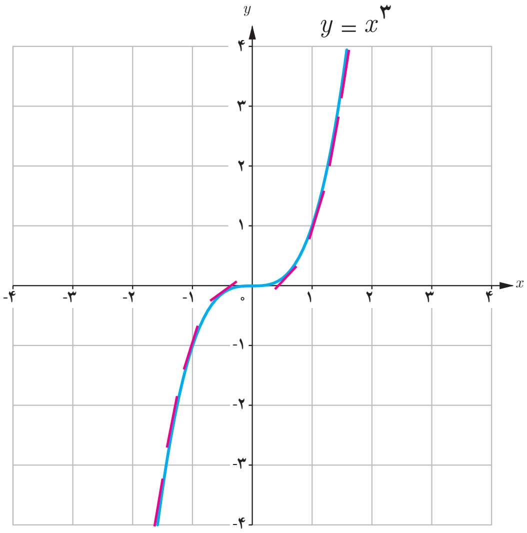
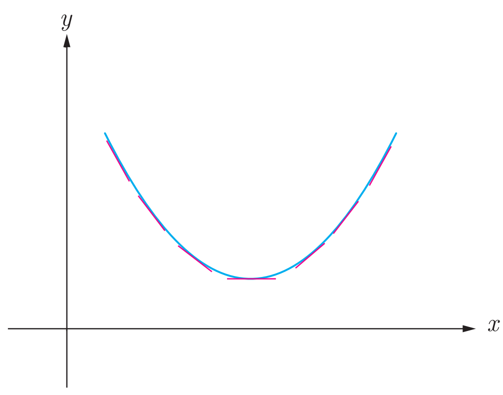
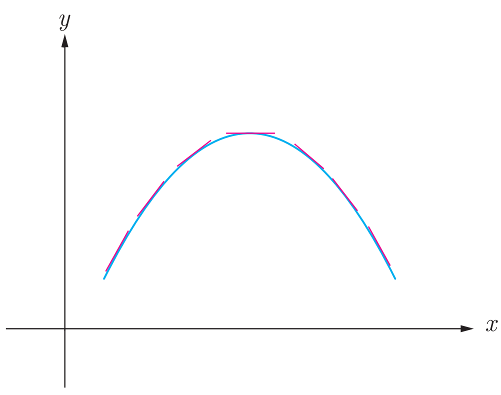
درس ۲
جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن



با تابع $f(x) = x^3$ آشنایی دارید. از آنجا که مشتق این تابع $f'(x) = 3x^2$ در $x = 0$ برابر صفر و در سایر نقاط همواره مثبت است، لذا شیب خطوط مماس بر منحنی این تابع در $x = 0$ برابر صفر و در تمام نقاط دیگر مثبت است و این تابع همواره صعودی است. با این حال اگر خطوط مماس بر این منحنی را به‌صورت پاره‌خط‌هایی کوچک در اطراف نقاط مماس رسم کنید خواهید دید که این پاره‌خط‌ها برای xهای منفی در بالای نمودار و برای xهای مثبت در زیر نمودار واقع‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت تقعر این تابع در بازهٔ $(-\infty , 0)$ به سمت پایین و در بازهٔ $(0 , +\infty)$ به سمت بالا است. برای درک بهتر مفهوم تقعر منحنی یک تابع به دو شکل زیر توجه کنید.



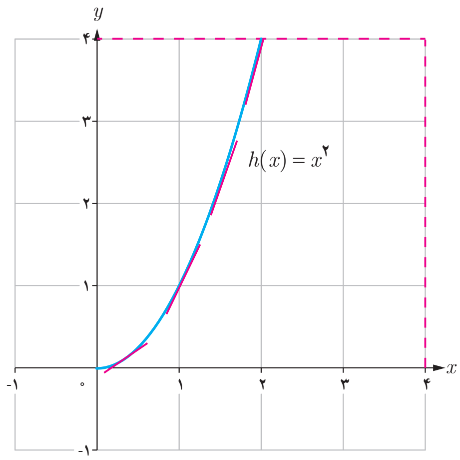
مماس‌ها در زیر منحنی‌اند.
تقعر به سمت بالا است.



