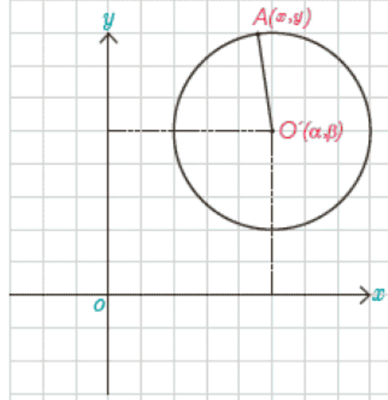
درس دوم

دایـــره

معروف‌ترین مقطع مخروطی، دایره است و چنانچه قبلاً دیدیم، دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز دایره) به فاصله‌ای ثابت (شعاع دایره) واقع‌اند.
حال می‌خواهیم ویژگی‌های دایره را به صورت تحلیلی در دستگاه مختصات دوبعدی با هم مرور کنیم.

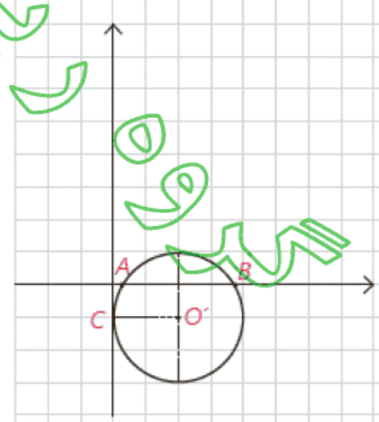


ـ معادلهٔ دایره : دایرهٔ $C(O',r)$ را در دستگاه مختصات xoy در نظر می‌گیریم. اگر $O'(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد و $A(x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه روی آن باشد، با توجه به تعریف دایره، همواره $O'A=r$ و با توجه به دستور تعیین فاصلهٔ بین دو نقطه می‌توان نوشت :

$$|O'A|=\sqrt{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲}=r \Rightarrow \boxed{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲}$$

و این معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α,β) و شعاع r است، که به آن معادلهٔ استاندارد دایره نیز می‌گوئیم.

مثال : معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O'(۲,-۱)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به‌دست آورید.



حل : به کمک دستور بالا معادلهٔ استاندارد دایرهٔ فوق نوشته می‌شود :

$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$

اگر در این معادله، $y=۰$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور xها به‌دست می‌آید :

$(x-۲)^۲+۱=۴ \Rightarrow (x-۲)^۲=۳$

$\Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۳} \Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۳}$

لذا دایره فوق محور xها را در نقاط $A(۲-\sqrt{۳},۰)$ و $B(۲+\sqrt{۳},۰)$ قطع می‌کند و اگر در معادلهٔ دایره، $x=۰$ قرار دهیم نقاط برخورد با محور yها پیدا می‌شوند :

$x=۰ \Rightarrow (y+۱)^۲=۰ \Rightarrow y=-۱$

بنابراین دایرهٔ فوق محور yها را فقط در یک نقطهٔ $C(0,-1)$ قطع می‌کند و می‌دانیم که اگر یک خط دایره‌ای را فقط در یک نقطه قطع کند، در آن نقطه بر آن مماس است.
پس همان‌طور که در شکل هم دیده می‌شود، دایره در نقطهٔ C بر محور yها مماس است.
در معادلهٔ دایره می‌توانیم به کمک اتحادها، عبارت‌های درجهٔ دوم را ساده کنیم، مثلاً در معادلهٔ فوق داریم :

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow$$
$$x^2-2x+4+y^2+2y+1=4 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2-2x+2y+1=0$$

که این معادله را **معادلهٔ ضمنی** دایره می‌نامیم.

ـــ تبدیل معادلهٔ ضمنی دایره به معادلهٔ استاندارد :

در حالت کلی معادله‌ای به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ممکن است معادلهٔ دایره‌ای باشد. برای این منظور عبارت‌های x^2+ax و y^2+by را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم.

مثال : مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ را به‌دست آورید.

