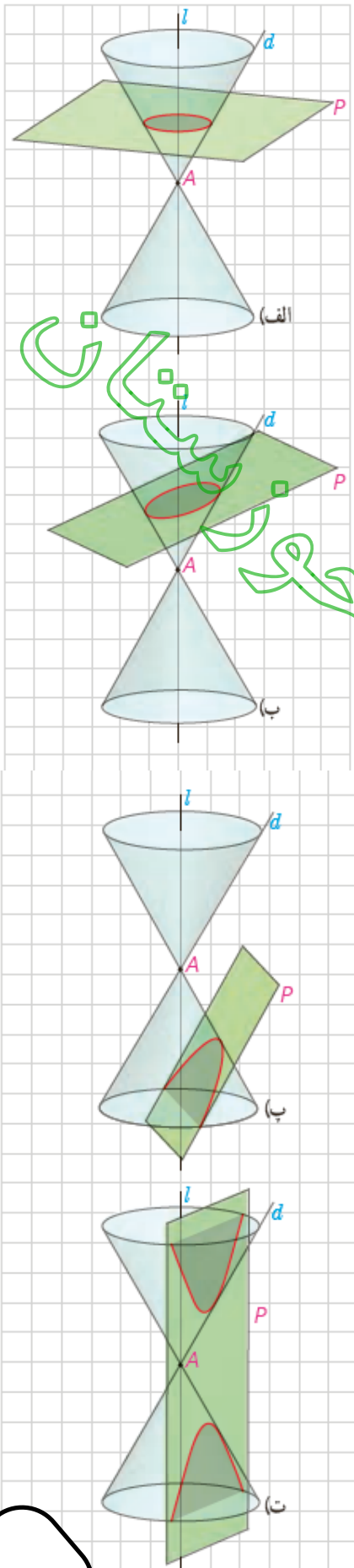
پاسخ: در حالتی که صفحه P دو خط l, d را در نقطه A قطع کند.
 فصل مشترک همان نقطه A خواهد بود.

ب) در حالتی که صفحه P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.

پ) اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است.)

ت) اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکمیل‌یابی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. در این کتاب به تعریف دقیق و بررسی خواص هذلولی نخواهیم پرداخت.

با تعریف دایره آشنایی قبلی دارید. توجه داشته باشید که بیضی، سهمی و هذلولی نیز هر کدام تعاریف دقیق و مشخص دارند، اما اینکه چرا فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی مطابق با آنچه گفته شد دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی است، قابل اثبات است ولی ما در این کتاب به این اثبات‌ها نمی‌پردازیم. حال که با دایره، بیضی، سهمی و هذلولی (مقاطع مخروطی) به صورتی آشنای شدیم، برای تعریف دقیق این اشکال، ابتدا مفهوم مکان هندسی را معرفی می‌کنیم.



مکان هندسی

طریقه رسم و ویژگی‌های عمود منصف یک پاره خط را از کتاب هندسه ۱ به خاطر دارید. دو ویژگی زیر را یادآوری می‌کنیم:

- هر نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
- هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمود منصف آن است.

اگر خط d عمود منصف پاره خط AB باشد، در این صورت

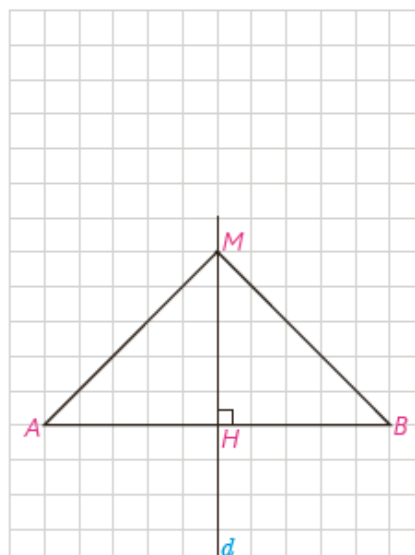
$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

به طور خلاصه، یک نقطه روی عمود منصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می‌گوئیم عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله اند.

به طور کلی مفهوم مکان هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف: مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.



