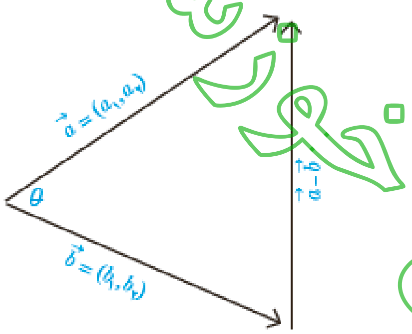
درس دوم

ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

فرض کنید دوبردار $\vec{a}=(a_1,a_2)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2)$ همانند شکل داده شده‌اند.



می‌خواهیم زاویه بین این دو بردار (θ) را پیدا کنیم.

برای این منظور بردار تفاضل $\vec{a}-\vec{b}$ را نیز در این شکل رسم کرده‌ایم تا مثلثی به طول اضلاع زیر به‌دست آید.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها که سال گذشته آموخته‌اید می‌توان نوشت.

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از طرفی صورت کسر فوق را می‌توان با توجه به اندازه‌های اضلاع مثلث که قبلاً محاسبه شده‌اند به‌صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)=\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2)=a_1b_1+a_2b_2$$

پس عبارت (۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است.)

۹۹

با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار $0 \le \theta \le \pi$ به‌دست می‌آید.

کمیتی که در صورت این کسر سمت راست است را معمولاً با $\vec{a}.\vec{b}$ نشان می‌دهند و به آن حاصل‌ضرب داخلی یا حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار $\vec{a}, \vec{b}$ می‌گویند. بنابراین می‌توان نوشت.

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

به‌طور مشابه حاصل‌ضرب داخلی دو بردار در $\mathbb{R}^3$ نیز قابل تعریف است.

تعریف: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند؛ در این‌صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می‌توان نشان داد که اگر $0 \le \theta \le \pi$ زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{a}, \vec{b}$ در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دوبردار $\vec{a}, \vec{b}$ صفر باشند آنگاه $\vec{a}.\vec{b}=0$ هر چند که در این حالت زاویه θ بین دو بردار تعریف نمی‌شود.

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را پیدا می‌کنیم.

حل: ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{a}.\vec{b}=(2\times1)+(-1\times-1)+(2\times0)=3$$

از طرفی اگر $0 \le \theta \le \pi$ زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow 3=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

خواص ضرب داخلی

۱ــ $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ خاصیت جابه‌جایی

اثبات : $\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=b_۱a_۱+b_۲a_۲+b_۳a_۳=\vec{b}.\vec{a}$

۲ــ $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

اثبات : $\vec{a}.\vec{a}=a_۱a_۱+a_۲a_۲+a_۳a_۳=a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲=|\vec{a}|^۲$

۳ــ $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ خاصیت شرکت‌پذیری

اثبات : $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=a_۱(b_۱+c_۱)+a_۲(b_۲+c_۲)+a_۳(b_۳+c_۳)$

$= a_۱b_۱+a_۱c_۱+a_۲b_۲+a_۲c_۲+a_۳b_۳+a_۳c_۳$

$= a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳+a_۱c_۱+a_۲c_۲+a_۳c_۳$

$= \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}$

۴ــ برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$: $\quad$ a و b برهم عمود هستند $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=۰$

$$\vec{a}.\vec{b}=۰ \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۰ \underset{|\vec{b}|\neq۰}{\overset{|\vec{a}|\neq۰}{\Leftrightarrow}} \cos\theta=۰ \overset{۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}}{\Leftrightarrow} \theta=\frac{\pi}{۲}$$

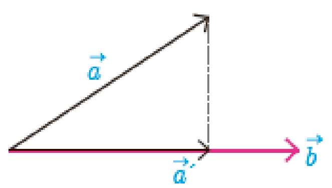
۵ــ $\vec{a}.\vec{o}=۰\ ,\ \vec{o}.\vec{a}=۰$

۶ــ $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ (نامساوی کشی شوارتز) منظور از $|\vec{a}.\vec{b}|$ قدر مطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ است.

$$|\vec{a}.\vec{b}|=\Big||\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Big|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

که در آخرین نامساوی از $|\cos\theta|\le ۱$ استفاده شده است.

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$



دو بردار غیرصفر $\vec{a}, \vec{b}$ را که زاویه بین آنها θ است با فرض $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ که آن را با $\vec{a'}$ نمایش داده‌ایم به‌دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک r حقیقی $\vec{a'}=r\vec{b}$.

