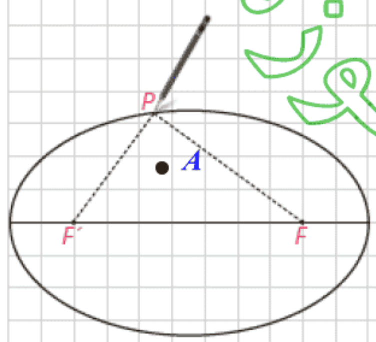
درس سوم

# بیضی و سهمی

## بیضی

**فعالیت ۱**




یک تکه نخ درنظر گرفته و دوسر آن را مطابق شکل در دو نقطهٔ $F$ و $F'$ ثابت کنید. فرض کنید طول نخ $l$ باشد و $l > FF'$ یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دوطرف نخ به‌صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که **بیضی** نام دارد.

۱ــ یک نقطهٔ دلخواه روی شکل رسم شده درنظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطهٔ ثابت $F$ و $F'$ برابر چیست؟ $PF + PF' = l$

۲ــ یک نقطهٔ دلخواه مانند $A$ در درونِ بیضیِ رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطهٔ ثابت $F$ و $F'$ وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطهٔ موردنظر از $F$ و $F'$ کوچکتر از $l$ است.

(**راهنمایی:** پاره‌خط $FA$ را از سمت $A$ امتداد دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید)

پاسخ در صفحه بعد

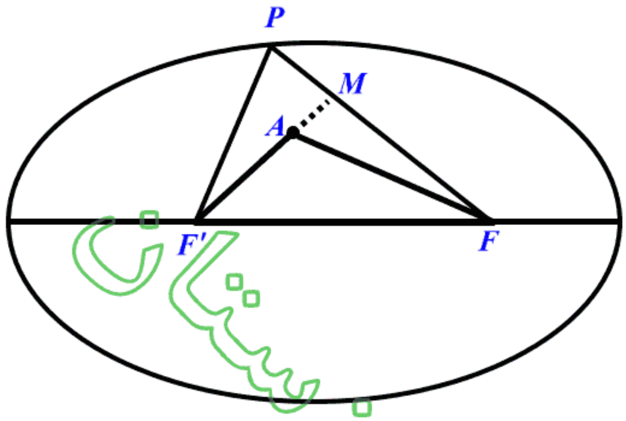
۳ــ یک نقطهٔ دلخواه مانند $B$ بیرونِ بیضیِ رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطهٔ $F$ و $F'$ وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطهٔ موردنظر از $F$ و $F'$ بزرگتر از $l$ است.

(**راهنمایی:** اگر نقطهٔ $D$ محل برخورد $FB$ با بیضی باشد، $F'D$ را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

پاسخ در صفحه بعد

۴ــ از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همهٔ نقاط بیضی شدید که هیچ نقطهٔ دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

ویژگی تمام نقاط بیضی این است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت مقداری ثابت است




**پاسخ مرحله ۲ فعالیت**

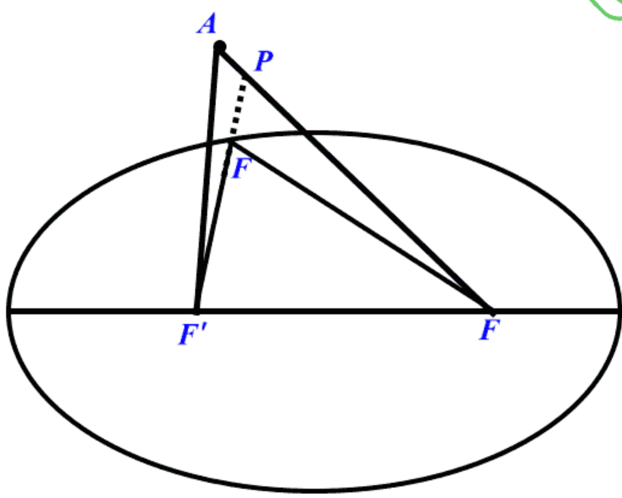
فرض کنیم $A$ نقطه ای درون بیضی باشد که روی خط $FF'$ قرار نداشته باشد.

نقطه $P$ را روی بیضی چنان اختیار می کنیم که $A$ درون مثلث $PFF'$ باشد. اگر

امتداد $AF'$ ، ضلع $PF$ را در نقطه ی $M$ قطع کند.

در این صورت بنا به قضیه نامساوی مثلث داریم :

$$\Delta PF'M : F'M < PF' + PM$$
$$\Delta AFM : AF < AM + MF$$
$$\Rightarrow AF + F'M < PF' + PM + AM + MF \Rightarrow AF + F'A + \cancel{AM} < PF' + PM + \cancel{AM} + MF$$
$$\Rightarrow AF + AF' < PF' + PF \Rightarrow AF + AF' < l$$




**پاسخ مرحله ۳ فعالیت**

فرض کنیم $A$ نقطه ای بیرون بیضی باشد که روی خط $A$ قرار نداشته باشد.

نقطه $F$ را روی بیضی چنان اختیار می کنیم که $P$ درون مثلث $AFF'$ باشد. اگر

امتداد $PF'$ ، ضلع $AF$ را در نقطه ی $PF$ قطع کند.

در این صورت بنا به قضیه نامساوی مثلث داریم :

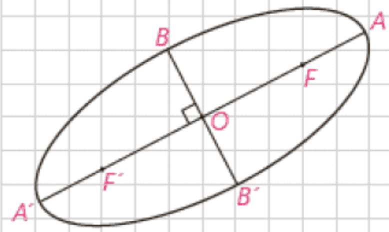
$$\Delta AF'M : F'M < AF' + AM$$
$$\Delta PFM : PF < PM + MF$$
$$\Rightarrow PF + F'M < AF' + AM + PM + MF \Rightarrow PF + F'P + \cancel{PM} < AF' + AM + \cancel{PM} + MF$$
$$\Rightarrow PF + PF' < AF' + AF \Rightarrow l < AF + AF'$$

۵ــ با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو ......ثابت...... یک مقدار ......ثابت...... است.

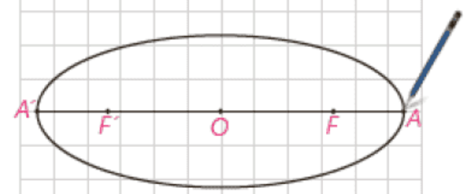
دو نقطهٔ ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به‌دست آوردیم و آنها را $F$ و $F'$ نامیدیم کانون‌های بیضی نام دارند.

## فعالیت ۲




بیضی مقابل را درنظر بگیرید. $AA'$ قطر بزرگ (قطر کانونی) و $BB'$ قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود. $F$ و $F'$ کانون‌های بیضی هستند و نقطهٔ $O$، وسط پاره خط $FF'$، مرکز بیضی است. فرض کنید اندازهٔ پاره‌خط‌های $OA$، $OB$ و $OF$ را به ترتیب با $a$، $b$ و $c$ نمایش دهیم. بنابراین فاصلهٔ دو کانون بیضی برابر $2c$ است.

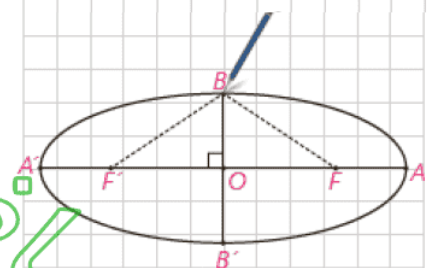
۱ــ در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیتی را که مداد در نقاط $A$ و $A'$ قرار می‌گیرد درنظر بگیرید.




الف) نشان دهید که $FA = F'A'$ و از آن نتیجه بگیرید $OA' = OA = a$ و لذا اندازهٔ قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

ب) نشان دهید طول نخ موردنظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

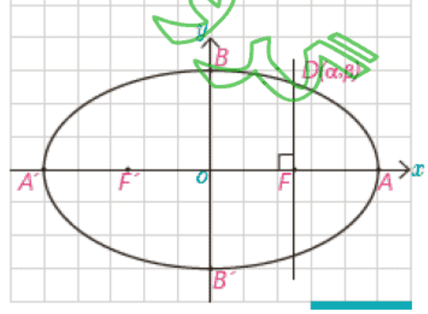
۲ــ الف) در رسم بیضی وضعیتی را که مداد در نقطهٔ $B$ قرار دارد درنظر بگیرید و نشان دهید $b^2 + c^2 = a^2$




ب) با انجام همین کار برای نقطهٔ $B'$ نتیجه بگیرید $OB'^2 + c^2 = a^2$

و با توجه به آن نتیجه بگیرید $OB' = OB = b$ و لذا اندازهٔ قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است.

## کار در کلاس




۱ــ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای $x$ و $y$ منطبق هستند و فاصله $F$ از هر دو نقطهٔ $O$ و $A$ برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطهٔ $F$ بر $AA'$ عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطهٔ $D$ قطع کرده باشد، مختصات $D$ را به‌دست آورید.