حلّ :

$$x^2+2x+y^2-4y=-1 \Rightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4=-1$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow O'(-1,2), r=2$$

فعالیت ۱

می‌خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را در حالت کلی به‌دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید :

$$(x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4})+(y^2+by+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4})+c=0 \Rightarrow$$
$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0 \Rightarrow$$
$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$
$$\Rightarrow O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه‌ای دربارهٔ c,b,a به‌دست می‌آید؟

معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ یک دایره است اگر و تنها اگر $a^2+b^2-4c>0$

رابطهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2+b^2>4c$ باشد و اگر $a^2+b^2<4c$ باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر $a^2+b^2=4c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

نتیجه

با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادلهٔ آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادلهٔ دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

کار در کلاس

۱ــ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ و شعاع آن ۳ واحد باشد.

۲ــ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

۳ــ کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به‌دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف) $x^2+y^2-2x-6y-1=0$

ب) $x^2+y^2+2x+3y+4=0$

ج) $2x^2+2y^2-3x+4y-2=0$

مثال : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-2,-1)$ مرکز آن و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد.

حل : مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادلهٔ آن را بنویسیم. روشن است که $OM=r$ پس طول OM را به‌دست می‌آوریم :

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}=\sqrt{(1+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}$$

و معادله دایره به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(x+2)^2+(y+1)^2=13$$

پاسخ سوال ۱ کاردرکلاس

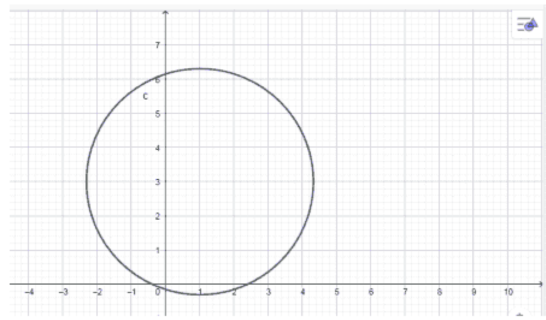
$$O(0,1), r=3 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=3^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=9$$

پاسخ سوال ۲ کاردرکلاس

$$O(0,0) \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2=r^2$$

پاسخ سوال ۳ کاردرکلاس

الف :

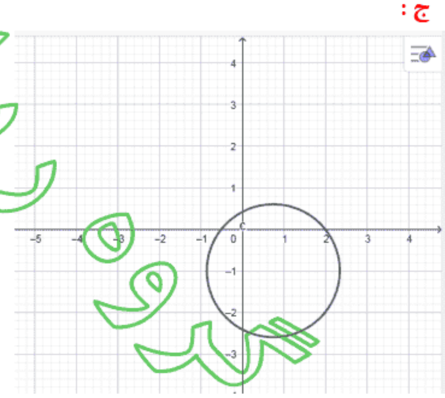


$$x^2+y^2-2x-6y-1=0 \Rightarrow a=-2, b=-6, c=-1$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-4c=4+36+4=44>0$$
$$O'\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O'(1,3), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{44}}{2}=\frac{2\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

ب :

$$x^2+y^2+2x+3y+4=0 \Rightarrow a=2, b=3, c=4$$
$\Rightarrow a^2+b^2-4c=4+9-16=-3<0 \Rightarrow$ **این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند.**

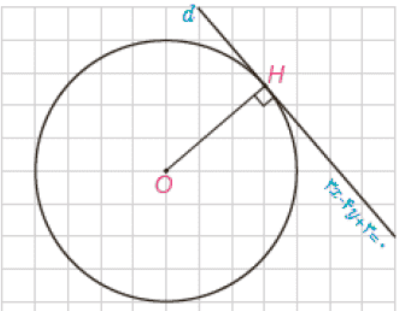
ج :



$$2x^2+2y^2-3x+4y-2=0 \Rightarrow x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y-1=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}, b=2, c=-1$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-4c=\frac{9}{4}+4+4=\frac{41}{4}>0$$
$$O'\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O'\left(\frac{3}{4},-1\right), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{41}{4}}}{2}=\frac{\sqrt{41}}{4}$$

فعالیت ۲

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(1,-1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادلهٔ $3x-4y+3=0$ مماس باشد.



