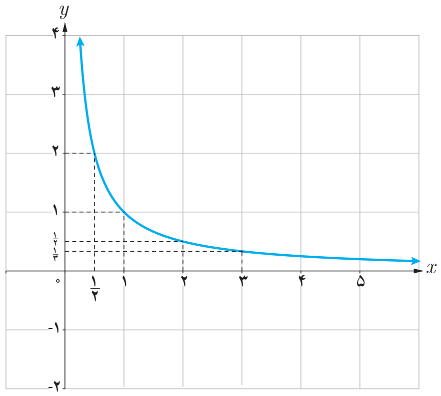
درس ۲

حد در بی‌نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن x به چه عددی $f(x)$ به دلخواه بزرگ‌تر می‌شود.
در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (نزدیک شدن) x مقادیر $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازه $(۰\,,+\infty)$ در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۵}$	$۱۰^{۶}$
$f(x)$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۵}$	۰/۱	۰/۰۱	$۱۰^{-۳}$	$۱۰^{-۵}$	$۱۰^{-۶}$

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۵}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟ ۵

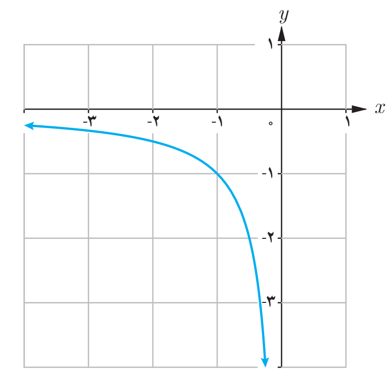
۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۱۰}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟ ۱۰

۴ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچک‌تر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟ ۱۰۰

۵ آیا فاصله $f(x)$ تا محور xها را می‌توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟ بله با انتخاب مقدارهای خیلی بزرگ برای X

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود می‌توان $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل کند برابر صفر است و می‌نویسیم. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$

کار در کلاس



نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازه $(-\infty\,,\,۰)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	-۲	-۵	-۱۰	-۱۰۰	$-۱۰^{۳}$	$-۱۰^{۴}$	...
$f(x)$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۵}$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۱۰^{-۳}$	$-۱۰^{-۴}$	...

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها کمتر از $\frac{۱}{۳}$ شود، x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟ -۳

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۱۰^{۶}}$ کمتر شود. x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟ $-۱۰^{-۶}$

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و جدول بالا می‌توان مشاهده کرد اگر x به اندازه کافی کوچک‌تر (یعنی از هر عدد منفی کوچک‌تر) شود آن‌گاه $f(x)$ را می‌توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$

تذکر : منظور از $x \to \pm\infty$ آن است که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحهٔ قبل به‌طور خلاصه می‌توان نوشت :

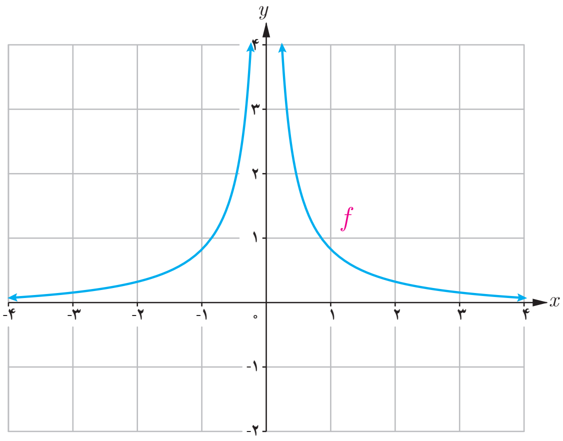
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۱}{x} = ۰$$

تعریف :

- اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a , +\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.
- اگر تابع f در بازه $(-\infty , a)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

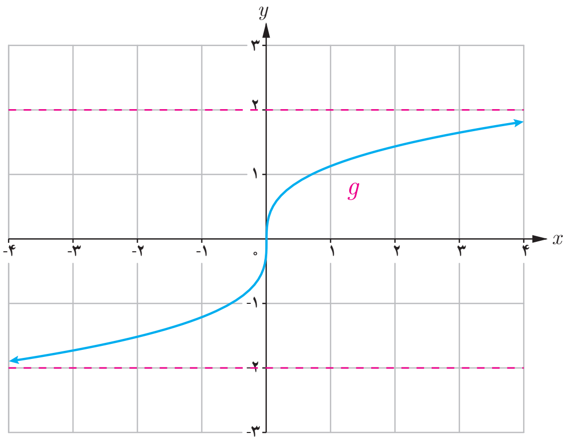
کار در کلاس

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به‌دست آورید.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$



$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)$$

قضیه ۶ : اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a}{x^n}=۰$

مثال : حاصل هر یک از حدود $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{۲}}{x^۲}$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-۵}{۲x^۳}$ برابر صفر است.