با توجه به اینکه بردار تفاضل $\vec{a}$ از $\vec{a'}$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است. خواهیم داشت :

$$(\vec{a}-\vec{a'}).\vec{b}=۰ \Rightarrow (\vec{a}-r\vec{b}).\vec{b}=۰ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}-r\vec{b}.\vec{b}=۰ \Rightarrow r=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}$$

بنابراین بردار تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\vec{a'}=r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

مثال: تصویر قائم بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(1,-1,0)$ بیابید.

$$\vec{a}.\vec{b}=2\times1+(-1)(-1)+(2)(0)=3$$

$$|b|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$a'=\frac{a.b}{|b|^2}b=\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}(1,-1,0)=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0)$$

کاردرکلاس

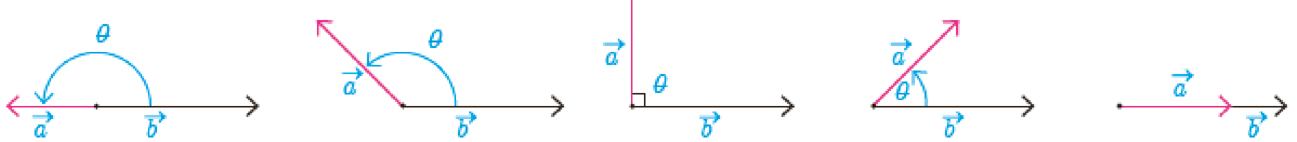
۱ــ تصویر بردار $\vec{i}=(1,0,0)$ بر امتداد بردار $\vec{j}=(0,1,0)$ را بیابید.

۲ــ نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می‌شود.

۳ــ نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

۴ــ هر یک از حالات زیر را با شکل‌های داده شده نظیر کنید.

الف) $\vec{a}.\vec{b}>0$ — ب) $\vec{a}.\vec{b}=0$ — پ) $\vec{a}.\vec{b}<0$ — ت) $\vec{a}.\vec{b}=|a||b|$ — ج) $\vec{a}.\vec{b}=-|a||b|$



$\theta=0$ — $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ — $\theta=\frac{\pi}{2}$ — $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ — $\theta=\pi$

پاسخ سوال ۱ کار در کلاس

$$\vec i=(1,0,0),\vec j=(0,1,0)\Rightarrow \vec i.\vec j=1\times0+0\times1+0\times0=0\ ,\ \vec j^{2}=0^{2}+1^{2}+0^{2}=1$$

$$\vec i'=\frac{\vec i.\vec j}{\vec j^{2}}\vec j=\frac{0}{1}(0,1,0)=(0,0,0)=\vec o$$

پاسخ سوال ۲ کار در کلاس

فرض کنیم $\vec a=(a_1,a_2,a_3)\neq\vec o,\vec b=(b_1,b_2,b_3)\neq\vec o$ و $\vec a\perp\vec b$ در این صورت $\vec a.\vec b=0$ و تصویر $\vec a$ بر $\vec b$ برابر است با

$$\vec a'=\frac{\vec a.\vec b}{\vec b^{2}}\vec b=\frac{0}{b_1^{2}+b_2^{2}+b_3^{2}}(b_1,b_2,b_3)=(0,0,0)=\vec o$$

پاسخ سوال ۳ کار در کلاس

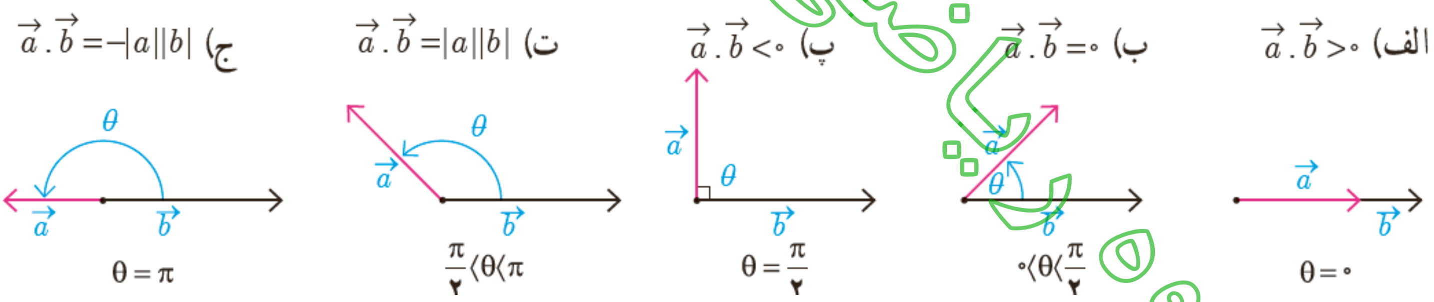
فرض کنیم $\vec a=(a_1,a_2,a_3)\neq\vec o,\vec b=(b_1,b_2,b_3)\neq\vec o$ و $\vec a=k\vec b\neq\vec o$ در این صورت