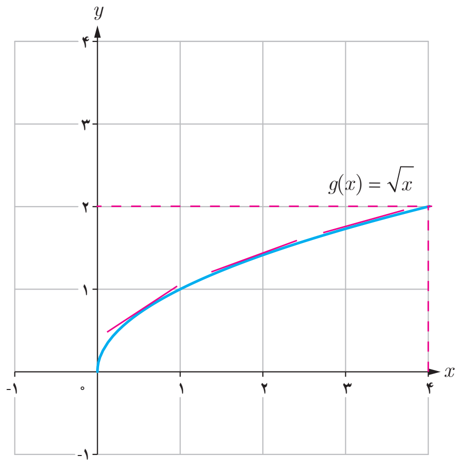
مماس‌ها در بالای منحنی‌اند.
تقعر به سمت پایین است.

فعالیت

در زیر بخشی از نمودارهای دو تابع $h(x)=x^{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[۰\ ,+\infty)$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.



(الف)



(ب)

۱ با حرکت از نقطهٔ $x=۰$ به سمت راست، شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ (کم می‌شود یا زیاد) جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟

در(الف) تقعر به سمت بالاست وشیب زیاد می شود ودر (ب)تقعر به سمت پایین است وشیب کم می شود

۲ جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با تغییرات شیب (کم شدن یا زیاد شدن) خطوط مماس دارد؟

در این شکل ها تقعر به سمت بالا باشد شیب افزایش وتقعر به سمت پایین باشد شیب کاهش می یابد

۳ تابع h' در بازهٔ $[۰\ ,+\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ صعودی

۴ تابع g' در بازهٔ $[۰\ ,+\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ نزولی

۵ الف) در حالت کلی، صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f' دارد؟

علامت f' بر بازهٔ I مثبت است، آنگاه تابع f بر بازهٔ I . صعودی است.

علامت f' بر بازهٔ I منفی است، آنگاه تابع f بر بازهٔ I . . نزولی. است.

ب) با توجه به قسمت (الف)، صعودی یا نزولی بودن تابع f' چه ارتباطی با علامت تابع f'' دارد؟

علامت f'' بر بازهٔ I مثبت است آنگاه تابع f' بر بازهٔ I . صعودی است.

علامت f'' بر بازهٔ I منفی است آنگاه تابع f' بر بازهٔ I . نزولی . . است.

۶ با توجه به آنچه گفته شد موارد زیر را کامل کنید :

الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه ...صعودی است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .افزایش. می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به ....بالا.... است.

ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه ...نزولی.. است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه ...کاهش می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به ... پایین.. است.

آنچه در فعالیت قبل مورد بررسی قرار گرفت به‌طور خلاصه در قضیهٔ زیر، که آزمونی برای تعیین جهت تقعر نمودار تابع است، آورده شده و در این کتاب اثباتِ آن مدنظر نیست.

قضیه :

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > ۰$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

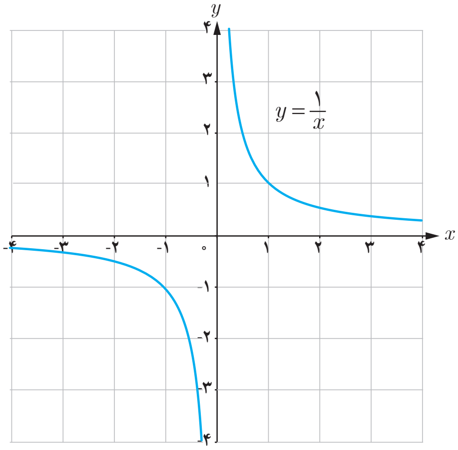
ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < ۰$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) = ۰$، آزمون بی‌نتیجه است.