۱ــ با توجه به آنچه از هندسهٔ ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطهٔ تماس (H) برخط

عمود است

۲ــ طول شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس

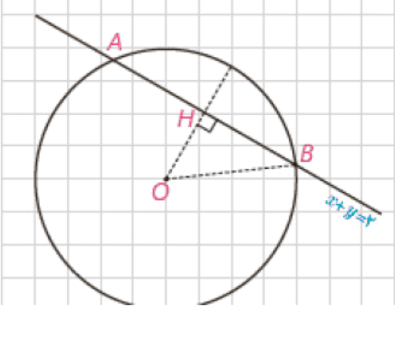
۳ــ به کمک دستور فاصلهٔ نقطه از خط داریم : $r = OH = \dfrac{|3(1)-4(-1)+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$

۴ــ معادلهٔ دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم :

$(x-1)^2+(y+1)^2 = 4$

کار در کلاس

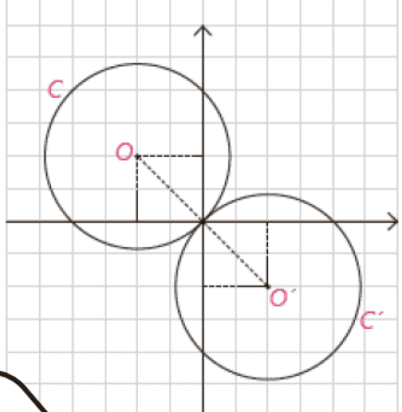
معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.



$AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow AH = BH = \sqrt{2}\ ,\ OH = \dfrac{|1(0)+1(1)-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$r = OB = \sqrt{OH^2+BH^2} = \sqrt{2+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2+(y-1)^2 = \dfrac{5}{4}$

مثال : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(-1,1)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ از مماس بیرونی باشد.



حل : مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ فوق را به‌دست می‌آوریم :

$x^2-2x+y^2+2y=0 \Rightarrow$

$(x-1)^2+(y+1)^2 = 2 \Rightarrow O'(1,-1), r' = \sqrt{2}$

و چنانچه از هندسهٔ ۲ می‌دانیم اگر $d=OO'$ طول خط المرکزین دو دایرهٔ مماس خارج باشد، $d=r+r'$ بنابراین داریم :

$d = OO' = \sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

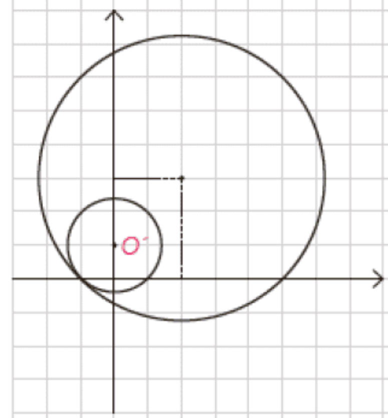
$d = 2\sqrt{2} = r+\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادلهٔ دایرهٔ C را می‌نویسیم :

$(x+1)^2+(y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2+y^2+2x-2y = 0$

فعالیت ۳

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس داخل باشد.



۱ــ معادلهٔ دایره فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶ \Leftrightarrow O'(۲,۳), r'=۴$$

۲ــ طول خط المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم :

$$d=OO'=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

۳ــ با توجه به آنچه از هندسه ۲ می‌دانیم، داریم :

$$d=|r-r'| \Rightarrow |r-۴|=۲\sqrt{۲} \Rightarrow r-۴=\pm۲\sqrt{۲} \Rightarrow r=۴\pm۲\sqrt{۲}$$

۴ــ با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم :

$$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=(۴\pm۲\sqrt{۲})^۲$$

چرا مسئله دو جواب دارد؟

چون مشخص نیست از دو دایره ، کدام یک درونی و کدامیک بیرونی است با توجه به این دو نوع جواب بدست می آید

کاردرکلاس

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳ \quad , \quad x^۲+y^۲-۱۰x-۱۴y+۷۳=۰$

ب) $x^۲+y^۲-۲x=۱ \quad , \quad x^۲+y^۲=۱$

ج) $x^۲+y^۲=۹ \quad , \quad x^۲+y^۲-۲x+۲y+۱=۰$

د) $x^۲+y^۲=۴ \quad , \quad x^۲+y^۲-۸x-۴y+۱۹=۰$

(**راهنمایی:** مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به‌دست آورده و پس از تعیین طول خط المرکزین از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.)