$$\vec a.\vec b=k\vec b.\vec b=k\vec b^{2}$$

پس تصویر $\vec a$ بر $\vec b$ برابر است با

$$\vec a'=\frac{\vec a.\vec b}{\vec b^{2}}\vec b=\frac{k\vec b^{2}}{\vec b^{2}}\vec b=k\vec b=\vec a$$

پاسخ سوال ۳ کار در کلاس



ت | الف | ب | پ | ج

ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می‌توان ضرب دو بردار را به گونه‌ای تعریف کرد که حاصل‌ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

تعریف: فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2\,,\,a_3b_1-a_1b_3\,,\,a_1b_2-a_2b_1)$$

اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار غیرصفر و θ زاویه بین آنها باشد اندازه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ می‌شود :

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|(a_2b_3-a_3b_2\,,\,a_3b_1-a_1b_3\,,\,a_1b_2-a_2b_1)|^2$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$=a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_1^2+a_1^2b_3^2-2a_1a_3b_1b_3+$$

$$a_3^2b_1^2+a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2$$

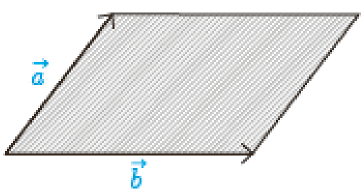
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_3)^2=|a|^2|b|^2-(a.b)^2$$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta=$$

$$(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)^2$$

بنابراین $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

از هندسه سال قبل می‌دانیم که سمت راست عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که اندازه اضلاع آن برابر $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ است.



مثال : بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. حاصل $\vec{i}\times\vec{j}$ و $\vec{j}\times\vec{i}$ را به‌دست آورید.

$$\vec{i}\times\vec{j}=(1,0,0)\times(0,1,0)$$

$$=((0)(0)-(0)(1),(0)(0)-(1)(0),(1)(1)-(0)(0))=(0,0,1)=\vec{k}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=(0,1,0)\times(1,0,0)$$

$$=((1)(0)-(0)(0),(0)(0)-(0)(1),(0)(0)-(1)(1))=(0,0,-1)=-\vec{k}$$

همان‌طور که مشاهده شد حاصل‌ضرب خارجی دو بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ برابر با بردار $\vec{k}$ شد که بر هر دوی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ عمود می‌باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می‌باشد.

خاصیت ۱ : فرض کنید $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0 \quad , \quad \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که $\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

بنابراین با توجه به آنچه تاکنون به‌دست آمده است می‌توان گفت ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی‌الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می‌توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است.

اثبات این خاصیت در ادامه می‌آید.

اثبات :

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

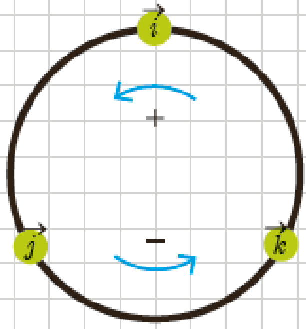
$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=b_1(a_2b_3-a_3b_2)+b_2(a_3b_1-a_1b_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

می‌توان نشان داد که برای سه برداری که $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روابط زیر برقرار است :

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \ , \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \ , \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \ , \ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} \ , \ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

معمولاً این روابط را به‌صورت نمودار چرخشی نیز نمایش می‌دهند.



خاصیت ۲ : $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

خاصیت ۳ : $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$.

خاصیت ۴ : اگر r عددی حقیقی باشد، آنگاه : $r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$.