**پاسخ سوال ۱ فعالیت**

**الف :** $A$ نقطه ای روی بیضی است لذا با توجه قسمت اول فعالیت قبل می توان نوشت:

$$FA + F'A = l \Rightarrow FA + FA + FF' = l \Rightarrow FA + FA = l - FF' \Rightarrow 2FA = l - FF'$$

به طریق مشابه با در نظر گرفتن نقطه $A'$ می توان نوشت : $2FA' = l - FF'$ پس :

$$FA' = F'A = \frac{1}{2} l \Rightarrow \cancel{FF'} + F'A' = \cancel{FF'} + FA \Rightarrow FA = F'A'$$

$$OF = OF' \Rightarrow OF + FA = OF' + F'A' \Rightarrow OA = OA' = a$$

**ب :**

$$AF + AF' = l \xrightarrow{AF = A'F'} A'F' + AF' = l \Rightarrow AA' = l \Rightarrow l = 2a$$

**پاسخ سوال ۲ فعالیت**

**الف :**

$$\Delta OBF \cong \Delta OBF' \Rightarrow BF = BF'$$

$$BF + BF' = AA' = 2a \Rightarrow BF + BF = 2a \Rightarrow 2BF = 2a \Rightarrow BF = a$$

$$\Delta OBF; \angle O = 90^\circ \Rightarrow OB^2 + OF^2 = BF^2 \Rightarrow OB^2 + c^2 = a^2 \quad \boxed{1}$$

**ب :**

$$\Delta OB'F \cong \Delta OB'F' \Rightarrow B'F = B'F'$$

$$B'F + B'F' = AA' = 2a \Rightarrow 2BF = 2a \Rightarrow BF = a$$

$$\Delta OBF; \angle O = 90^\circ \Rightarrow OB'^2 + OF^2 = B'F^2 \Rightarrow OB'^2 + c^2 = a^2 \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{1}, \boxed{2} \Rightarrow OB^2 = OB'^2 \Rightarrow OB = OB' = b$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

## فعالیت ۳

در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای $a$ و $c$ بیضی موردنظر را رسم می‌کنیم.
می‌دانیم که $a \leq c \leq \circ$ و لذا $۱ \leq \frac{c}{a} \leq \circ$ دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به‌صورت تقریبی ابتدا دو کانون $F$ و $F'$ را به فاصلهٔ $۲c$ از هم درنظر بگیرید، سپس نقاط $A$ و $A'$ را بر خط $FF'$ به‌گونه‌ای انتخاب کنید که فاصلهٔ $A$ تا $F$ و فاصلهٔ $A'$ تا $F'$ برابر $a$-$c$ و اندازهٔ $AA'$ برابر $۲a$ باشد، سپس با استفاده از رابطهٔ $b^۲ = a^۲ - c^۲$ نقاط $B$ و $B'$ را مشخص کنید و بیضی را به‌طور تقریبی رسم کنید:

۱ـ $c = ۱$ و $a = ۴$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۱}{۴}$

۲ـ $c = ۲$ و $a = ۸$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۱}{۴}$

پاسخ در صفحه بعد

۳ـ $c = ۱$ و $a = ۲$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$

۴ـ $c = ۲$ و $a = ۴$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$

۵ـ $c = ۳$ و $a = ۴$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۳}{۴}$

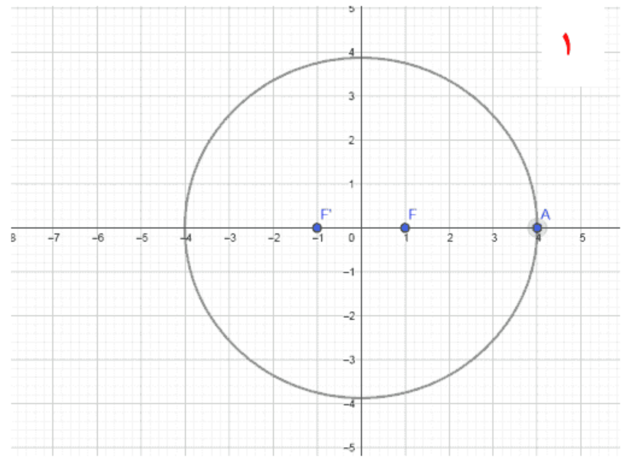
۶ـ $c = ۶$ و $a = ۸$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۳}{۴}$

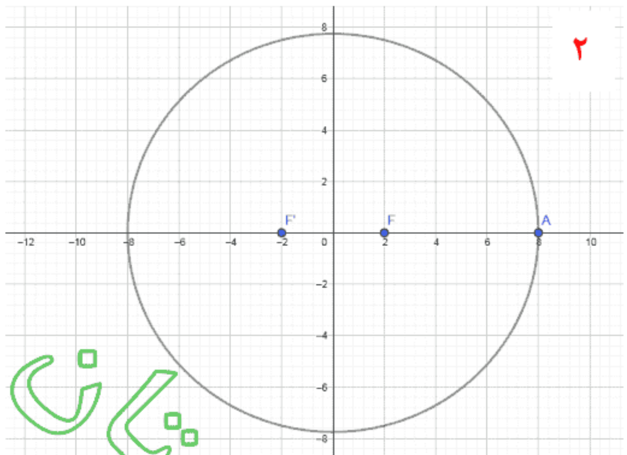
با توجه به آنچه دیدید هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به یک نزدیک شود شکل بیضی کشیده‌تر شده و شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود و هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیکتر می‌شود. به این سبب مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم.

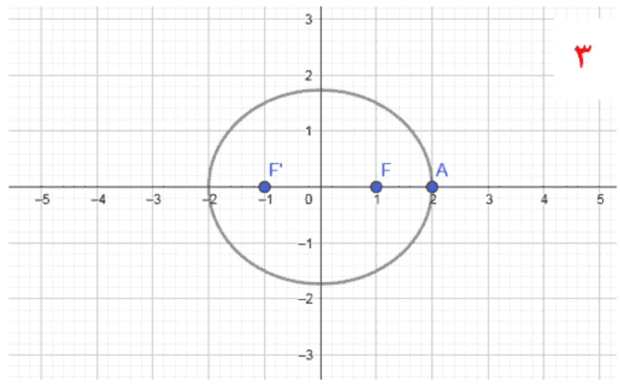
ــ در حالتی که $\frac{c}{a} = ۱$ بیضی تبدیل به یک پاره‌خط و در حالتی که $\frac{c}{a} = \circ$ بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. چرا؟

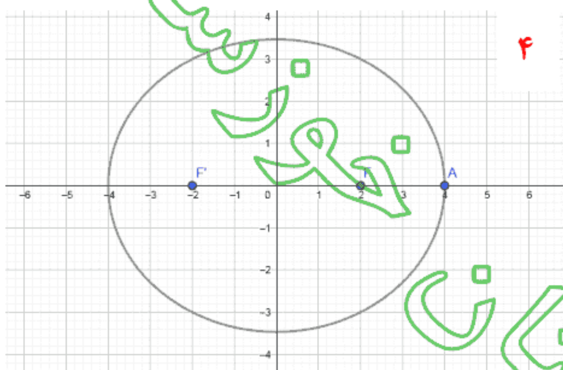
### یادآوری

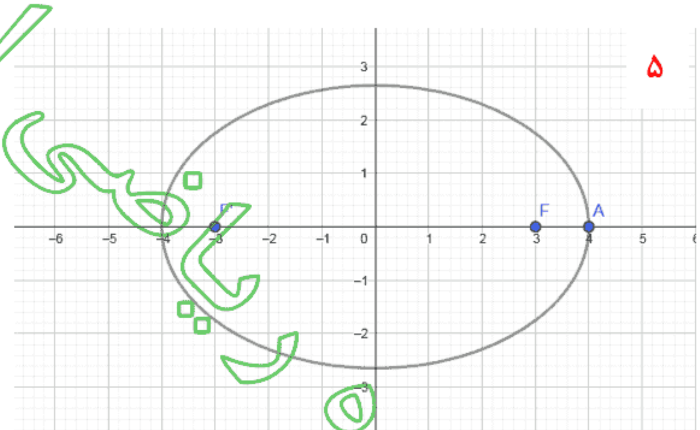
در پایهٔ یازدهم دیدیم که کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ $A$ به نقطهٔ $B$ و باعبور از نقطه‌ای از خطِ $d$، از نقطه‌ای مانند $M$ روی خط $d$ می‌گذرد، به‌گونه‌ای که دو زاویهٔ ایجاد شده $M_۱$ و $M_۲$ باهم برابرند.