پاسخ سوال کار درکلاس

الف :

$$x^2+y^2-4x-6y=3 \Rightarrow O(2,3), r=\frac{\sqrt{16+36+12}}{2}=4$$

$$x^2+y^2-10x-14y+73=0 \Rightarrow O'(5,7), r'=\frac{\sqrt{100+196+292}}{2}=1$$

$$\Rightarrow d=OO'=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=4\ ,\ r+r'=4+1=5, |r-r'|=4-1=3$$

$\Rightarrow |r-r'|<d<r+r' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند

ب :

$$x^2+y^2-2x=1 \Rightarrow O(1,0), r=\frac{\sqrt{4+0+4}}{2}=\sqrt{2}$$

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow O'(0,0), r'=1$$

$$\Rightarrow d=OO'=\sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2}=1\ ,\ r+r'=1+\sqrt{2}, |r-r'|=\sqrt{2}-1$$

$\Rightarrow |r-r'|<d<r+r' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند

ج :

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow O(0,0), r=3$$

$$x^2+y^2-2x+2y+1=0 \Rightarrow O'(1,-1), r'=\frac{\sqrt{4+4-4}}{2}=1$$

$$\Rightarrow d=OO'=\sqrt{(0-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}, r+r'=3+1=4, |r-r'|=3-1=2$$

$\Rightarrow d<|r-r'| \Rightarrow$ دو دایره متداخل اند

د :

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow O(0,0), r=2$$

$$x^2+y^2-8x-4y+19=0 \Rightarrow O'(4,-2), r'=\frac{\sqrt{64+16-76}}{2}=1$$

$$\Rightarrow d=OO'=\sqrt{(4-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}, r+r'=2+1=3, |r-r'|=2-1=1$$

$\Rightarrow r+r'<d \Rightarrow$ دو دایره برون هم هستند

فعالیت ۴

می‌خواهیم وضعیت خط به معادلهٔ $x+y=۴$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$ را تعیین کنیم.

روش اول : از معادلهٔ خط، $y=۴-x$ را در معادلهٔ دایره جایگزین می‌کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه‌های برخورد از معادله حاصل به‌دست می‌آید) :

$x^۲+(۴-x)^۲-۲(۴-x)-۳=۰\Rightarrow\cdots$

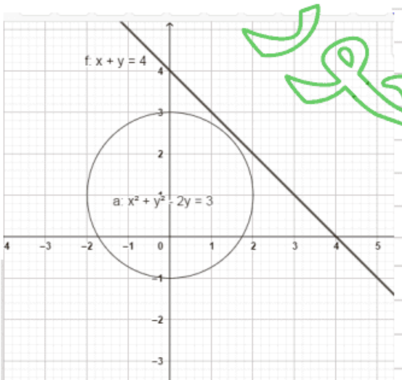
$$x^۲+(۴-x)^۲-۲(۴-x)-۳=۰$$
$$x^۲+۱۶-۸x+x^۲-۸+۲x-۳=۰$$
$$۲x^۲-۶x+۵=۰$$
$$\Rightarrow \Delta=۳۶-۴(۲)(۵)=-۴<۰$$

با ساده‌کردن معادلهٔ حاصل و تعیین علامت Δ، نشان دهید معادلهٔ فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم : معادلهٔ دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصلهٔ مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می‌دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

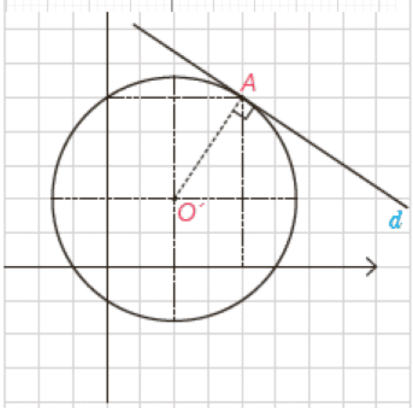
$$x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$$
$$\Leftrightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۴$$
$$\Leftrightarrow O(۰,۱)\ ,r=۲$$
$$\Rightarrow OH=\frac{|۱(۰)+۱(۱)-۴|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$
$$\Rightarrow OH^۲>r^۲\Rightarrow OH>r$$

با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه‌گیری‌تان را ببینید.



سؤال : اگر در معادلهٔ حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta>۰$ یا $\Delta=۰$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت‌ها فاصله مرکز دایره از خط چگونه است؟

مثال : در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.