قضیه ۷ : اگر $L_۱$ و $L_۲$ اعداد حقیقی و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L_۱$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L_۲$ آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\pm g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\pm\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L_۱\pm L_۲$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f.g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\,.\,\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L_۱\,L_۲$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\dfrac{L_۱}{L_۲}$ (با فرض $L_۲\neq ۰$)

تذکر : قضیه فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می‌کند نیز برقرار است.

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳+\dfrac{۵}{x^۳})$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲+\dfrac{۳}{x^۲}}{\dfrac{۵}{x}+۴}$

حل :

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

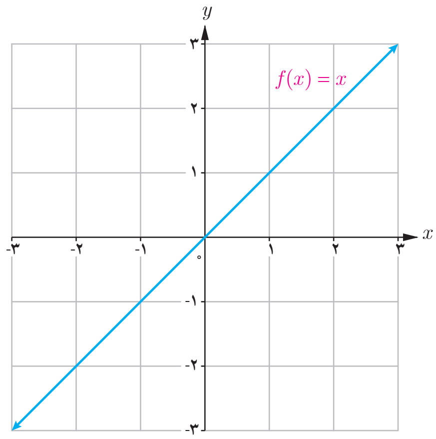
$$\lim_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x^۳})=\lim_{x\to+\infty}۳+\lim_{x\to+\infty}\frac{۵}{x^۳}=۳+۰=۳$$

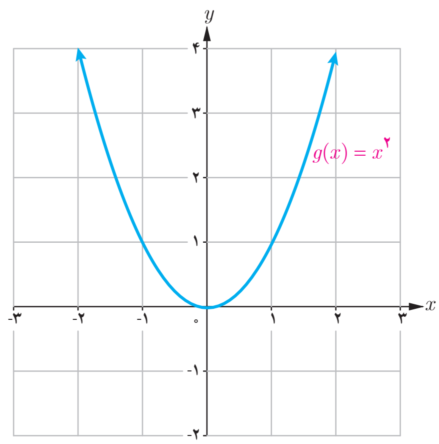
ب) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲+\dfrac{۳}{x^۲}}{\dfrac{۵}{x}+۴}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}۲+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۳}{x^۲}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۵}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}۴}=\frac{۲+۰}{۰+۴}=\frac{۱}{۲}$$

حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند. ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ‌تر شوند همان‌طور که در نمودار توابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^{۲}$ در شکل زیر دیده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ‌تر می‌شود.





همچنین با کوچک شدن مقادیر x، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچک‌تر می‌شود. در نمودارهای بالا می‌توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود.

در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a\,,+\infty)$ تعریف شده است اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

برای مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{۲}=+\infty$

همچنین اگر با میل کردن x به‌سمت $+\infty$، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^{۲}=-\infty$

کوه تفتان، سیستان و بلوچستان (عکاس: سیدمهدی حسینی)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ یعنی با کاهش مقدار x مقدار تابع f به ازای هر عدد مثبت بزرگتر می شود

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ یعنی با کاهش مقدار x مقدار تابع f به ازای هر عدد منفی کوچکتر می شود

کار در کلاس

۱ مفاهیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ را بیان کنید.

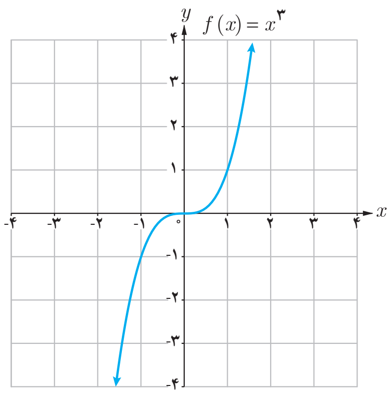
۲ با توجه به نمودار توابع $y=x$ و $y=x^2$ حدود زیر را مشخص کنید.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

فعالیت

تابع $f(x)=x^3$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	$\dots\leftarrow$	-10^6	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^6	$\rightarrow\dots$
$f(x)$	$\dots\leftarrow$	-10^{-18}	-10^{-9}	-10^6	-1	1	1000	10^6	10^9	10^{18}	$\rightarrow\dots$