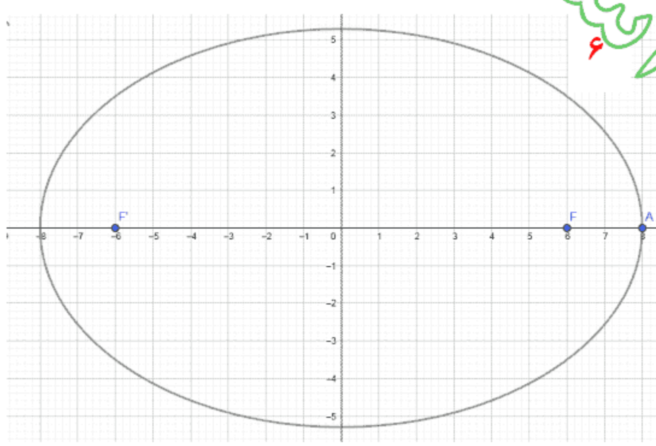


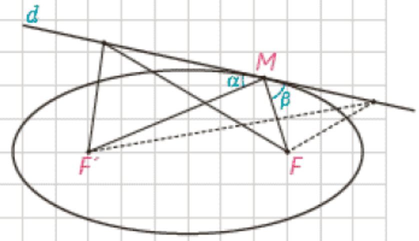



$$\frac{c}{a}=1 \Rightarrow a=c \Rightarrow a^2=c^2 \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} b^2+c^2=c^2 \Rightarrow b=0$$

$$\frac{c}{a}=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow c^2=0 \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} b^2+0=a^2 \Rightarrow a=b$$

## فعالیت ۴

فرض کنیم خط $d$ مانند شکل مقابل در نقطهٔ $M$ بر بیضی مماس باشد.




پاسخ در صفحه بعد

۱ــ مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون $F$ و $F'$ کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲ــ دو زاویهٔ α و β نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

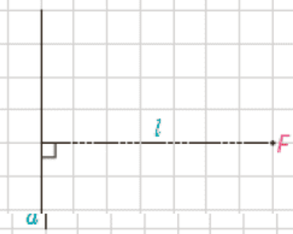
۳ــ با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنهٔ داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنهٔ داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

### سهمی

با سهمی در سال‌های گذشته تا حدی آشنا شده‌ایم. اکنون قصد داریم آن را به‌عنوان یک شکل هندسی مورد بررسی قرار دهیم.

## فعالیت ۵

یک خط ثابت مانند $d$ و یک نقطهٔ ثابت مانند $f$ خارج آن درنظر بگیرید و فرض کنید فاصلهٔ $F$ از خط $d$ برابر $l$ باشد.

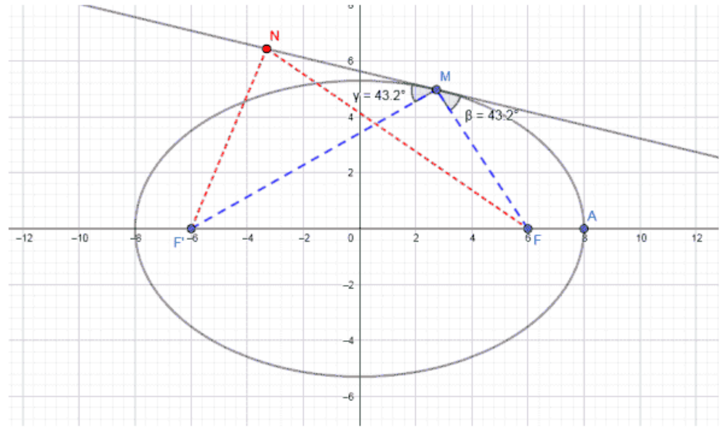



ــ آیا می‌توانید نقطهٔ دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطهٔ $F$ خطی موازی خط $d$ رسم کنید و آن را $d'$ بنامید. تمام نقاط واقع بر خط $d'$ فاصله‌شان از خط $d$ برابر $l$ است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط $d'$ بیابید که از نقطهٔ $F$ و خط $d$ به یک فاصله باشند.

ــ اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصلهٔ یکسانی از خط $d$ و نقطهٔ $F$ قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط موردنظر ارائه می‌گردد.


پاسخ در صفحه بعد

فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام‌های $A$ ، $B$ و $C$ باشند. یک سر یک تکه نخ به طول $AB$ را در رأس $A$ از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطهٔ $F$ ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع $BC$ بر خط $d$ واقع باشد و نقطهٔ $F$ بر ضلع $AB$ قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به‌گونه‌ای به نخ گیردهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد. در این حالت فاصلهٔ نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط $d$ و از نقطهٔ $F$ نسبت به هم چگونه است؟




**پاسخ فعالیت ۴**

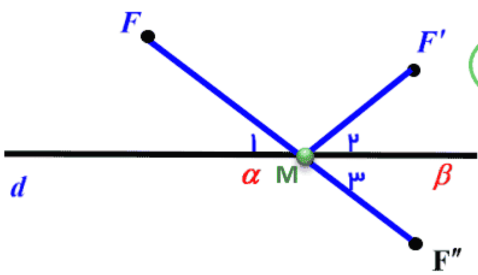
۱- **نقطه $M$ زیرا نقطه $M$ تنها نقطه از خط $d$ می باشد که روی بیضی قرار دارد و سایر نقاط این خط بیرون بیضی واقع اند پس بنا به فعالیت ۱ $FM+F'M$ کمترین مقدار ممکن را دارد.**

۲- **مساوی اند زیرا**

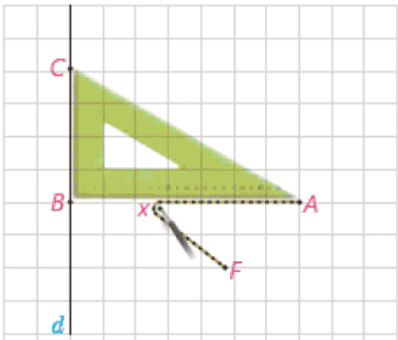
**بنا به آنچه در هندسه ۲ گفته شد اگر $F\,,F'$ دو نقطه در یک طرف خط $d$ باشند برای یافتن نقطه $M$ روی خط $d$ به طوری که $FM+F'M$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد کافی است قرینه $F'$ را نسبت به خط $d$ یافته و آنرا به $F$ وصل کنیم....**

پس با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{aligned}\angle M_1=\angle M_3\\ \angle M_2=\angle M_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \angle M_1=\angle M_2\Rightarrow \alpha=\beta$$




۳- **اشعه ای که از یکی از کانون های بیضی به بدنه آن تابیده می شود بعد از بازتاب از کانون دیگر می گذرد زیرا در هر بازتاب ، زاویه ی تابش و بازتاب مساوی اند.**

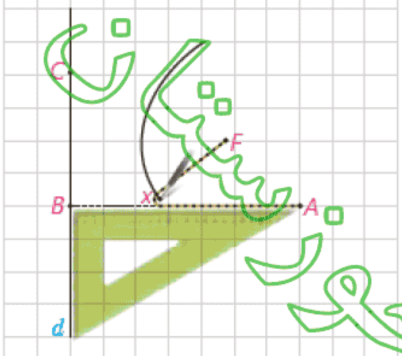



حال در حالتی که ضلع $BC$ کماکان بر خط $d$ واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع $AB$ چسبیده باشد و هر دو تکهٔ نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطهٔ درحال حرکت نوک مداد را در هر حالت با $X$ نمایش دهیم.

پاره‌خط‌های $BX$ و $FX$ هرکدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطهٔ $X$ هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟ نقطه $X$ از نقطه $F$ و خط $d$ به یک فاصله است یعنی

$BX = FX$

توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط مداد رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع $BC$ بر خط $d$ در هر دوطرف نقطهٔ $F$ می‌توان حرکت داد.) همه نقطه ها از نقطه $F$ و خط $d$ به یک فاصله اند

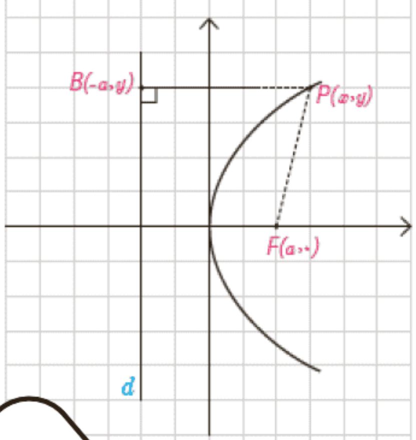



شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطهٔ $F$ را کانون سهمی و خط $d$ را خط هادی سهمی می‌نامیم و اگر از $F$ بر $d$ خطی عمود رسم کنیم سهمی را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به آن رأس سهمی می‌گوییم. حال با توجه به آنچه دیدیم می‌توان گفت :

**سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.**

## معادلهٔ سهمی

با توجه به آنچه گفته شد با سهمی به‌صورت هندسی آشنا شدیم. حال به‌دنبال این هستیم که برای یک سهمی داده شده معادله آن را به‌دست آوریم؛ یعنی معادله‌ای به‌دست آوریم که مختصات هر نقطه از سهمی در آن معادله صدق کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله صدق کند روی سهمی موردنظر باشد. دقت کنید که این کار را فقط برای سهمی‌هایی انجام می‌دهیم که خط هادی آنها موازی با یکی از محورهای مختصات باشد.




