درس ۳

رسم نمودار توابع

می‌دانیم که هر تابع مانند f به ازای هر $x \in D_f$ دقیقاً یک مقدار y به‌دست می‌دهد به‌طوری‌که $y=f(x)$ و زوج مرتب $(x\,,y)$ یک نقطه در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. نمودار یک تابع، شکلی است که از همهٔ این نقاط $(x\,,y)$ به ازای تمام $x \in D_f$ها تشکیل شده است. از آنجا که هر بازهٔ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ تعداد بی‌شماری عضو دارد؛ لذا هیچ‌گاه نمی‌توان با قلم و کاغذ نمودار یک تابع را به‌طور کاملاً دقیق رسم کرد. در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع خطی و درجهٔ ۲ به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. در این درس با به‌کارگیری مطالبی که قبلاً گفته شد نقاط مهمی از نمودار تابع را به‌دست آورده و به برخی ویژگی‌های آن تابع پی می‌بریم و با استفاده از آنها شکل تقریبی تابع را رسم می‌کنیم.

مثال : اگر بدانید تابع $y=f(x)$ به گونه‌ای است که برای آن داریم :

۱ ریشه‌های تابع f به‌صورت $x=1$ و $x=0$ و $x=-2$ است و f در همهٔ نقاط مشتق‌پذیر باشد.

۲ ریشه‌های تابع f' به‌صورت $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{6}{5}$ است و علامت f' بین دو ریشه منفی و سایر جاها مثبت است و $f(\frac{1}{2})=-0/6$ و $f(\frac{-6}{5})=2$.

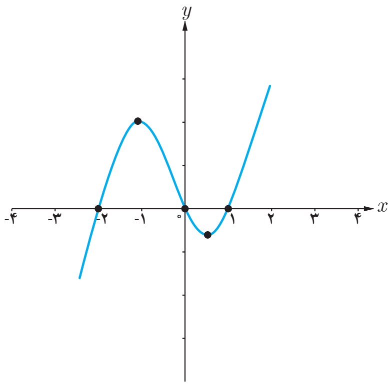
۳ تابع f'' تنها یک ریشه در $x=-\frac{1}{3}$ دارد و علامت f'' در سمت چپ $-\frac{1}{3}$ منفی و در سمت راست آن مثبت است و $f(-\frac{1}{3})=0/7$.

در این صورت نمودار تابع f را رسم کنید.

حل : از (۲) نتیجه می‌شود که تابع f بین نقاط $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{6}{5}$ نزولی و سایر جاها صعودی است و $x=-\frac{6}{5}$ و $x=\frac{1}{2}$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع‌اند و از (۳) نتیجه می‌شود که تقعر تابع f قبل از $x=-\frac{1}{3}$ رو به پایین و در سمت راست $x=-\frac{1}{3}$ رو به بالاست و چون f' در $x=-\frac{1}{3}$ وجود دارد لذا مماس در این نقطه وجود دارد، بنابراین $x=-\frac{1}{3}$ نقطهٔ عطف این تابع است. قبل از رسم شکل می‌توان همهٔ اطلاعات فوق را در یک جدول خلاصه کرد.

x	$-\infty$		$-\frac{۶}{۵}$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		$\frown$ −		$\frown$ −	۰	$\smile$ +		$\smile$ +	
f		↗	۲	↘	۰/۷	↘	−۰/۶	↗	
			ماکزیمم		نقطه عطف		مینیمم		

با توجه به این اطلاعات و اینکه ریشه‌های تابع محل برخورد نمودار با محور xها هستند نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است.



همان‌طور که در این مثال مشاهده کردیم ریشه‌ها و علامت توابع f' و f'' کمک زیادی به رسم نمودار تابع می‌نماید. همچنین حد تابع در بی‌نهایت گویای رفتار و چگونگی تابع در نقاط انتهایی نموداری که رسم می‌کنیم است. به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به‌دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

۱ دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم.

۲ محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۳ f' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که f بر آنها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.

۴ نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۵ f'' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.