✤ **مثال :** جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{۱}{x}$

ب) $g(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۱$



✤ **حل :** الف) داریم $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$

$$f(x) = \frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-۱}{x^۲} \Rightarrow f''(x) = \frac{۲}{x^۳}$$

بنابراین :

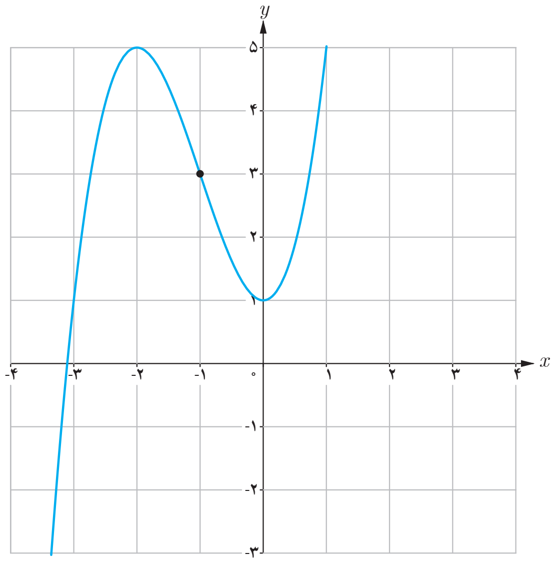
اگر $x > ۰$، آنگاه $f''(x) > ۰$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(۰ , +\infty)$ رو به بالاست.

اگر $x < ۰$، آنگاه $f''(x) < ۰$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-\infty , ۰)$ رو به پایین است.

ب) داریم $D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۱ \Rightarrow g'(x) = ۳x^۲ + ۶x \Rightarrow g''(x) = ۶x + ۶$$

$$g''(x) = ۰ \Rightarrow ۶x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$



بنابراین :

اگر $x > -۱$ آنگاه $g''(x) > ۰$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-۱ , +\infty)$ به سمت بالاست.

اگر $x < -۱$ آنگاه $g''(x) < ۰$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-\infty , -۱)$ به سمت پایین است.

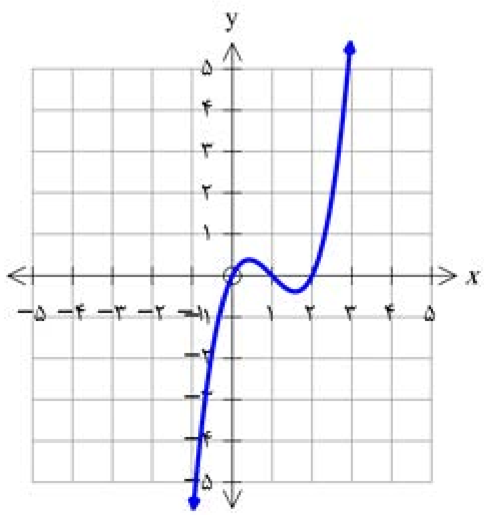
کار در کلاس

نمودار تابع $y = f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید :

$f(۰) = f(۱) = f(۲) = ۰$

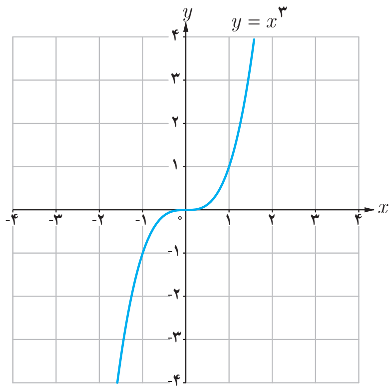
و بر بازه $(-\infty , ۱)$ ، $f''(x) < ۰$

و بر بازه $(۱ , \infty)$ ، $f''(x) > ۰$.