۱ فعالیت

در کتاب هندسه ۱ با ویژگی‌ها و طریقه رسم نیمساز زاویه آشنا شدید. دو قضیه مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید:

- ۱- هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است.
- ۲- هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، روی نیمساز زاویه است.

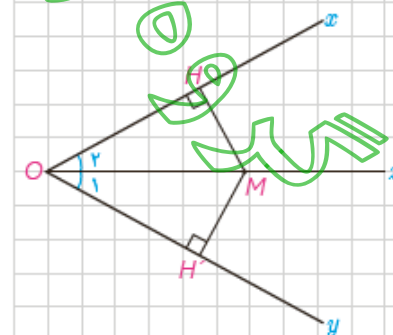
اکنون گزاره زیر را کامل کنید:

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر از دو ضلع آن به یک فاصله باشد.

$$(\hat{O}_1 = \hat{O}_2) \quad M \in Oz \Leftrightarrow MH = MH'$$

بنابراین می‌توان گفت:

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن به یک فاصله باشد.



۲ فعالیت

دایره O به مرکز O و شعاع r را در نظر بگیرید.

الف) هر نقطه دلخواه A روی دایره، از O چه فاصله‌ای دارد؟ پاسخ: r
 ب) اگر B ، یک نقطه در صفحه باشد و از O به فاصله r باشد ($OB=r$) با برهان خلف نشان دهید، B روی دایره است و از الف) و ب) نتیجه بگیرید:
 فرض کنیم B روی دایره (C) نباشد. در این صورت: $A \in C \Leftrightarrow OA=r$

الف: اگر B داخل دایره باشد. آنگاه $OB < r$ که این خلاف فرض است.

ب: اگر B خارج دایره باشد. آنگاه $OB > r$ که این نیز خلاف فرض است.

نتیجه

نقطه A روی دایره $O(O,r)$ است، اگر و فقط اگر $OA=r$.

نتیجه

دایره $O(O,r)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از نقطه O به فاصله r باشند.

۳ فعالیت

دو خط موازی d, d' را که فاصله آنها از هم ۲ سانتی متر است، در نظر بگیرید. آیا نقطه‌های دلخواه A و B روی d' ، از خط d فاصله یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر است؟ آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از d به فاصله ۲ سانتی متر باشند و روی d' نباشند؟ همه نقاطی که از d به فاصله ۲ سانتی متر واقع اند، روی چه شکلی قرار دارند؟

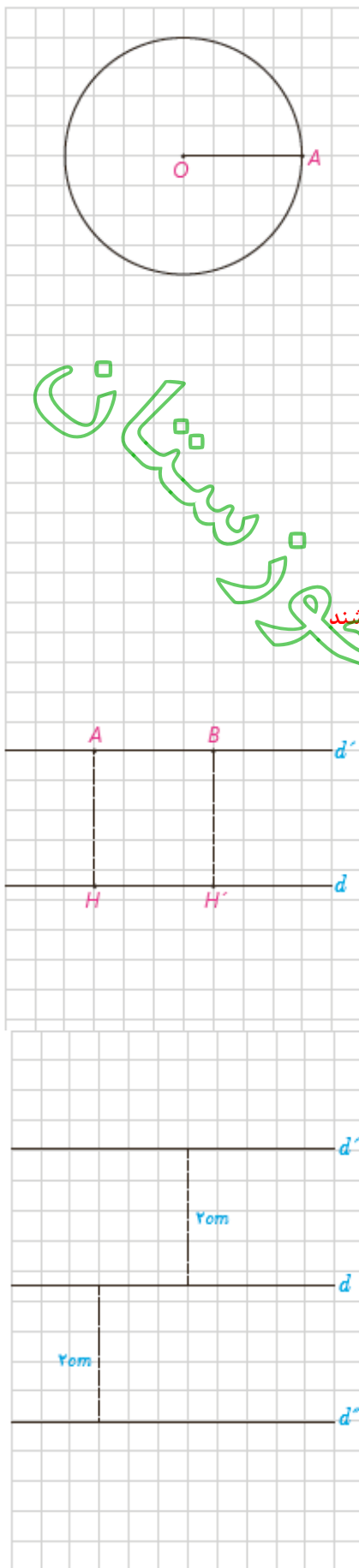
بله * * * ۲ سانتی متر * * * بله * * * دو خط موازی * * *

آیا گزاره زیر درست است؟ بله

یک نقطه در صفحه، از خط d به فاصله ۲ سانتی متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند، واقع باشد.

آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟ بله

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۲ سانتی متر هستند، دو خط راست موازی d' (در دو طرف آن) و به فاصله ۲ سانتی متر از آن می‌باشد.



■ مکان های هندسی مهم در صفحه :

– مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B در صفحه به یک فاصله اند، عمود منصف AB است.

– مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند، نیمساز آن زاویه است.

– مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت k قرار دارند، دایره ای به مرکز O و به شعاع k است.

– مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d ، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.

■ کاربرد مکان هندسی

یکی از مهم ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشد، S_1 و S_2 مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند. بنابراین برای یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای S_1 و S_2 را رسم کرده و نقطه (یا نقاط) برخورد آنها را به دست آورد.

مثال: دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد.

حل: مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d به فاصله ۳ سانتی متر از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد خط l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d' و d'' جواب مسئله است (نقاط M_1 و M_2).

بحث در وجود جواب: اگر l یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر l با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر l بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد.





۱- مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :
 الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.
 ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند.
 پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.
 ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند.

۲- نقاط A, B, C, D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

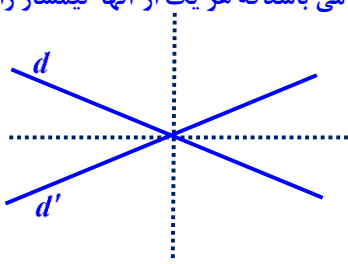
۳- نقاط A, B, C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۴- نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

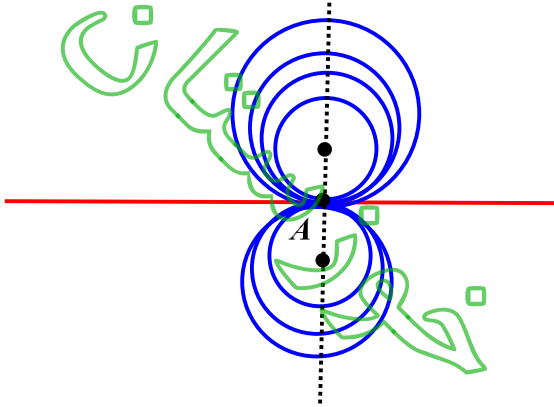
۵- هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

۶- هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه P ، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

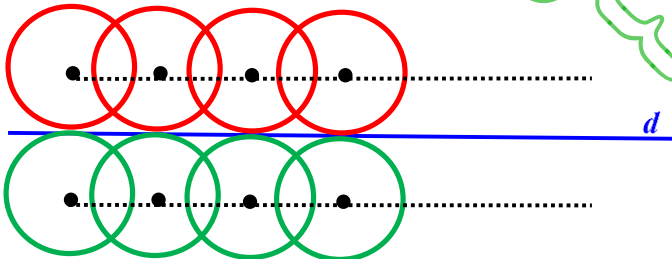
الف: مکان هندسی نقطه ای از صفحه که از دو خط متقاطع d, d' به یک فاصله است. دو خط عمود برهم می باشد که هر یک از آنها نیمساز زاویه ی بین دو خط d, d' است.



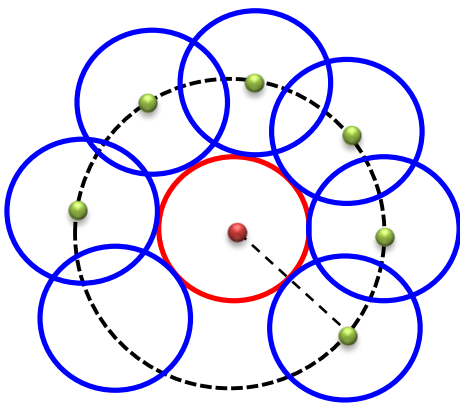
ب: مکان هندسی مرکز دایره ای که در نقطه A بر خط d مماس است. خطی است که در نقطه A بر d عمود می باشد.