### فعالیت ۶

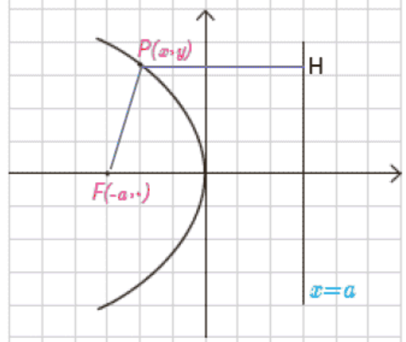
۱ــ فرض کنید نقطهٔ $F(a,0)$ ، که در آن $a$ مثبت است، کانون سهمی و خط هادی $d$ موازی محور $y$ها به معادلهٔ $x=-a$ باشد و نقطهٔ $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم : $|PF|=|PB|$ . چرا؟

بنابراین

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+a)^2+(y-y)^2}$$

گروه ریاضی استان خوزستان

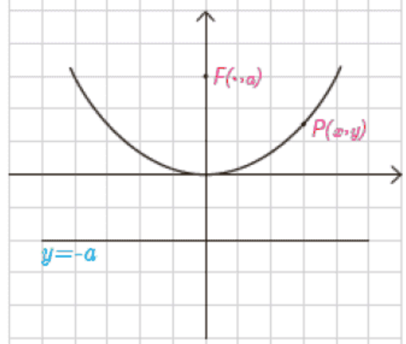
با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارات خواهیم داشت : $y^2 = 4ax$
دقت کنید که $a$ برابر با فاصلهٔ کانون تا رأس سهمی و همچنین فاصلهٔ رأس سهمی تا خط هادی است و فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $2a$ است. در این حالت عدد مثبت $a$ را **فاصلهٔ کانونی سهمی** می‌نامند و چنان که دیده می شود خطی که از کانون به خط هادی سهمی عمود می‌شود که در اینجا محور $x$هاست **محور تقارن سهمی** است که به آن **محور کانونی سهمی** یا **محور سهمی** هم می‌گوییم.



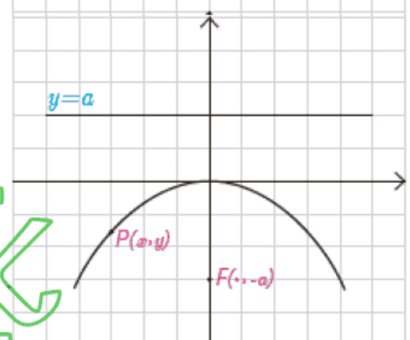

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2+(y-y)^2} \Rightarrow y^2 = -4ax$$

۲ـ در حالتی که خط هادی $d$ موازی محور $y$ها به معادلهٔ $x = a$ باشد ولی کانون $F(-a,0)$ در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادلهٔ سهمی به‌صورت $y^2 = -4ax$ است. در این حالت محور $x$ها محور سهمی است.

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+a)^2} \Rightarrow x^2 = 4ay$$




۳ـ در حالتی که خط هادی $d$ موازی محور $x$ها به معادلهٔ $y = -a$ و کانون $F(0,a)$ در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادلهٔ سهمی به‌صورت $x^2 = 4ay$ است. در این حالت محور $y$ها محور سهمی است.
(در واقع این معادله همان $y = \frac{1}{4a}x^2$ است که در پایهٔ دهم به عنوان معادلهٔ سهمی با آن آشنا شدید)

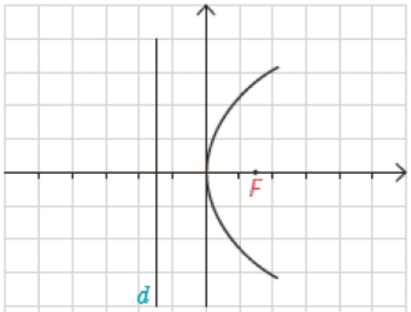



۴ـ در حالتی که خط هادی $d$ موازی محور $x$ها به معادلهٔ $y = a$ و کانون $F(0,-a)$ در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادلهٔ سهمی به‌صورت $x^2 = -4ay$ است. در این حالت محور $y$ها محور سهمی است.

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y+a)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-a)^2} \Rightarrow x^2 = -4ay$$

مطالب فوق دربارهٔ سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد.

| دهانهٔ سهمی | محور سهمی | خط هادی | کانون | معادلهٔ سهمی (a>0) |
|---|---|---|---|---|
| رو به راست | محور $x$ | $x=-a$ | $(a,0)$ | $y^2 = 4ax$ |
| رو به چپ | محور $x$ | $x=a$ | $(-a,0)$ | $y^2 = -4ax$ |
| رو به بالا | محور $y$ | $y=-a$ | $(0,a)$ | $x^2 = 4ay$ |
| رو به پایین | محور $y$ | $y=a$ | $(0,-a)$ | $x^2 = -4ay$ |




**مثال :** معادلهٔ $y^۲ = ۶x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.

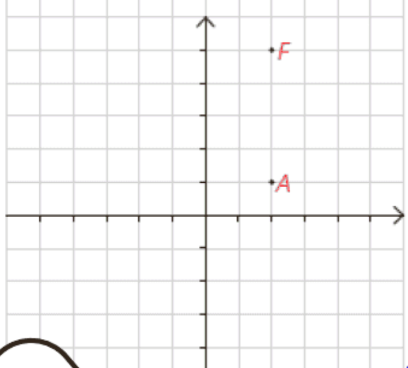
**حل :** این معادلهٔ یک سهمی است که دهانهٔ آن روبه راست است و محور آن محور $x$هاست. با قرار دادن $۴a = ۶$ داریم $a = \frac{۳}{۲}$ . لذا کانون آن $F(\frac{۳}{۲},۰)$ و خط هادی آن موازی محور y‌ها و به معادلهٔ $x = \frac{-۳}{۲}$ است و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به‌صورت مقابل است.

## انتقال (محورها)

دیدیم که $y^۲ = ۴ax$ معادلهٔ یک سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات، کانون آن $F(a\ ,۰)$، خط هادی آن موازی محور $y$ها به معادلهٔ $x = -a$، محور آن محور $x$ها (خط $y = ۰$) و دهانهٔ آن رو به راست است. حال با توجه به آنچه دربارهٔ انتقال می‌دانیم می‌توان گفت معادله $(y-k)^۲ = ۴a(x-h)$ معادلهٔ همان سهمی است که به اندازهٔ $h$ به‌سمت راست (درصورت منفی بودن $h$ به سمت چپ) و به‌اندازهٔ $k$ به سمت بالا (درصورت منفی بودن $k$ به‌سمت پایین) انتقال یافته است. لذا رأس آن به مختصات $(h\ ,k)$، کانون آن $F(a+h,\ k)$، خط هادی آن موازی محور $y$ها به معادله $x = -a + h$، محور آن خط $y = k$ و دهانهٔ آن کماکان روبه راست است.

| دهانهٔ سهمی | محور سهمی | خط هادی | کانون | معادلهٔ سهمی |
|---|---|---|---|---|
| رو به راست | خط $y=k$ | $x=-a+h$ | $(a+h\ ,k)$ | $(y-k)^۲ = ۴a(x-h)$ |
| رو به چپ | خط $y=k$ | $x=a+h$ | $(-a+h\ ,k)$ | $(y-k)^۲ = -۴a(x-h)$ |
| رو به بالا | خط $x=h$ | $y=-a+k$ | $(h, a+k)$ | $(x-h)^۲ = ۴a(y-k)$ |
| رو به پایین | خط $x=h$ | $y=a+k$ | $(h, -a+k)$ | $(x-h)^۲ = -۴a(y-k)$ |

همان‌طور که گفته شد رأس این سهمی‌ها نقطه‌ای به مختصات $(h\ ،k)$ است. لذا این حالت‌ها، حالت‌های کلی معادلات است که با قراردادن $(h,k) = (۰,۰)$ به حالت‌های خاص، که در جدول قبل مطرح شد، خواهیم رسید. معادلات سهمی را در جدول فوق، معادلات استاندارد یا متعارف می‌گوییم.




**مثال :** معادلهٔ سهمی به رأس $A(۲،۱)$ و کانون $F(۲،۵)$ را بیابید و معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید.