۲ با افزایش (کاهش) x، مقدار $f(x)$ چه تغییری می کند؟

با افزایش X مقدار تابع f افزایش وبا کاهش مقدار X مقدار تابع کاهش می یابد

۳ در مورد حدهای $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

قضیه ۸ : اگر n عددی طبیعی باشد آن‌گاه

الف) اگر n زوج باشد : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$

ب) اگر n فرد باشد : $\left.\begin{aligned}\lim\limits_{x\to+\infty} x^n &= +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n &= -\infty\end{aligned}\right\}$

قضیه ۹ : اگر l عددی حقیقی و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x).\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

تذکر : قضیه ۹ در حالتی که $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

قضیه ۱۰ : اگر l عددی حقیقی و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x\to-\infty} f(x).\lim_{x\to-\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

تذکر : قضیه ۱۰ در حالتی که $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳ + x - ۱)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳ - ۲x - ۵x^۴)$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳ + x - ۱) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^۳(-۲ + \frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{x^۳}) = \lim\limits_{x\to-\infty} -۲x^۳ = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳ - ۲x - ۵x^۴) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^۴(\frac{۳}{x^۴} - \frac{۲}{x^۳} - ۵) = \lim\limits_{x\to+\infty} -۵x^۴ = -\infty$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

کار در کلاس

۱ الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{a_n}{b_n} x^{n-m}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

۲ در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

$$m > n \to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$m = n \to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$$

$$m < n \to \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

۳ به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{2} x = \pm\infty$

ب) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x^3}{6x^3} = -\frac{1}{2}$

پ) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$

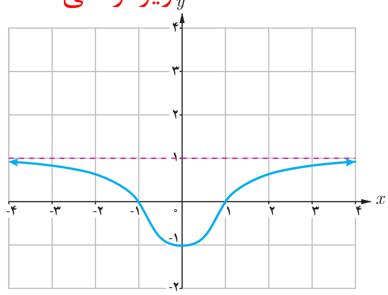
کوه‌های مریخی، چابهار

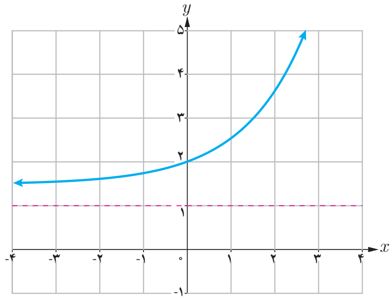
مجانب افقی

خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار $y=f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ برقرار باشد.

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y=1$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟

زیرا زمانی که مقدار xبه بی نهایت میل می کند مقدار تابع برابر یک می شود





✤ **مثال :** مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ را به‌دست آورید.

حل : برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در $\pm\infty$ حساب کنیم داریم :

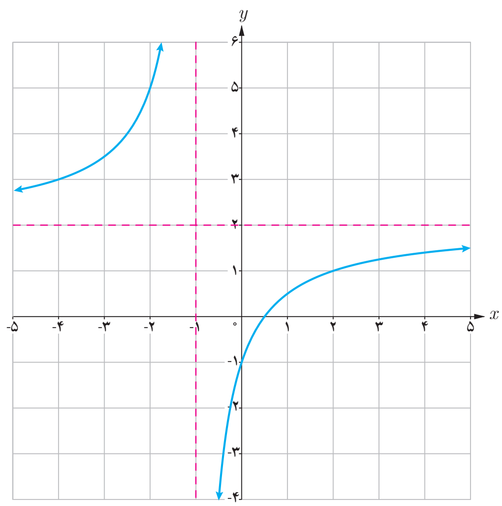
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$$

پس خط $y=2$ مجانب افقی تابع است.

این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x=-1$ مجانب قائم تابع است زیرا :

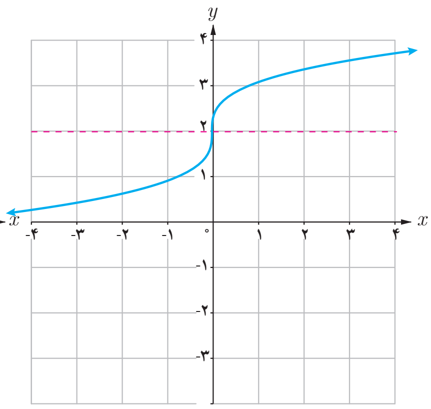
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{2x-1}{x+1}=-\infty$$

نمودار تابع به‌صورت زیر است.