$$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲x$$

نقطهٔ عطف نمودار یک تابع



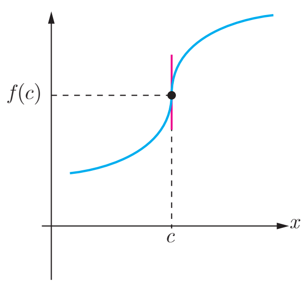
نمودار تابع $f(x) = x^۳$ را در نظر بگیرید. دیدیم که جهت تقعر نمودار این تابع در بازهٔ $(-\infty\,,\,۰)$ رو به پایین و در بازهٔ $(۰\,,\,+\infty)$ رو به بالاست. بنابراین نقطهٔ $x = ۰$ نقطه‌ای است که جهت تقعر منحنی در آن عوض می‌شود. از طرفی در $x = ۰$ منحنی دارای مماس نیز هست. چنین نقطه‌ای از یک منحنی را نقطهٔ عطف آن منحنی گوییم. به عبارت دیگر :

تعریف

فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $\big(c\,,\,f(c)\big)$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند :

الف) نمودار f در نقطه $\big(c\,,\,f(c)\big)$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطه $\big(c\,,\,f(c)\big)$ تغییر کند.



خط $x = c$ مماس قائم است.

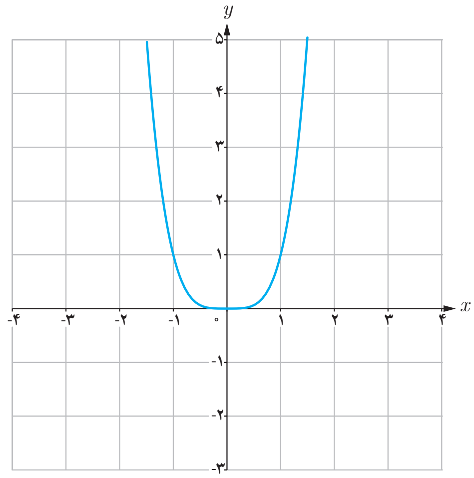
از شرط (الف) در تعریفِ نقطهٔ عطفِ تابع f نتیجه می‌شود که یا $f'(c)$ موجود است و یا تابع f در نقطهٔ c مماس قائم دارد.

از شرط (ب) می‌توان نتیجه گرفت که خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $\big(c\,,\,f(c)\big)$ از نمودار تابع عبور می‌کند.

از آنجا که تقعر تابع در دو طرف نقطهٔ عطف تغییر می‌کند؛ لذا f'' در یک طرف نقطهٔ c مثبت و در طرف دیگر آن منفی است. بنابراین $f''(c)$ نمی‌تواند مقداری به جز صفر داشته باشد؛ یعنی برای اینکه $\big(c\,,\,f(c)\big)$ یک نقطهٔ عطف منحنی باشد، یا باید $f''(c)$ وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم $f''(c) = ۰$. با این حال شرط $f''(c) = ۰$ برای نقطهٔ عطف بودن $x = c$

به تنهایی کافی نیست؛ یعنی ممکن است $f''(c)=0$ ولی $x=c$ یک نقطهٔ عطف تابع نباشد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^4$ را بررسی می‌کنیم. داریم :

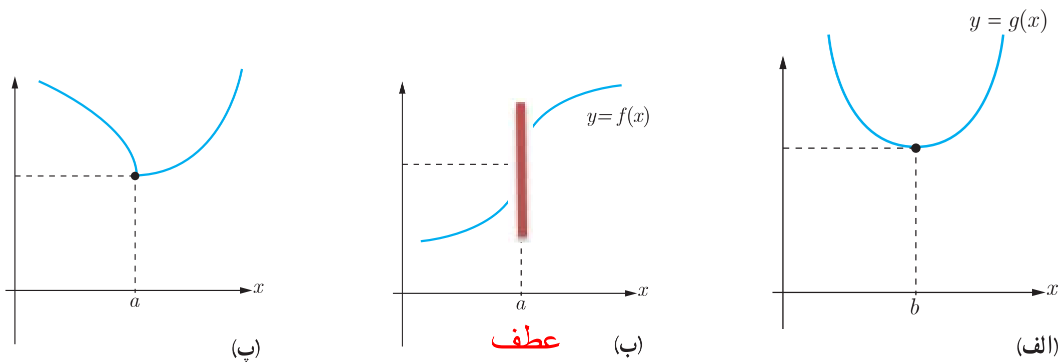
$$f'(x)=4x^3 \quad , \quad f''(x)=12x^2$$



با اینکه $f''(0)=0$ اما تابع f'' در دو طرف $x=0$ مثبت است و لذا تقعر همواره به سمت بالاست و جهت تقعر در $x=0$ عوض نمی‌شود و لذا $x=0$ یک نقطهٔ عطف این تابع نیست.

کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف نسبی را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.



۲ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند. درست

ب) هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطهٔ عطف است. نادرست قسمت پ سوال یک مثال نقض این قسمت هست

پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است. نادرست درسوال ۱ قسمت الف اگر Xبه توان چهار باشد

ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد. درست

ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد. نادرست قسمت ب سوال یک مثال نقض این قسمت است

مثال : جهت تقعر نمودار تابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۵$

ب) $f(x) = \sqrt[۳]{x}$

حل :

الف) $f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x$ و $f''(x) = ۶x - ۱۲$

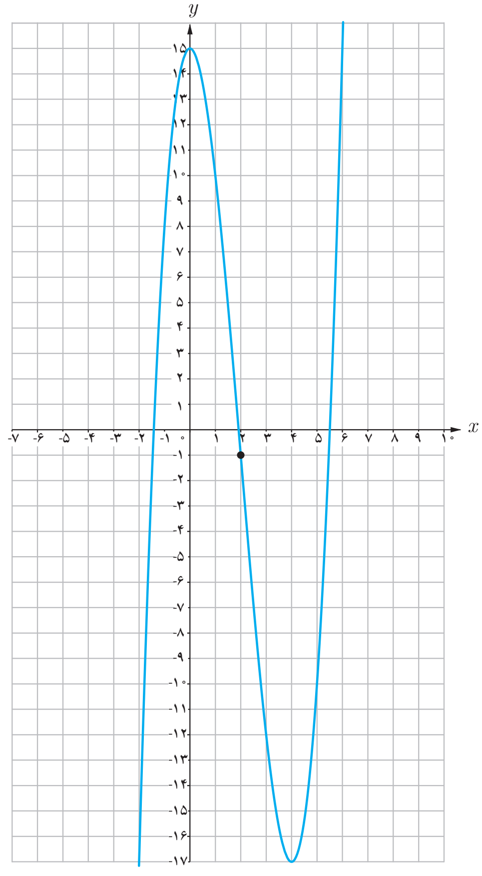
$f''(x) = ۰ \Rightarrow x = ۲$

از آنجا که $f''(x)$ یک تابع خطی است، و در تمام $\mathbb{R}$ تعریف شده است و تنها در $x = ۲$ برابر صفر می‌شود، بنابراین تنها نقطه‌ای که می‌تواند نقطهٔ عطف باشد $x = ۲$ است به شرط آنکه :

۱ $f'(۲)$ موجود باشد

۲ f'' در دو طرف $x = ۲$ تغییر علامت دهد.

اما $f'(x)$ یک تابع چند جمله‌ای است و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است و $f'(۲)$ نیز موجود و برابر ۱۲− است. از طرفی داریم :



x	$-\infty$	۲	$+\infty$
f''	−	۰	+
f		۱− نقطهٔ عطف	

ب) $f(x)=\sqrt[3]{x} \to f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \to f''(x)=\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$

از آنجا که مقدار $\sqrt[3]{x^5}$ به ازای xهای مثبت، مثبت و به ازای xهای منفی، منفی است.

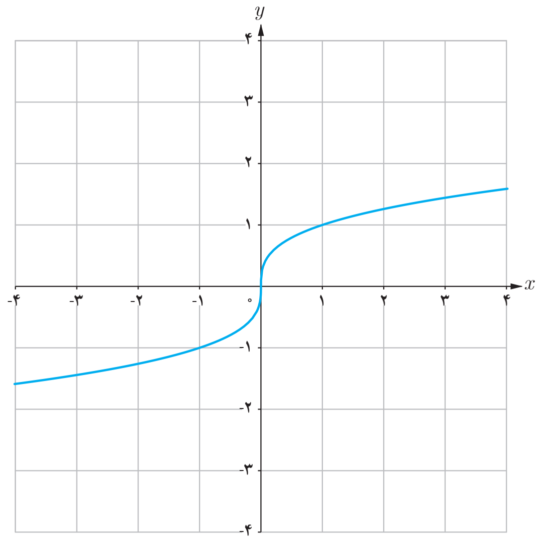
داریم :

اگر $x>0$، آنگاه $f''(x)<0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت پایین است.