**حل :** با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت :

۱) $a = ۴$ (چرا؟) $\quad F(h,a+k) \Rightarrow F(۲,a+۱) = (۲,۵) \Rightarrow a+۱ = ۵ \Rightarrow \boxed{a = ۴}$

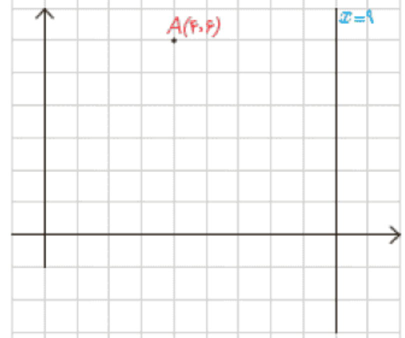
۲) معادله خط هادی آن $y = -۳$ است. چرا؟ $\quad y = -a+k \Rightarrow y = -۴+۱ \Rightarrow \boxed{y = -۳}$

۳) دهانه سهمی روبه بالاست. چرا؟ زیرا در صفحه مختصات کانون سهمی بالاتر از راس سهمی است

لذا معادله آن به صورت $(x-h)^2=4a(y-k)$ است و خواهیم داشت :

$$(x-2)^2=16(y-1)$$

**مثال :** مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس $A(4,6)$ و خط هادی $x=9$ بنویسید.




**حل :** با توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت :

۱) $a=5$ چرا؟ $A(4,6) \Rightarrow h=4, k=6\ ; x=a+h \Rightarrow a+4=9 \Rightarrow \boxed{a=5}$

۲) کانون آن به مختصات $F(-1,6)$ است، چرا؟ $F(-a+h,k) \Rightarrow F(-5+4,6) \Rightarrow F(-1,6)$

۳) دهانه سهمی رو به چپ است. چرا؟ زیرا راس سهمی سمت چپ خط هادی سهمی قرار دارد.

لذا معادله آن به‌صورت $(y-k)^2=-4a(x-h)$ است و خواهیم داشت :

$$(y-6)^2=-20(x-4)$$

## تبدیل معادلهٔ یک سهمی به‌صورت متعارف

چهار حالت معادله سهمی را که در جدول دوم مطرح شد، ۴ حالت شناخته شده (متعارف) درنظر می‌گیریم. اما در سال‌های قبل معادلاتی با عنوان معادله سهمی مطرح شدند که برخی از آنها در ظاهر به شکل معادلات مطرح شده در جدول نبودند. به‌طور مثال در پایهٔ دهم معادله‌ای به‌صورت $y=x^2+3x+5$ معادلهٔ یک سهمی نامیده شد. دقت کنید که ویژگی معادلهٔ سهمی این است که نسبت به یکی از دو متغیر $x$ و $y$ از درجه ۱ و نسبت به دیگری از درجه ۲ است. در ادامه نشان می‌دهیم معادله مطرح شده قابل تبدیل به یکی از ۴ حالت متعارف خواهد بود.

**مثال :** معادله یک سهمی به‌صورت $y=x^2+3x+5$ داده شده است. آن را به یکی از حالت‌های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

**حل :** داریم $x^2+3x=y-5$

$$\Rightarrow x^2+3x+\frac{9}{4}=y-5+\frac{9}{4} \Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2=y-\frac{11}{4}$$

لذا معادله یک سهمی است که دهانه آن رو به بالا، رأس آن $(-\frac{3}{2},\frac{11}{4})$ و $4a=1$ و در نتیجه $a=\frac{1}{4}$ است. بنابراین $F=(h,a+k)=(-\frac{3}{2},3)$ کانون آن و خط هادی آن به معادله $y=-a+k=\frac{5}{2}$ است. معادله محور سهمی به‌صورت $x=h=-\frac{3}{2}$ است.

با روش مشابه آنچه در مثال دیدید معادلات سهمی‌ها را می‌توان به یکی از حالات استاندارد نوشت.

## رسم سهمی

رسم دقیق یک منحنی توسط نرم‌افزارهای ریاضی انجام می‌گیرد. طبیعی است که در رسم منحنی‌ها با کاغذ و قلم، شکل حاصل شکل تقریبی منحنی مورد نظر خواهد بود.

برای رسم یک سهمی ابتدا معادله آن را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم و با توجه به آن، مختصات رأس سهمی، مقدار $a$ (فاصله کانونی)، مختصات $F$ (کانون) و خط هادی آن را به‌دست می‌آوریم و نیز درمی‌یابیم که دهانه سهمی رو به کدام طرف است.

یکی از مهم‌ترین نقاطی که باید در رسم سهمی جایگاه آن را مشخص نماییم، رأس سهمی است. اگر کانون سهمی را نیز مشخص نماییم دراین صورت خطی که از رأس و کانون سهمی عبور می‌کند محور تقارن سهمی است.

حال اگر خطی را که در نقطه $F$ بر محور تقارن سهمی عمود است رسم کنیم و روی آن دو نقطه، مثلاً $B$ و $B'$ را که به فاصله $2a$ از $F$ هستند مشخص نماییم، در این‌صورت نقاط $B$ و $B'$ بر سهمی واقع‌اند. چرا؟

بدون کاستن از کلیت مساله ، سهمی $x^2 = 4ay$ را در نظر می گیریم . کانون این سهمی نقطه $F(0,a)$ و محور تقارن آن محور $y$ ها است. اگر از کانون سهمی خطی عمود بر محور تقارن آن رسم کنیم . معادله آن خط $y = a$ می باشد و برای بدست آوردن نقاط $B , B'$ کافی است محل تقاطع آن را با سهمی بیابیم :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 4ay \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 4a(a) \Rightarrow x^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow x = \pm 2a \Rightarrow B(2a,a), B'(-2a,a)$$

$BB'$ را وتر کانونی سهمی می نامند و طول آن برابر $4a$ است

حال با داشتن رأس و دو نقطهٔ دیگر از سهمی و دانستن شکل کلی آن می‌توان شکل سهمی را به‌صورت تقریبی رسم کرد. قبل از رسم می‌توان نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات را نیز مشخص نمود.

**مثال :** نمودار معادله $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ را رسم کنید.

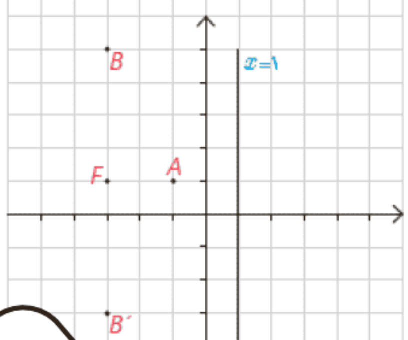
**حل :** ابتدا معادله را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم

$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1$$

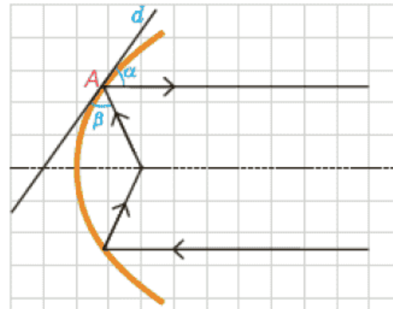
$$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+1)$$

لذا معادله فوق یک سهمی با رأس $A(h,k) = (-1,1)$ است که دهانه آن رو به چپ است. داریم : $-4a = -8 \Rightarrow a = 2$ و بنابراین $F(-a+h,k) = (-3,1)$ و معادله خط هادی آن به‌صورت $x = a + h = 1$ است.

در این‌صورت نقاط $B$ و $B'$ که هم طول با $F$ و به فاصله $2a = 4$ از $F$ باشند یعنی $B(-3و5)$ و $B'(-3و-3)$ نیز بر سهمی واقع‌اند. فاصله هریک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید. حال با وصل کردن نقاط $B$ و $A$ و $B'$ به‌صورت یک منحنی و ادامه آن، شکل تقریبی سهمی موردنظر را به‌دست آورید.



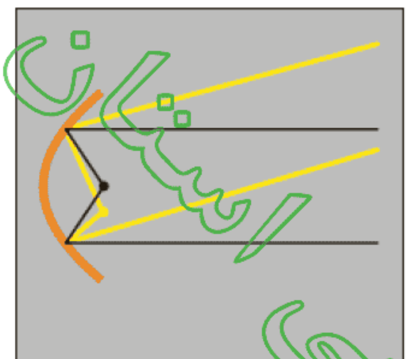
## ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها و کاربردهای آن

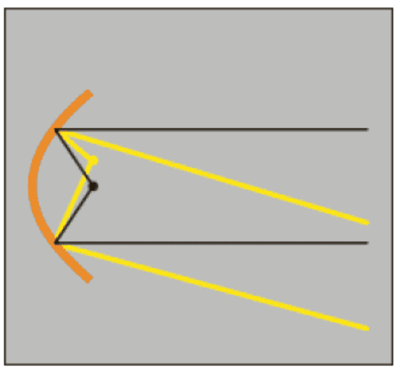



یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. درواقع اگر خط d برسهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه‌های $\alpha$ و $\beta$ برابرند.