خاصیت ۵ : برای سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ داریم :

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

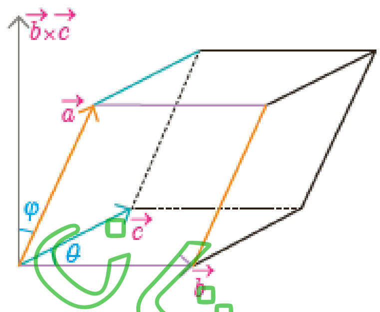
خاصیت ۶ : دو بردار غیر صفر $\vec{a},\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.

اثبات :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\Leftrightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0\Leftrightarrow\sin=0\Leftrightarrow\theta=0 \text{ یا } \theta=\pi\Leftrightarrow\vec{a}\|\vec{b}$$

حجم متوازی السطوح

اگر $\vec b$ ، $\vec a$ و $\vec c$ سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می‌توان به کمک آنها متوازی‌السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.



همان‌طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی‌السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار $\vec a$ بر روی بردار $\vec b\times\vec c$ یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec a.(\vec b\times\vec c)}{|\vec b\times\vec c|^2}(\vec b\times\vec c)$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec b$ و $\vec c$ تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|\vec b\times\vec c|$. با استفاده از دترمینان نیز می‌توان مساحت متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\vec a=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec b=(b_1,b_2,b_3)$ به صورت زیر به دست آورد :

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S=|\vec a\times\vec b|$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح به صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = \text{مساحت قاعده} \times \text{اندازه ارتفاع} = |\vec b\times\vec c|\left|\frac{\vec a.(\vec b\times\vec c)}{|\vec b\times\vec c|^2}(\vec b\times\vec c)\right| = |\vec a.(\vec b\times\vec c)|$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متوازی‌السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی‌السطوح برابر است با $|\vec a.(\vec b\times\vec c)|$. حجم متوازی‌السطوح پدید آمده توسط سه بردار $\vec b=(b_1,b_2,b_3)$ ، $\vec a=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec c=(c_1,c_2,c_3)$ با استفاده از دترمینان زیر نیز به دست می‌آید.

$$K=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حجم} = V = |K|$$

یا $K=a.(b\times c)$.

اگر $K=0$ در این صورت چه نتیجه‌ای می گیرید؟

مثال : حجم متوازی‌السطوحی را به‌دست آورید که توسط بردارهای $\vec a=(1,1,0)$, $\vec b=(0,1,1)$, $\vec c=(1,0,1)$ تولید می‌شود.

حل : با استفاده از ضرب خارجی b در بردار c به‌دست می‌آید.

$$\vec b\times\vec c=(1,1,-1)$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح به‌دست می‌آید.

$$V=|\vec a.(\vec b\times\vec c)|=|(1,1,0).(1,1,-1)|=|1+1+0|=2$$

پیش‌تر اشاره شد که اگر سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح و نیز $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$ برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

مثال : آیا بردارهای $\vec{a}=(۲,۳,-۱), \vec{b}=(۱,-۱,۳), \vec{c}=(۱,۹,-۱)$ در یک صفحه‌اند؟

حل : برای این منظور کافی است $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ را به‌دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$$\vec{b}\times\vec{c}=(-۱۶,۱۴,۱۰)\Rightarrow \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=-۳۲+۴۲-۱۰=۰\Rightarrow$$ سه بردار در یک صفحه هستند.

تمرین

۱ــ برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به‌دست آورید.

الف) $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ ، $\vec{b}=\vec{i}$ ب) $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ ، $\vec{\ }=(۳,۲,۱)$

ج) $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ ، $\vec{b}=(-۱,۲,۴)$

۲ــ فرض کنید $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را محاسبه کنید.

۳ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۴ــ اگر $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$, $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید.

۵ــ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$, $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ پیدا کنید.

۶ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷ــ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که $|\vec{a}|=۳$ ، $|\vec{b}|=۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$. مقدار $a.b$ را محاسبه کنید.

۸ــ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A=(۳,۵,۷)$, $b=(۵,۵,۰)$, $A=(-۴,۰,۴)$ داده شده است را بیابید.