حل : با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره شیب OA را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب مماس را به‌دست آورده و معادله آن را تعیین می‌کنیم.

$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵\Rightarrow O(۱,۱)\Rightarrow m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲\Rightarrow$$

$$m_d=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)\Rightarrow \text{معادله مماس d}: y=-\frac{۱}{۲}x+۴$$

تمرین

۱ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که :

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و برخط $3x+4y=0$ مماس باشد.

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

۲ــ حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد.

۳ــ وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

۴ــ وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2=4 \quad , \quad x^2+y^2-2x=4$

ب) $x^2+(y-1)^2=1 \quad , \quad (x-1)^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=1 \quad , \quad x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

د) $x^2+y^2=1 \quad , \quad x^2+y^2-6x-2y+9=0$

۵ــ نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادلهٔ دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B به‌دست آورید.

۶ــ وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $3x+4y=0 \quad , \quad x^2+y^2-4x-4y+7=0$

ب) $x+y=2 \quad , \quad x^2+y^2=2$

ج) $x+y=1 \quad , \quad x^2+y^2-2x-2y=2$

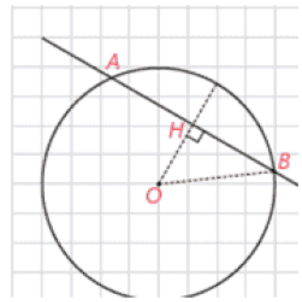
پاسخ تمرین۱

الف :

$$r = OA = \sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = 5$$

ب :

$$r = OH = \frac{|3(2)+4(1)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 = 4$$



پ :

$$AB = 2 \Rightarrow AH = BH = 1$$

$$OH = \frac{|1(-1)+1(-1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

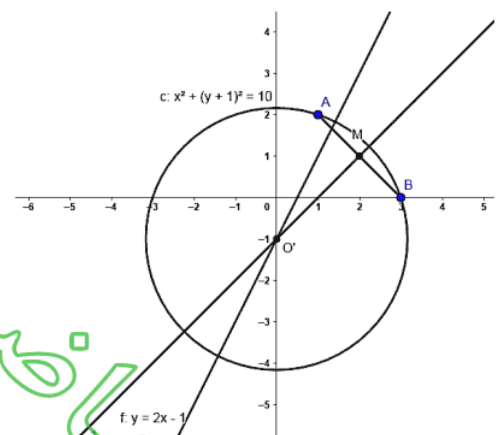
$$r = \sqrt{AH^2+BH^2} = \sqrt{1+\frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} \Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2 = \frac{11}{2}$$

ت :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow O'(2,-1)$$

$$r = \frac{|4(2)+3(-1)-6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5} \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 = \frac{1}{25}$$

ج :



$$A(1,2), B(3,0) \Rightarrow M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2,1)$$

$$m_{AB} = \frac{0-2}{3-1} = -1 \Rightarrow m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow y-1 = 1(x-2) \Rightarrow y = x-1$$

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=-1 \Rightarrow O'(0,-1) \Rightarrow r = O'A = \sqrt{(1-0)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow x^2+(y+1)^2 = 10$$

پاسخ تمرین ۲

$$x^2+y^2-3x+5y+a=0 \Rightarrow a^2+b^2-4c = 9+25-4a > 0$$

$$\Rightarrow 34-4a > 0 \Rightarrow a < \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$$

پاسخ تمرین ۳

$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰$

$A(-۱,-۱)\Rightarrow ۱+۱-۲(-۱)+۴(-۱)-۵=-۵<۰\Rightarrow$ نقطه درون دایره قرار دارد

$B(۱,-۲)\Rightarrow ۱+۴-۲(۱)+۴(-۲)-۵=-۱۶<۰\Rightarrow$ نقطه درون دایره قرار دارد

$C(۲,۳)\Rightarrow ۴+۹-۲(۲)+۴(۳)-۵=۲۱>۰\Rightarrow$ نقطه بیرون دایره قرار دارد

$D(۴,-۱)\Rightarrow ۱۶+۱-۲(۴)+۴(-۱)-۵=۰\Rightarrow$ نقطه روی دایره قرار دارد

پاسخ تمرین ۴

الف :

$x^۲+y^۲=۴\Leftrightarrow O(۰,۰), r=۲\quad , x^۲+y^۲-۲x=۴\Leftrightarrow O'(۱,۰), r'=\sqrt{۵}$

$d=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۰-۰)^۲}=۱\ , r+r'=۲+\sqrt{۵}\ , |r-r'|=\sqrt{۵}-۲\Rightarrow |r-r'|<d<r+r'\Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند.