پ: مکان هندسی مرکز دایره ای به شعاع r که در صفحه بر خط d مماس است. دو خط موازی با خط d می باشد که فاصله هر یک از آنها از d مساوی r است.



ت: مکان هندسی مرکز دایره ای به شعاع r که بر دایره $C(O, r)$ مماس خارج است دایره $C(O, 2r)$ می باشد.

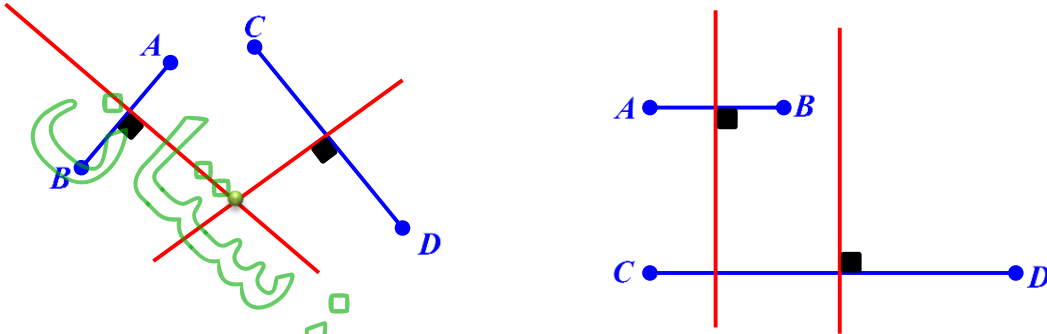


پاسخ تمرین ۲

کافی است محل تقاطع عمود منصف های دو پاره خط AB, CD را تعیین کنیم.

بحث: اگر $AB \parallel CD$ عمود منصف های این دو پاره خط، یکدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کنند و مساله در این حالت فقط یک جواب دارد.

ولی اگر $AB \parallel CD$ عمود منصف های این دو پاره خط، موازی اند و مساله در این حالت فقط هیچ جوابی ندارد.



پاسخ تمرین ۳

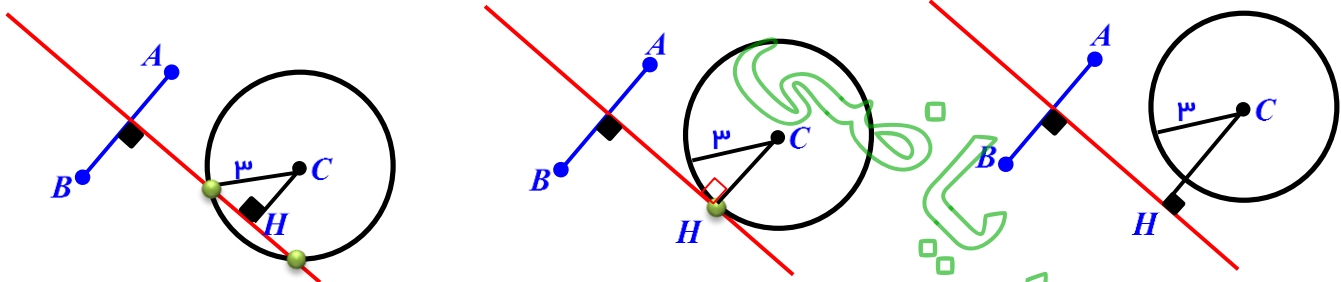
کافی است محل تقاطع عمود منصف پاره خط AB و دایره ای به مرکز C و شعاع ۳ را تعیین کنیم.

بحث: فرض کنیم d عمود منصف پاره خط AB است. اگر CH فاصله C تا خط d باشد سه حالت زیر را به تفکیک بررسی می کنیم.

الف: اگر $CH < 3$: در این حالت خط d دایره را در ۲ نقطه قطع می کند و مساله دو جواب دارد

ب: اگر $CH = 3$: در این حالت خط d بر دایره مماس و دایره را در ۱ نقطه قطع می کند لذا مساله فقط یک جواب دارد.