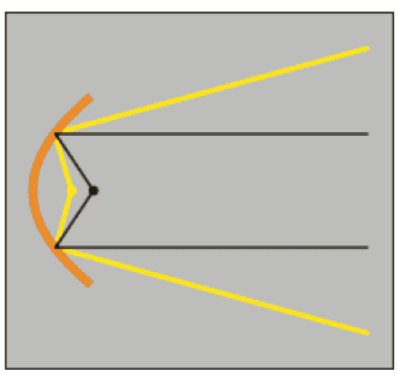
از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به‌طور مثال چراغ جلوی اتومبیل‌ها را معمولاً به‌گونه‌ای می‌سازند که جداره پشت لامپ به‌حالت سهمی باشد و جنس آینه‌ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می‌دهند. در این‌صورت حتی شعاع‌های نوری که به عقب تابیده می‌شوند پس از برخورد به جداره سهموی پشت لامپ به‌صورت شعاع‌هایی موازی با محور سهمی به‌جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری به‌وجود می‌آورند.

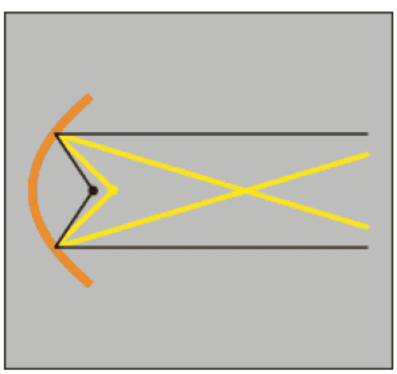
با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما روبه بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.





اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد شعاع‌های نور باهم موازی خارج نمی‌شوند.



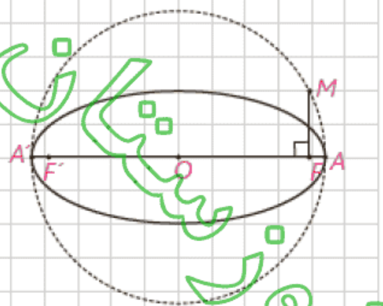


## تمرین

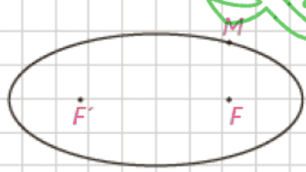
۱ــ دو نقطهٔ $A$ و $B$ روی یک بیضی و $F$ و $F'$ کانون‌های بیضی‌اند. $A$ به کانون $F'$ نزدیک‌تر و $B$ به کانون $F$ نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید :

الف) در حالتی‌که دو پاره‌خط $AF$ و $BF'$ یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

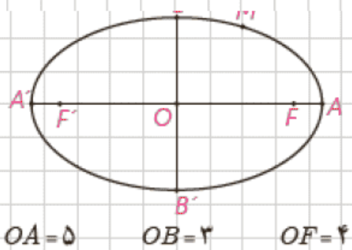
ب) در حالتی که $AF$ و $BF'$ یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند $M$ قطع کنند، مثلث $FMF'$ متساوی‌الساقین است و $M$ روی قطر کوچک بیضی است.




۲ــ قطر دایره $C$، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی $e$ است و از کانون $F$ عمودی بر $AA'$ رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند $M$ قطع کند. ثابت کنید $MF$ با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.




۳ــ در شکل مقابل نقطهٔ $M$ روی بیضی و کانون‌های $F$ و $F'$ مشخص شده‌اند. خط $d$ را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ $M$ بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ $F'$ خطی موازی با $MF$ رسم کنید تا خط $d$ را در نقطه‌ای مانند $N$ قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$

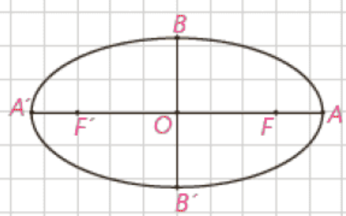



۴ــ نقطهٔ $M$ روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

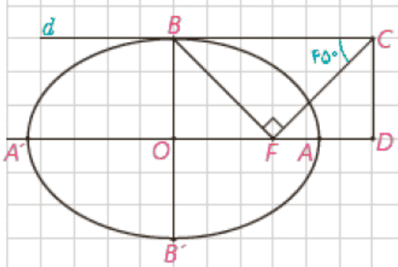
الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث $MFF'$ قائم‌الزاویه است.

ج) طول‌های $MF$ و $MF'$ را به‌دست آورید.




۵ــ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ $FBF'$ چند درجه است؟



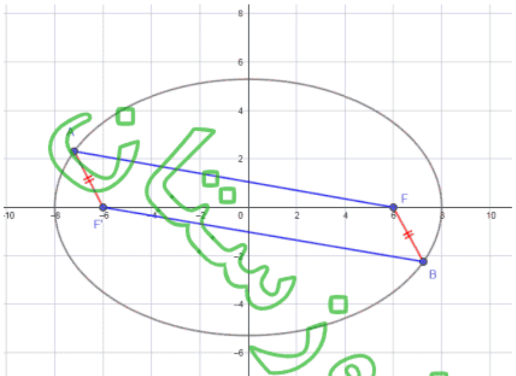

۶ــ در بیضی مقابل $AA'$ و $BB'$ دو قطراند. خط $d$ در نقطهٔ $B$ بر بیضی مماس است. پاره‌خط $BF$ را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ $F$ عمودی بر $BF$ رسم می‌کنیم تا خط $d$ را در نقطهٔ $C$ قطع کند و از $C$ عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آنرا در نقطه‌ای مانند $D$ قطع کند. اگر $B\hat{C}F = 45^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.

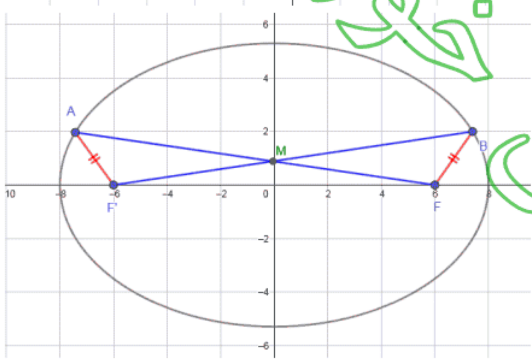
## پاسخ تمرین ۱ :

الف : اگر $AF, BF'$ یکدیگر را درون دایره قطع نکنند . چهار ضلعی $AFBF'$ را در نظر می گیریم .نقاط $A, B$ روی بیضی قرار دارند پس :

$$AF + AF' = BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF=AF'} AF + \cancel{BF} = \cancel{BF} + BF' \Rightarrow AF = BF'$$

به عبارت دیگر در چهار ضلعی $AFBF'$ اضلاع مقابل دو به دو مساوی اند لذا چهار ضلعی $AFBF'$ متوازی الاضلاع است پس : $AF \parallel BF'$





ب : : اگر $AF, BF'$ یکدیگر را درون دایره قطع کنند

.نقاط $A, B$ روی بیضی قرار دارند پس :

$$AF + AF' = BF + BF' = ۲a$$
$$\xrightarrow{BF=AF'} AF + \cancel{BF} = \cancel{BF} + BF' \Rightarrow AF = BF'$$

$$\left.\begin{array}{l} AF' = BF \\ AF = BF' \\ FF' = FF' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AFF' \cong \Delta BFF' \Rightarrow \angle A = \angle B$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle B \\ \angle M_۱ = \angle M_۲ \\ AF' = BF \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMF' \cong \Delta BMF \Rightarrow MF' = MF$$

از طرف دیگر قطر کوچک بیضی عمود منصف پاره خط $FF'$ می باشد.

لذا از راس $M$ در مثلث متساوی الساقین $FMF'$ می گذرد.