اگر $x<0$، آنگاه $f''(x)>0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت بالاست.

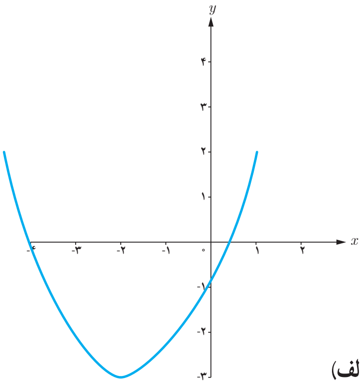
لذا جهت تقعر این تابع در $x=0$ عوض می‌شود. از طرفی در فصل مشتق دیدیم که این تابع در نقطهٔ $x=0$ دارای مماس (مماس قائم) است.

بنابراین $x=0$ نقطهٔ عطف این تابع است.

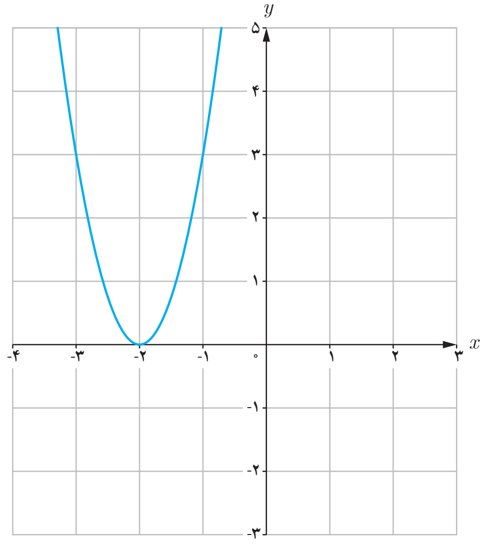


کاردرکلاس

۱ اگر شکل کشیده شده در صفحهٔ شطرنجی مربوط به نمودار تابع f' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟



(الف)

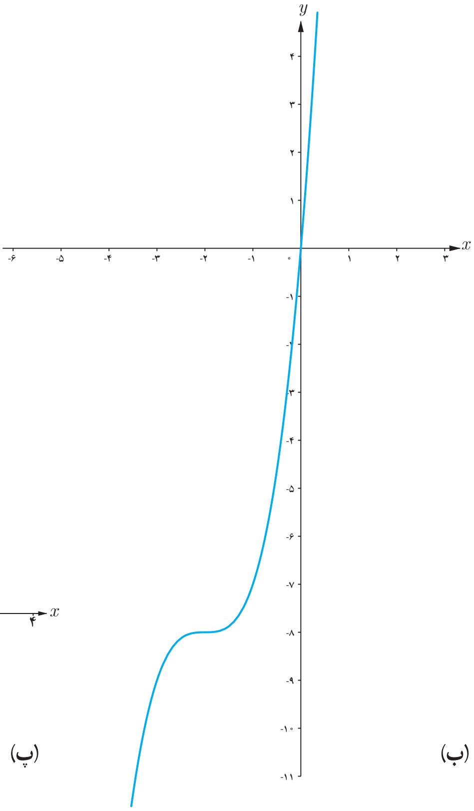


$a > 0$

$\frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a>0} -b < 0 \rightarrow b > 0$