ج: اگر $CH > 3$: در این حالت خط d دایره را قطع نمی کند و مساله هیچ جوابی ندارد

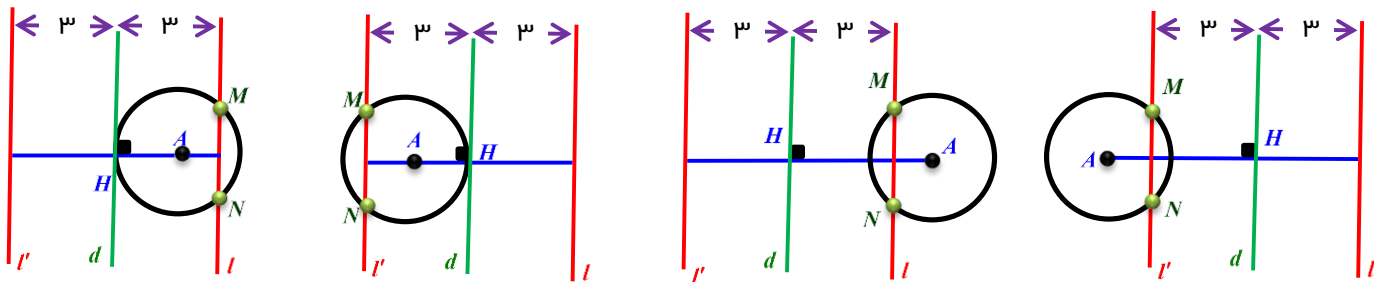


پاسخ تمرین ۴

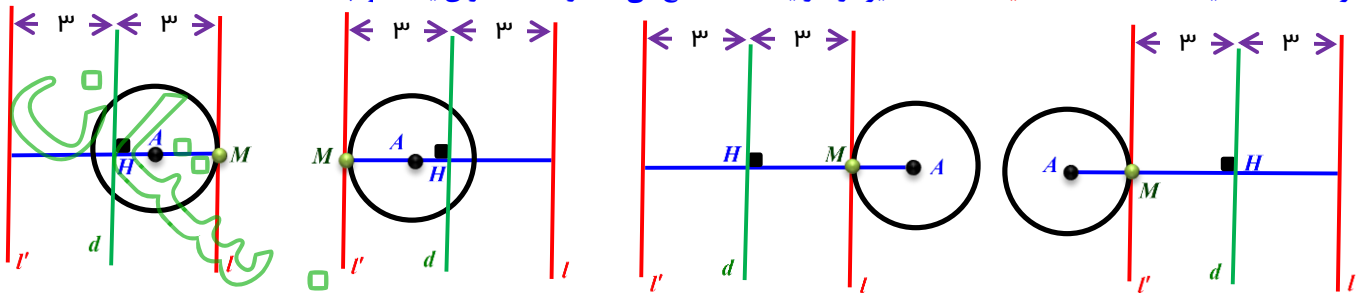
مکان هندسی نقطه ای که از A به فاصله ۲ باشد دایره ای به مرکز A و شعاع ۲ است. و مکان هندسی نقطه ای که از خط d به فاصله ۳ باشد دو خط l, l' موازی با خط d است که فاصله هریک آنها از d مساوی ۳ است. محل تقاطع این دو مکان هندسی پاسخ مساله است.

بحث: فرض کنیم AH فاصله ی A تا خط d باشد. با توجه به اندازه شعاع دایره و مکان نقطه ی A یکی از حالت های زیر رخ می دهد.