## پاسخ تمرین ۲

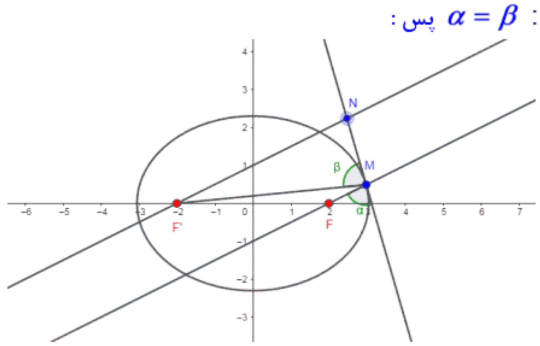
$$\Delta OFM : \angle F = ۹۰^\circ \Rightarrow FM^۲ = OM^۲ - OF^۲ \xrightarrow[OF=c]{FM=OA=a} FM^۲ = a^۲ - c^۲ \xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} FM^۲ = b^۲ \Rightarrow FM = b$$

## پاسخ تمرین ۳

مورب $MN, FM \parallel F'N \Rightarrow \angle N_۱ = \alpha$

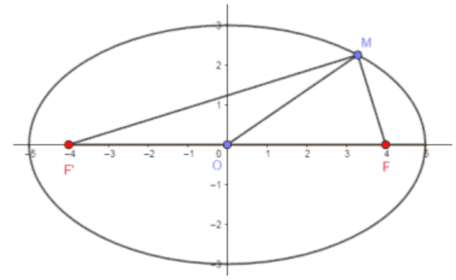
از طرف دیگر بنا به فعالیت ۴ می توان نوشت : $\alpha = \beta$ پس :

$$\angle N_۱ = \beta \Rightarrow F'M = F'N$$



پاسخ تمرین ۴

الف:




$$AA' = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5,\ BB' = 6 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow OF = OF' = OM = 4$$

ب : در مثلث $MFF'$ میانه $OM$ نصف ضلع $FF'$ است پس مثلث در راس $M$ قائمه است:

$$\Delta MFF' : OM = OF = OF' = \frac{1}{2} FF' \Rightarrow \angle M = 90^\circ$$

ج :

$$MF + MF' = 2a = 10 \Rightarrow MF' = 10 - MF$$

$$\Delta MFF' : \angle M = 90^\circ \Rightarrow MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow MF^2 + (10 - MF)^2 = 8^2$$

$$\xrightarrow{MF = x} x^2 + (10 - x)^2 = 64 \Rightarrow x^2 + 100 - 20x + x^2 - 64 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 18 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow MF = 2, MF' = 10 - 2 = 8 \\ or \\ x = 9 \Rightarrow MF = 9, MF' = 10 - 9 = 1 \end{cases}$$

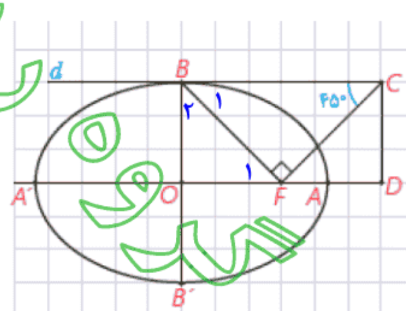
پاسخ تمرین ۵

$$AA' = 2BB' \Rightarrow a = 2b$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = (2b)^2 - b^2 = 3b^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}b \Rightarrow \frac{c}{b} = \sqrt{3}$$

$$\Delta BOF : \tan(B) = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle OBF = \angle OBF' = 60^\circ \Rightarrow \angle F'BF = 120^\circ$$

پاسخ تمرین ۵




$$BB' \perp d, BB' \perp AA' \Rightarrow d \parallel AA'$$

$$\Delta BCF : \angle F = 90^\circ, \angle C = 45^\circ \Rightarrow \angle B_1 = 45^\circ \Rightarrow \angle B_2 = \angle F_1 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow OB = OF \Rightarrow b = c \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}c$$

$$\frac{OF}{OA} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{OF}{OA - OF} = \frac{c}{a - c} \Rightarrow \frac{OF}{AF} = \frac{c}{\sqrt{2}c - c} = \frac{c}{(\sqrt{2} - 1)c} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{OF}{AF} = \sqrt{2} + 1}$$

$$\Delta OBF \cong \Delta FCD \Rightarrow OF = DF \Rightarrow \frac{DF}{AF} = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow \frac{DF - AF}{AF} = \frac{\sqrt{2} + 1 - 1}{1} \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \sqrt{2}$$

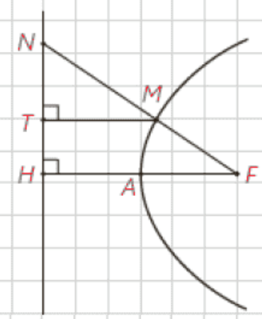
۷ــ سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۸ــ مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ را به دست آورید.

۹ــ معادله سهمی را بنویسید که $S(1,2)$ رأس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد.

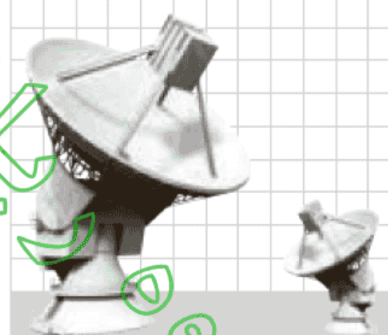
۱۰ــ سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

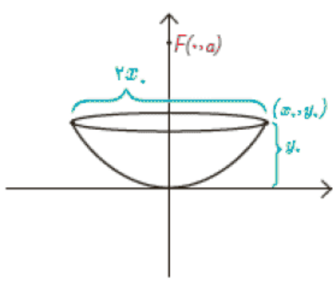
۱۱ــ سهمی $P$ با کانون $F$ و خط هادی $d$ مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از $F$ بگذرد و بر خط $d$ مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از $F$ گذشته و بر $d$ مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.




۱۲ــ در شکل سهمی با رأس $A$ و کانون $F$ و خط هادی $d$ رسم شده است. از $F$ به نقطهٔ دلخواه $M$ روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا $d$ را در $N$ قطع کند و از نقطهٔ $M$، $MT$ را بر $d$ عمود کرده‌ایم. ثابت کنید : $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$

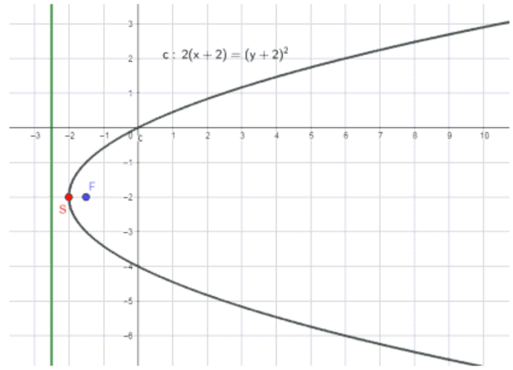
۱۳ــ یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن‌را به‌دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت : باید قطر دهانهٔ دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.






۱۴ــ فرض کنید از مثلث $ABC$، اندازه ضلع $BC$ و ارتفاع $AH$ و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوهٔ رسم این مثلث را توضیح دهید.

## پاسخ تمرین ۷




$$y^2 = 2x - 4y \Rightarrow y^2 + 4y = 2x \Rightarrow$$
$$y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$
$$S(-2,-2), 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\alpha + a, \beta) \Rightarrow F\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$$
$$x = \alpha - a \Rightarrow x = -2 - \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

## پاسخ تمرین ۸

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) \Rightarrow y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \Rightarrow y - c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow y - c + \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 \Rightarrow 4p = a \Rightarrow p = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow S\left|\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-b}{2a} \\ \beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{array}\right. \quad , \quad F\left|\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-b}{2a} \\ \beta + p = \dfrac{4ac - b^2}{4a} + \dfrac{a}{4} \end{array}\right. \Rightarrow F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{a^2 - b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

$$y = \beta - p = \frac{4ac - b^2}{4a} - \frac{a}{4} = \frac{4ac - b^2 - a^2}{4a} \Rightarrow y = \frac{4ac - b^2 - a^2}{4a}$$

## پاسخ تمرین ۹

$$S(1,2) \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$$

چون $S , F$ طولهای برابر دارند و نقطه $S$ در صفحه مختصات بالاتر از $F$ قرار دارد. سهمی ، قائم می باشد و تقعر آن رو به پایین است لذا:

$$F(1,-2) \Rightarrow \alpha = 1, \beta - a = -2 \Rightarrow 2 - a = -2 \Rightarrow \boxed{a = +4 > 0}$$
$$(x - \alpha)^2 = -4a(y - \beta) \Rightarrow (x-1)^2 = -16(y-2)$$

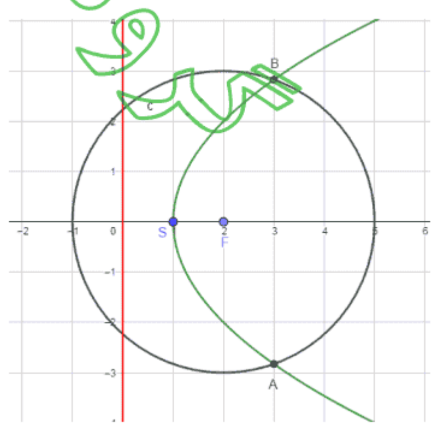
## پاسخ تمرین ۱۰

$$y^2 = 4x - 4 \Rightarrow (y - 0)^2 = 4(x - 1) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \end{array}\right. \Rightarrow F(\alpha + a, \beta) \Rightarrow F(2,0)$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 9 \xrightarrow{y^2 = 4x - 4} (x-2)^2 + 4x - 4 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x - 4 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y^2 = 4(3) - 4 = 8 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8} \\ x = -3 \Rightarrow y^2 = 4(-3) - 4 = -16 \quad \otimes \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(3, 2\sqrt{2}) , B(3, -2\sqrt{2})$$

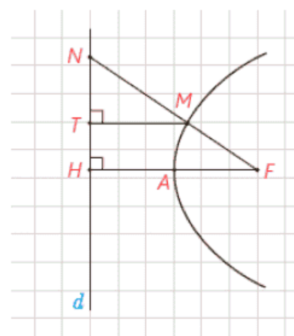


پاسخ تمرین ۱۱ : فرض کنیم $A$ نقطه ی دلخواهی روی سهمی باشد. به مرکز $A$ و شعاع $AF$ دایره ای رسم می کنیم بنا به تعریف سهمی هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی آن به یک فاصله است پس دایره رسم شده باید بر خط $d$ مماس باشد.