ب:

$x^۲+(y-۱)^۲=۱\Rightarrow O(۰,۱)\ , r=۱\ , (x-۱)^۲+y^۲=۱\Rightarrow O'(۰,۱)\ , r'=۱$

$d=OO'=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۰-۱)^۲}=\sqrt{۲}, r+r'=۲, |r-r'|=۰\Rightarrow |r-r'|<d<r+r'\Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند.

ج :

$x^۲+y^۲=۱\Leftrightarrow O(۰,۰), r=۱\quad , x^۲+y^۲-۳\sqrt{۲}x-۳\sqrt{۲}y+۵=۰\Leftrightarrow O'\left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲},\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\right), r'=\frac{\sqrt{۱۸+۱۸-۴(۵)}}{۲}=۲$

$d=OO'=\sqrt{\left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-۰\right)^۲+\left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-۰\right)^۲}=۳\Rightarrow r+r'=۳, |r-r'|=۱\Rightarrow d=r+r'\Rightarrow$ دو دایره مماس برون هستند.

د :

$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow O(۰,۰)\ , r=۱\ , x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰\Rightarrow O'(۳,۱)\ , r'=۱$

$d=OO'=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۱۰}, r+r'=۲, |r-r'|=۰\Rightarrow d>r+r'\Rightarrow$ دو دایره متخارج اند.

پاسخ تمرین ۵

$B(۱,۱), A(-۱,-۱)\Rightarrow N\left(\frac{۱+(-۱)}{۲},\frac{۱+(-۱)}{۲}\right)\Rightarrow N(۰,۰), m_{AB}=\frac{۱-(-۱)}{۱-(-۱)}=۱\xrightarrow{d\perp AB} m_d=\frac{-۱}{m_{AB}}=\frac{-۱}{۱}=-۱$

$\Rightarrow y-۰=-۱(x-۰)\Rightarrow \boxed{y=-x}$

$C(۱,-۳), A(-۱,-۱)\Rightarrow M\left(\frac{۱+(-۱)}{۲},\frac{-۳+(-۱)}{۲}\right)\Rightarrow N(۰\ ,-۲), m_{AB}=\frac{-۳-(-۱)}{۱-(-۱)}=-۱\xrightarrow{d\perp AB} m_d=\frac{-۱}{m_{AB}}=\frac{-۱}{-۱}=+۱$

$\Rightarrow y-(-۲)=۱(x-۰)\Rightarrow \boxed{y=x-۲}$

$\begin{cases} y=-x \\ y=x-۲ \end{cases}\Rightarrow x=۱\ , y=-۱\Rightarrow O(۱\ ,-۱)\Rightarrow r=OA=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۱-۱)^۲}=۲\Rightarrow (x-۱)^۲+(x+۱)^۲=۴$

پاسخ تمرین ۶

$$x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰\Rightarrow O(۲,۲), r=\frac{\sqrt{۱۶+۱۶-۲۸}}{۲}=\frac{\sqrt{۸}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

الف :

$۳x+۴y=۰\Rightarrow OH=\frac{|۳(۲)+۴(۲)|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۴}{۵}\Rightarrow OH>r\Rightarrow$ خط ، دایره را قطع نمی کند

ب :

$$x^۲+y^۲=۲\Rightarrow O(۰,۰), r=\sqrt{۲}$$

$x+y=۲\Rightarrow OH=\frac{|۰+۰-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}\Rightarrow OH=r\Rightarrow$ خط بر دایره مماس است

ج :

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y=۲\Rightarrow O(۱,۱), r=\frac{\sqrt{۴+۴+۸}}{۲}=۲$$

$x+y=۱\Rightarrow OH=\frac{|۰+۰-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow OH<r\Rightarrow$ خط، دایره را در دو نقطه قطع می کند