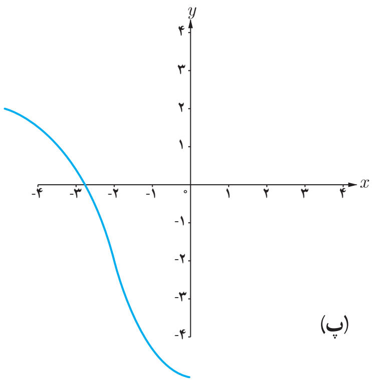
تابع صعودی می‌باشد وطول نقطه ی عطف آن منفی می‌باشد

پس نمودار ب درست هست

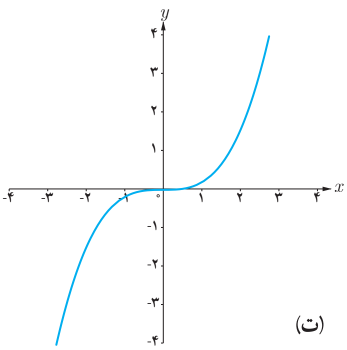


(ب)

درست



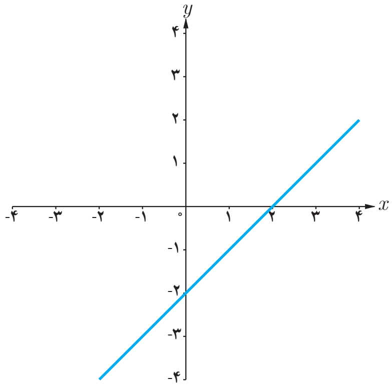
(پ)



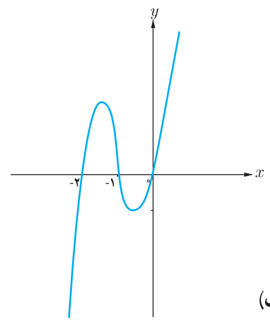
(ت)

$a>0 \quad b<0$

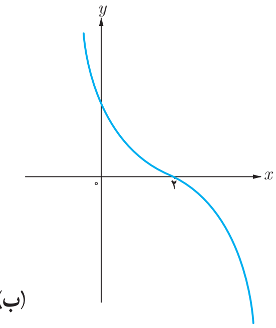
تابع صعودی می‌باشد وطول نقطه ی عطف آن $x=\frac{-b}{3a}$ مثبت می‌باشد پس نمودار پ درست هست



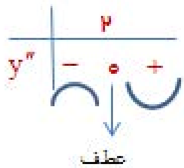
۲ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع f'' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟

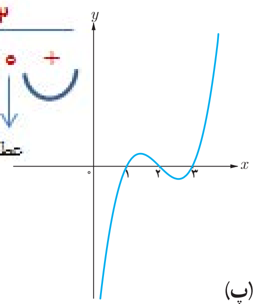


(الف)

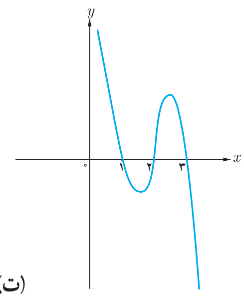


(ب)





(پ)



(ت)

تمرین

۱ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطهٔ عطف نباشد.

۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$ ب) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

۳ برای هر مورد یک تابع درجهٔ ۳ مثال بزنید که نقطهٔ داده شده نقطهٔ عطف آن باشد.

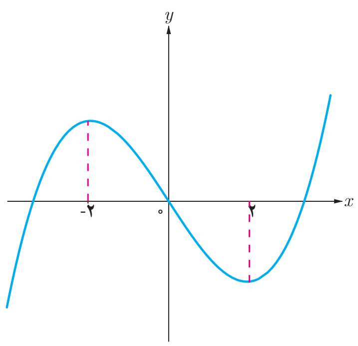
الف) نقطهٔ $(0\,,0)$ ب) نقطهٔ $(0\,,1)$ پ) نقطهٔ $(1\,,0)$ ت) نقطهٔ $(2\,,2)$

$y=x^3$ $\quad$ $y=(x-1)^3+1$ $\quad$ $y=x^3+1$ $\quad$ $y=(x-2)^3+2$

۴ مقادیر a، b و c را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0)=1$ و $f(1)=2$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f باشد.