بعکس فرض کنیم دایره $C(A,r)$ از $F$ می گذرد و بر $d$ در نقطه $H$ مماس است . بدیهی است که $AF = AH = r$ پس نقطه $A$ از کانون و خط هادی سهمی به یک فاصله است لذا $A$ روی سهمی قرار دارد.

**نتیجه : هر سهمی مکان هندسی مرکز دایره ای از صفحه است که از یک نقطه ثابت آن صفحه می گذرد و بریک خط ثابت از آن صفحه مماس است.**

پاسخ تمرین ۱۲ : $M , A$ دو نقطه روی سهمی اند پس فاصله آنها از کانون و خط هادی سهمی برابر است یعنی :




$$MT = MF \,,\, AH = AF \Rightarrow FH = 2AF$$

$$\Delta FNH : TM \parallel FH \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{TM}{FH} = \frac{NM}{NF} \xrightarrow[FH=2FA]{TM=MF} \frac{MF}{2FA} = \frac{NM}{NF} \Rightarrow \frac{NF}{2FA} = \frac{NM}{MF} \quad \boxed{1}$$

$$\Delta FNH : TM \parallel FH \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{TN}{TH} = \frac{NM}{MF} \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{1},\boxed{2} \Rightarrow \frac{NF}{2FA} = \frac{TN}{TH} \xrightarrow{\times 2} \frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

پاسخ تمرین ۱۳ : با توجه به شکل ، سهمی داده شده قائم است و راس آن مبدا مختصات می باشد پس معادله آن به صورت مقابل است: $x^2 = 4ay$

اگر $(x_\circ , y_\circ)$ نقطه ای روی سهمی باشد به راحتی می توان فاصله کانونی را به شکل مقابل حساب نمود : $x_\circ^2 = 4ay_\circ \Rightarrow a = \frac{x_\circ^2}{4y_\circ}$

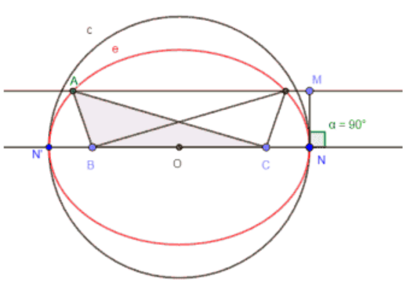
حال به روش ارائه شده بپردازیم : قطر دهانه دیش $2x_\circ$ و عمق دیش $y_\circ$ است پس بنا به روش مساله داریم : $a = \frac{x_\circ^2}{4y_\circ} = \frac{4x_\circ^2}{16y_\circ} = \frac{\frac{2x_\circ \times 2x_\circ}{y_\circ}}{16}$

پاسخ تمرین ۱۴ : فرض کنیم $AH = h_a \,, BC = a$ و محیط مثلث $ABC$ برابر $2p$ باشد.

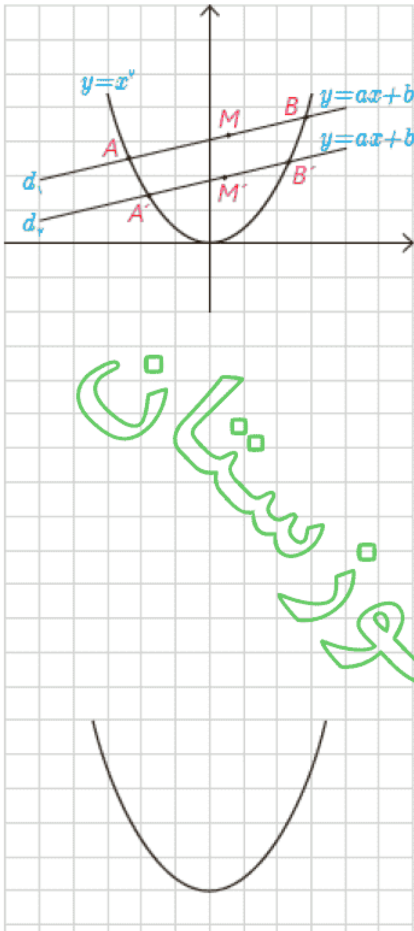
پاره خط $BC = a$ را رسم نموده و وسط آن را $O$ می نامیم . دایره ای به مرکز $O$ و قطر $2p - a$ رسم می کنیم و $BC$ را امتداد می دهیم تا دایره را در نقاط $N , N'$ قطع کند . سپس یک بیضی به کانونهای $B$ , $C$ که از $N$ یا $N'$ بگذرد بدیهی است که $NN'$ قطر بزرگ بیضی است و $NN' = 2p - a$ .

اگر $A$ نقطه ی دلخواهی از بیضی باشد : $AB + AC = NN' \Rightarrow AB + AC = 2p - a \Rightarrow AB + AC + BC = 2p - a + a = 2p$

از نقطه $N$ عمود $MN = h_a$ را از $NN'$ خارج نموده و از $M$ خطی موازی $NN'$ رسم می کنیم . محل تقاطع خط و بیضی را $A$ می نامیم و مثلث $ABC$ را رسم می کنیم مثلث $ABC$ پاسخ مساله است.



۱۵ــ سهمی $y=x^2$ و دو خطِ موازی $d_1:\ y=ax+b$ و $d_2:\ y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند، درنظر بگیرید.




الف) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط $d_1$ و سهمی $y=x^2$ باشد.

ب) فرض کنید $A$ و $B$ نقاط برخورد خط $d_1$ و سهمی باشند و نقطهٔ $M$ وسط پاره‌خط $AB$ باشد، مختصات نقطهٔ $M$ را به‌دست آورید.

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط $d_2$ به جای $d_1$ انجام دهید و مختصات نقطهٔ $M'$ (نقطهٔ وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط $d_2$ و سهمی) به‌دست آورید.

ت) خط $MM'$ نسبت به محور $y$ها چه وضعی دارد؟

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

**پاسخ تمرین ۱۵ :**

**الف ، ب ، پ:**

$$\left.\begin{array}{l} y=x^{۲} \\ y=ax+b \end{array}\right\} \Rightarrow x^{۲}=ax+b \Rightarrow x^{۲}-ax-b=۰ \Rightarrow x_{A}=\alpha , x_{B}=\beta \Rightarrow A\left(\alpha,\alpha^{۲}\right),B\left(\beta,\beta^{۲}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^{۲} \\ y=ax+b' \end{array}\right\} \Rightarrow x^{۲}=ax+b' \Rightarrow x^{۲}-ax-b'=۰ \Rightarrow x_{A'}=\alpha' , x_{B'}=\beta' \Rightarrow A'\left(\alpha',\alpha'^{۲}\right),B'\left(\beta',\beta'^{۲}\right)$$

$$x^{۲}-ax-b=۰ \Rightarrow S=\alpha+\beta=a , P=\alpha\beta=-b$$

$$M\left|\begin{array}{l} \dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{\alpha+\beta}{۲}=\dfrac{a}{۲} \\ \dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}{۲}=\dfrac{S^{۲}-۲P}{۲}=\dfrac{a^{۲}+۲b}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow M\left(\dfrac{a}{۲} \, , \, \dfrac{a^{۲}+۲b}{۲}\right)$$

$$x^{۲}-ax-b'=۰ \Rightarrow S=\alpha'+\beta'=a , P'=\alpha'\beta'=-b'$$

$$M'\left|\begin{array}{l} \dfrac{x_{A'}+x_{B'}}{۲}=\dfrac{\alpha'+\beta'}{۲}=\dfrac{a}{۲} \\ \dfrac{y_{A'}+y_{B'}}{۲}=\dfrac{\alpha'^{۲}+\beta'^{۲}}{۲}=\dfrac{S'^{۲}-۲P'}{۲}=\dfrac{a'+۲b'}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow M'\left(\dfrac{a}{۲} \, , \, \dfrac{a^{۲}+۲b'}{۲}\right)$$

ت : موازی اند ، زیرا $M , M'$ دارای طولهای مساوی اند ومعادله خط $MM'$ بصورت $x=\dfrac{a}{۲}$ است.

ث : ابتدا دو خط موازی $d',d$ را چنان رسم می کنیم که سهمی را در نقاط $A',B',A,B$ قطع کند. سپس وسطهای پاره خطهای $A'B',AB$ را به ترتیب $M',M$ می نامیم .

از راس سهمی خط $L$ را موازی خط $MM'$ رسم می کنیم . خط $L$ پاسخ مساله است.