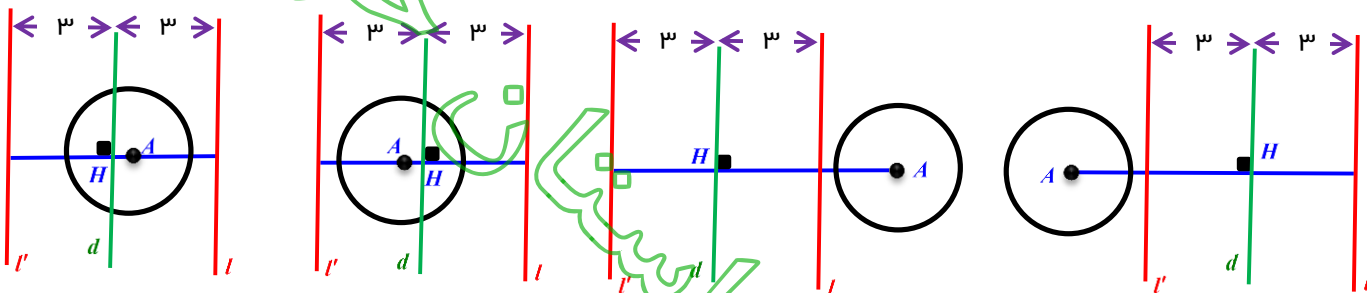
الف: اگر $2 < AH < 5 = 3 + 2$ خط l (یا خط l') دایره را در دو نقطه قطع می کند و مساله دارای دو جواب است.



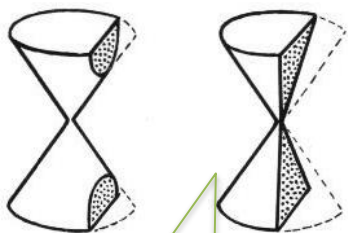
ب: اگر $AH = 5$ یا $AH = 1$ خط l (یا خط l') دایره را در یک نقطه قطع می کند و مساله دارای یک جواب است.



ج: اگر $AH > 5$ یا $AH < 1$ خط l (یا خط l') دایره را در هیچ نقطه ای قطع نمی کند و مساله جوابی ندارد.



پاسخ تمرین ۵

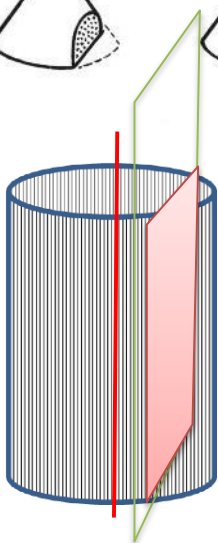


مکان هندسی خواسته شده دو خط متقاطع می باشد

پاسخ تمرین ۶

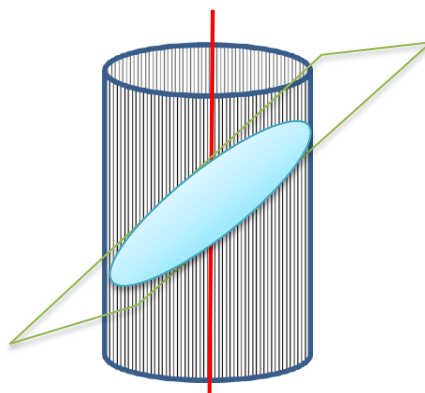
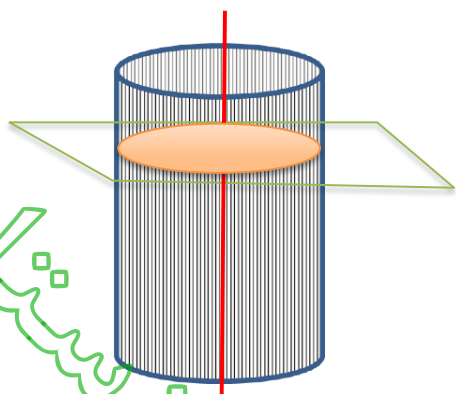
الف: اگر خط l با صفحه p موازی بوده و فاصله دو خط d, l بیشتر از فاصله خط l تا صفحه p باشد. سطح مقطع ایجاد شده سطح بین دو خط موازی است.

ب: اگر خط l با صفحه p موازی بوده و فاصله دو خط d, l مساوی فاصله خط l تا صفحه p باشد. سطح مقطع ایجاد شده، فقط یک خط موازی با l است.



ج: اگر خط l بر صفحه p عمود باشد. سطح مقطع ایجاد شده سطح یک دایره است.

د: اگر خط l و صفحه p متقاطع بوده ولی بر هم عمود نباشند. سطح مقطع ایجاد شده سطح یک بیضی است.



خوزستان

استان

ریاضی

گروه