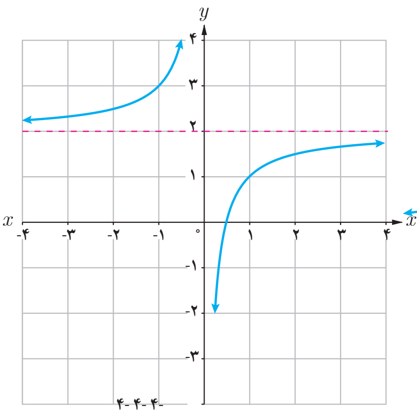


کار در کلاس

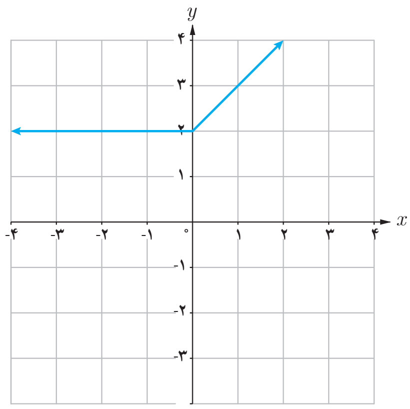
۱ کدام‌یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی دارد؟ آن را مشخص کنید.



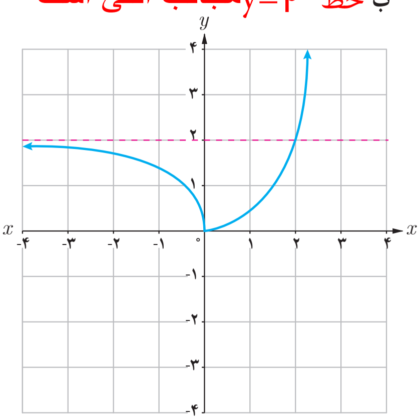
الف
مجانب افقی ندارد



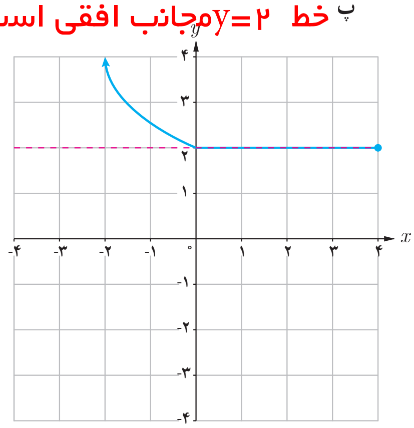
ب خط y=۲ مجانب افقی است



پ خط y=۲ مجانب افقی است



ت خط y=۲ مجانب افقی است



ث خط y=۲ مجانب افقی است

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۱}$

ب) $g(x)=x^۳$

پ) $h(x)=\frac{x^۲+۱}{x+۱}$

حل کاردرکلاس صفحه ۶۸ سوال ۲:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-1} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2-1}=\begin{cases}\frac{2}{0^+}=+\infty\\ \frac{2}{0^-}=-\infty\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}x=1\\ y\to\pm\infty\end{matrix}$$ مجانب قائم

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x-1)}=-\frac{1}{2}$$ مجانب قائم نیست

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0\rightarrow \begin{matrix}x\to\pm\infty\\ y=0\end{matrix}$$ مجانب افقی

$$g(x) = x^{3}$$

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} x^{3} = \pm\infty$$

مجانب افقی و قائم ندارد

$$h(x) = \frac{x^{2}+1}{x+1}$$

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^{2}+1}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

مجانب افقی ندارد

$$x+1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^{2}+1}{x+1} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^{+}} \dfrac{x^{2}+1}{x+1} = \dfrac{2}{0} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^{-}} \dfrac{x^{2}+1}{x+1} = \dfrac{2}{0} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

مجانب قائم

تمرین

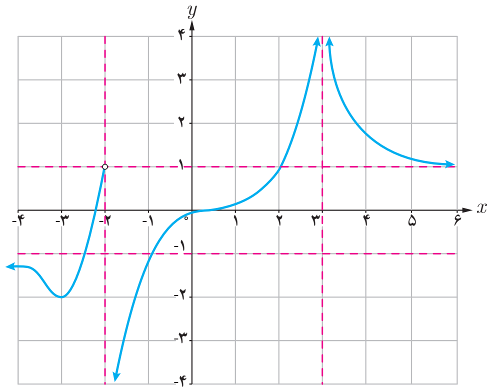
۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید. هرچه مقادیر x بزرگ می شوند مقادیر تابع f به عدد ۲ نزدیک می شود

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۲$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۴$

هرچه مقادیر x کوچک می شوند مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می شود

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به‌دست آورید :



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ ۱

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ -۱

پ) $\lim\limits_{x\to۳^+} f(x)=+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to۳^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to-۲^+} f(x)=-\infty$

ج) مجانب‌های افقی و قائم

مجانب های قائم: x=−۲,x=۳   مجانبهای افقی: y=۱,y=−۱

۳ حاصل حدود زیر را به‌دست آورید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x+۵}{x-۲}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x}{x}=۳$

ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t^۲+۱}{t^۳-۲t^۲+}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t^۲+۱}{t^۳-۳t^۲+۱}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t^۲}{t^۳}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{۱}{t}=۰$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^۲+۲x}{۴x+۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^۲}{۴x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x}{۴}=\mp\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^۳-۲x^۲)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^۳=-\infty$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید :

الف) $y=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$

ب) $y=\dfrac{x}{x^۲-۴}$

پ) $y=\dfrac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲}$

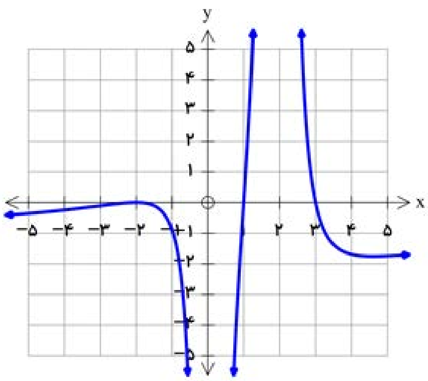
ت) $y=\dfrac{۲x}{۱+x^۲}$

۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $f(۱)=f(-۲)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to۲^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to۰} f(x)=-\infty$

پ) خط $y=-۱$ مجانب افقی آن باشد.



تمرین ۴:

$$y=\frac{۲x-۱}{x-۳}$$

مجانب افقی

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x-۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty} ۲=۲\Rightarrow \begin{matrix} x\to\pm\infty \\ y=۲ \end{matrix}$$

$$x-۳=۰\to x=۳$$

مجانب قائم

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x-۳}=\begin{matrix} \lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۲x-۱}{x-۳}=\frac{۵}{۰}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{۲x-۱}{x-۳}=\frac{۵}{۰}=-\infty \end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix} x=۳ \\ y\to\pm\infty \end{matrix}$$

$$y=\frac{x}{x^{۲}-۴}$$

مجانب افقی

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^{۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰\Rightarrow \begin{matrix} x\to\pm\infty \\ y=۰\end{matrix}$$

$$x^{۲}-۴=۰\to x=\pm ۲ \qquad D=\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$$

مجانب قائم

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x}{x^{۲}-۴}= \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x}{x^{۲}-۴}=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x}{(x-۲)(x+۲)}=\dfrac{۲}{۰^{+}(۴)}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{x}{x^{۲}-۴}=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{x}{(x-۲)(x+۲)}=\dfrac{۲}{۰^{-}(۴)}=-\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=۲ \\ y\to\pm\infty\end{matrix}$$

$$\lim_{x\to(-۲)}\frac{x}{x^{۲}-۴}= \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۲)^{+}}\dfrac{x}{x^{۲}-۴}=\lim\limits_{x\to(-۲)^{+}}\dfrac{x}{(x-۲)(x+۲)}=\dfrac{-۲}{۰^{+}(-۴)}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^{-}}\dfrac{x}{x^{۲}-۴}=\lim\limits_{x\to(-۲)^{-}}\dfrac{x}{(x-۲)(x+۲)}=\dfrac{-۲}{۰^{-}(-۴)}=-\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-۲ \\ y\to\pm\infty\end{matrix}$$

مجانب قائم

$$y=\frac{1+2x^2}{1-x^2}$$

مجانب افقی

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}(-2)=-2\Rightarrow \begin{matrix} x\to\pm\infty \\ y=-2\end{matrix}$$

$$1-x^2=0\to x=\pm 1 \qquad D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+2x^2}{1-x^2}= \begin{cases} \lim_{x\to 1^+}\frac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{3}{0^-(2)}=-\infty \\ \lim_{x\to 1^-}\lim_{x\to 1^-}\frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{3}{0^+(2)}=+\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y\to\pm\infty\end{matrix}$$

مجانب قائم

$$\lim_{x\to(-1)}\frac{1+2x^2}{1-x^2}= \begin{cases} \lim_{x\to(-1)^+}\frac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{3}{(2)0^+}=+\infty \\ \lim_{x\to(-1)^-}\frac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to -1^-}\frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{3}{(2)0^-}=-\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ y\to\pm\infty\end{matrix}$$

مجانب قائم

$$y=\frac{۲x}{۱+x^{۲}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{۱+x^{۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x^{۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲}{x}=۰\Rightarrow \underset{x\to\pm\infty}{y=۰}$$ مجانب افقی

$$۱+x^{۲}=۰\to x^{۲}=-۱$$ مجانب قائم ندارد