پاسخ تمرین ۱

الف

$$\vec{a}=(2,-1,2)\ ,\vec{b}=(1,0,0)\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=2\times 1+(-1)\times 0+2\times 0=2,\vec{b}^{2}=1^{2}+0^{2}+0^{2}=1$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}^{2}}\vec{b}=\frac{2}{1}(1,0,0)=(2,0,0)$$

ب

$$\vec{a}=(2,3,1)\ ,\vec{b}=(3,2,1)\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=2\times 3+3\times 2+1\times 1=13,\vec{b}^{2}=3^{2}+2^{2}+1^{2}=14$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}^{2}}\vec{b}=\frac{13}{14}(3,2,1)=\left(\frac{39}{14},\frac{26}{14},\frac{13}{14}\right)$$

ج

$$\vec{a}=(1,1,0)\ ,\vec{b}=(-1,2,4)\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=1\times(-1)+1\times 2+0\times 4=1,\vec{b}^{2}=(-1)^{2}+2^{2}+4^{2}=21$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}^{2}}\vec{b}=\frac{1}{21}(-1,2,4)=\left(\frac{-1}{21},\frac{2}{21},\frac{4}{21}\right)$$

پاسخ تمرین ۲

$$|\vec{a}|=2\ ,|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=3$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\xrightarrow{\cdot\vec{a}}\vec{a}^{2}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=0\quad \boxed{1}$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\xrightarrow{\cdot\vec{b}}\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^{2}+\vec{b}.\vec{c}=0\quad \boxed{2}$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\xrightarrow{\cdot\vec{c}}\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}^{2}=0\quad \boxed{3}$$

$$\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3}\Rightarrow \vec{a}^{2}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^{2}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}^{2}=0$$

$$\Rightarrow 2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{a}.\vec{c}+2\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}^{2}+\vec{b}^{2}+\vec{c}^{2}=0\Rightarrow 2\left(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}\right)+4+1+9=0$$

$$2\left(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}\right)=-14\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}=-7$$

پاسخ تمرین ۳

با فرض $\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(3,2,-1),\vec{c}=(5,-2,1)$ داریم :

$$\vec{a}.\vec{b}=1\times 3+1\times 2+1\times(-1)=4$$

$$\vec{a}.\vec{c}=1\times 5+1\times(-2)+1\times 1=4$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}\ ,\vec{b}\neq\vec{c}$$

پاسخ تمرین ۴

پس : $\vec{a}=(۱,-۳,۴),\vec{b}=(۳,-۴,۲),\vec{c}=(-۱,۱,۴)$

$$\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}=(۳,-۴,۲)+(-۱,۱,۴)=(۲,-۳,۶)$$
$$\vec{a}.\vec{d}=۱\times۲+(-۳)(-۳)+۴\times۶=۲+۹+۲۴=۳۵$$
$$\vec{d}^{۲}=۲^{۲}+(-۳)^{۲}+۶^{۲}=۴+۹+۳۶=۴۹$$
$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{d}}{\vec{d}^{۲}}\vec{d}=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)=\frac{۵}{۷}(۲,-۳,۶)=\left(\frac{۱۰}{۷},\frac{-۱۵}{۷},\frac{۳۰}{۷}\right)$$

پاسخ تمرین ۵

$$\vec{a}=(۱,-۳,۲),\vec{b}=(-۲,۱,۵)$$

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۳ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۵ \end{vmatrix}=۷\vec{i}-۹\vec{j}-۵\vec{k}\Rightarrow\vec{c}=(۷,-۹,-۵)\ ,\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$$

پاسخ تمرین ۶

با فرض $\vec{a}=(۱,۲,۳),\vec{b}=(۲,۴,۶),\vec{c}=(-۱,-۲,-۳)$ داریم :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{vmatrix}=\vec{o}\quad ,\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & -۳ \end{vmatrix}=\vec{o}$$
$$\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\ ,\vec{b}\neq\vec{c}$$

پاسخ تمرین ۷

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow ۷۲=۳\times۲۶\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}$$
$$\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}}=\pm\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}}=\pm\frac{۵}{۱۳}$$
$$\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۳\times۲۶\times\left(\pm\frac{۵}{۱۳}\right)=\pm۳۰$$

پاسخ تمرین ۸

$$A(۳,۵,۷),B(۵,۵,۰),C(-۴,۰,۴)$$
$$\overrightarrow{AB}=(۲,۰,-۷)\ ,\ \overrightarrow{AC}=(-۷,-۵,-۳)$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۰ & -۷ \\ -۷ & -۵ & -۳ \end{vmatrix}=-۳۵\vec{i}+۵۵\vec{j}-۱۰\vec{k}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-۳۵)^{۲}+۵۵^{۲}+(-۱۰)^{۲}}=\sqrt{۴۳۵۰}$$
$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{\sqrt{۴۳۵۰}}{۲}$$