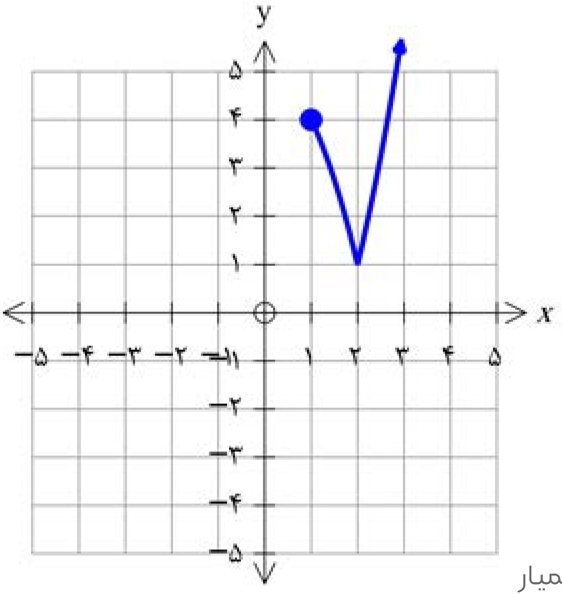
۵ اگر $(0\,,0)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطهٔ $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a، b و c را پیدا کنید.



تمرین۱:

$$f(x) = ۱ + |x^۲ - ۴| \qquad x \in [۱, ۳]$$

در x=۲ جهت تقعر عوض شده است ولی نقطه عطف نیست



تمرین ۲: الف)

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$$

$$f'(x)=x^2-2x-3$$

$$f''(x)=2x-2\xrightarrow{f''(x)=0}2x-2=0\rightarrow x=1$$

$$f(1)=\frac{1}{3}(1)^3-(1)^2-3(1)+4=\frac{1}{3}$$

	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$	$\frac{1}{3}$	$\smile$	
		تقعر به پایین		تقعر به بالا	

ب)

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$$

	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		$-$	‖	$+$	
f	1		$-\infty$ ‖ $+\infty$		1
		تقعر به پایین		تقعر به بالا	

پ)

$$f(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$f''(x)=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$$

	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$+$	ت ن	$-$	
f	$-\infty$		0		$+\infty$
		تقعر به بالا		تقعر به پایین	

تمرین ۴:

$$f(۰)=۱ \rightarrow \underline{c=۱}$$

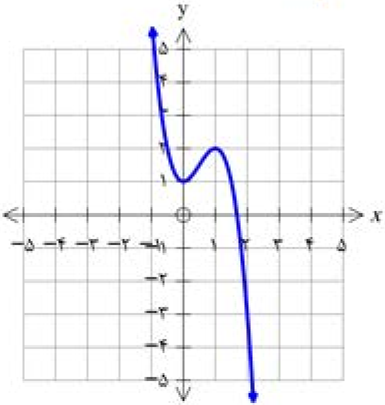
$$f(۱)=۲ \rightarrow a+b+۱=۲ \rightarrow \underline{a+b=۱}$$

$$y' = ۳ax^{۲} + ۲bx$$

$$y'' = ۶ax + ۲b \xrightarrow[x=\frac{۱}{۲}]{y'=۰} ۶a\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۲b = ۰ \rightarrow ۳a + ۲b = ۰$$

$$\begin{cases} a+b=۱ \\ ۳a+۲b=۰ \end{cases} \Rightarrow a=-۲, b=۳$$

$$\boxed{f(x) = -۲x^{۳} + ۳x^{۲} + ۱}$$



تمرین۵:

$$f(0)=0 \rightarrow \underline{c=0}$$

$$y'=3x^2+2ax+b$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow[x=2]{y'=0} 12+4a+b=0 \\ \xrightarrow[x=-2]{y'=0} 12-4a+b=0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{cases} 4a+b=-12 \\ -4a+b=-12 \end{cases} \rightarrow 2b=-24 \rightarrow b=-12, a=0$$

$$\boxed{f(x)=x^3-12x}$$