۶ نقطهٔ عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۷ رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و بسیار کوچک x مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۸ معادلهٔ مجانب‌های تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع f و f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.

۱۰ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.

۱۱ در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

مثال : نمودار تابع $f(x)=x^3$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی است و این تابع در تمام دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است. حال با به‌دست آوردن f' و f'' و ریشه‌های آنها و تعیین علامت آنها جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم.

$f(x)=x^3=0 \to x=0 \to$ محل برخورد نمودار با محورهای مختصات $(0\,,0)$

$f'(x)=3x^2=0 \to x=0$

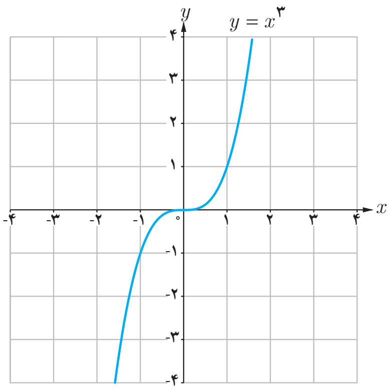
$f''(x)=6x=0 \to x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$		$+$
f''	$\frown$ $-$		$\smile$ $+$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

نقطهٔ عطف

این تابع همواره صعودی است و اکسترمم نسبی ندارد. از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لذا دو انتهای نمودار در ربع‌های اوّل و سوم قرار دارند.

می‌توان برای دقیق‌تر شدن شکل، نقاط بیشتری از منحنی را به‌دست آورد؛ مثلاً در اینجا نقاط $(1\,,1)$ و $(-1\,,-1)$ نیز بر نمودار تابع واقع‌اند. با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نمودار تابع $y=x^3$ را به‌صورت مقابل رسم کرد.



مثال : جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2(x+3)$ را رسم کنید.

حل :

دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است و این تابع همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$f(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-3$

بنابراین نقاط $(1\,,0)$ و $(-3\,,0)$ محل‌های برخورد با محور xها است

$x=0 \Rightarrow y=3$

بنابراین نقطهٔ $(0\,,3)$ محل برخورد با محور yهاست

$f'(x)=2(x-1)(x+3)+(x-1)^2=(x-1)(3x+5)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $=--$

لذا نقاط $(۱\,,\,۰)$ و $(-\frac{۵}{۳}\,,\,\frac{۲۵۶}{۲۷})$ نقاط بحرانی‌اند

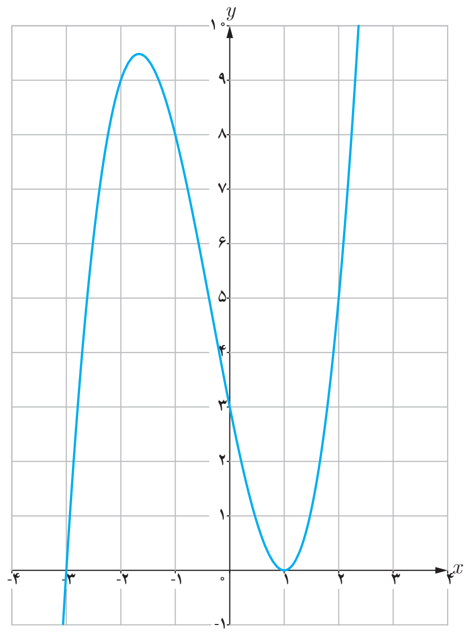
$$f''(x)=(۳x+۵)+۳(x-۱)=۶x+۲$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$

از آنجا که مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ وجود دارد و f'' در دو طرف نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۳}\,,\,\frac{۱۲۸}{۲۷}\right)$ نقطهٔ عطف تابع است، از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		⌢ −		⌢ −	۰	∪ +		∪ +	
f	$-\infty$	↗	$\frac{۲۵۶}{۲۷}$	↘	$\frac{۱۲۸}{۲۷}$	↘	۰	↗	$+\infty$
			ماکزیمم		عطف		مینیمم		

حال با توجه به آنچه گفته شد نمودار تابع فوق به شکل روبه‌رو است.



تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq ۰$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

اگر $c=۰$ و $d\neq ۰$ باشد معادلهٔ این تابع به‌صورت $y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$ تبدیل می‌شود که معادلهٔ یک خط راست است و اگر $c\neq ۰$ و $d\neq ۰$ و $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

در رسم نمودار تابع هموگرافیک توجه داریم که :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$$

بنابراین $y=\dfrac{a}{c}$ مجانب افقی این تابع است.

$$\lim_{x\to-\frac{d}{c}}\frac{ax+b}{cx+d}=+\infty \text{ یا } -\infty$$

بنابراین $x=-\dfrac{d}{c}$ مجانب قائم این تابع است

مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ است. داریم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=۱$ ، لذا خط $y=۱$ مجانب افقی است و از طرفی $\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=-\infty$ ، لذا $x=۱$ مجانب قائم نمودار این تابع است.

همچنین نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط $(۰,-۲)$ و $(-۲,۰)$ قطع می‌کند. اکنون با گرفتن مشتق از تابع خواهیم داشت :

$$f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}\quad ,\ x\neq ۱$$

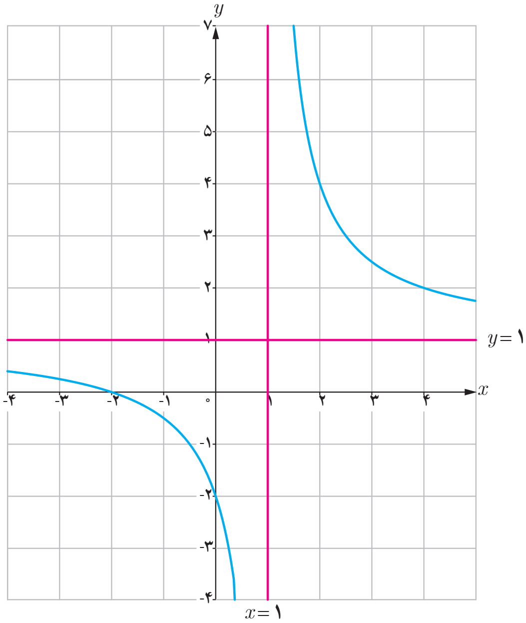
و بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty,۱)$ و $(۱,+\infty)$ همواره منفی است و لذا تابع f در هر کدام از این بازه‌ها نزولی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت.

$$f''(x)=\frac{۶(x-۱)}{(x-۱)^۴}=\frac{۶}{(x-۱)^۳}\quad ,\ x\neq ۱$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty\,,\,۱)$ داریم $f''(x) < ۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین و برای هر x در بازهٔ $(۱\,,\,+\infty)$ داریم $f''(x) > ۰$ و لذا تقعر منحنی به سمت بالاست. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$-$	
y''		$\frown\,-$		$\frown\,-$		$\frown\,-$		$\smile\,+$	
y		$\searrow$	۰	$\searrow$	-۲	$\searrow$	$-\infty\ \ +\infty$	$\searrow$	

با توجه به اطلاعات این جدول می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت روبه‌رو رسم کرد.



✤ **مثال :** جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \dfrac{۳x+۴}{-۲x+۱}$ را رسم کنید.

✤ **حل :** دامنهٔ این تابع $D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{۱}{۲}\right\}$ است. داریم $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\dfrac{۳}{۲}$ ، لذا $y = -\dfrac{۳}{۲}$ مجانب افقی این تابع است و از طرفی $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^-} f(x) = +\infty$ ، لذا $x = \dfrac{۱}{۲}$ مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط $(۰\,,\,۴)$ و $(-\dfrac{۴}{۳}\,,\,۰)$ محورهای مختصات را قطع می‌کند.

$$x \neq \frac{۱}{۲} \qquad \text{و} \qquad f'(x) = \frac{۱۱}{(-۲x+۱)^۲}$$

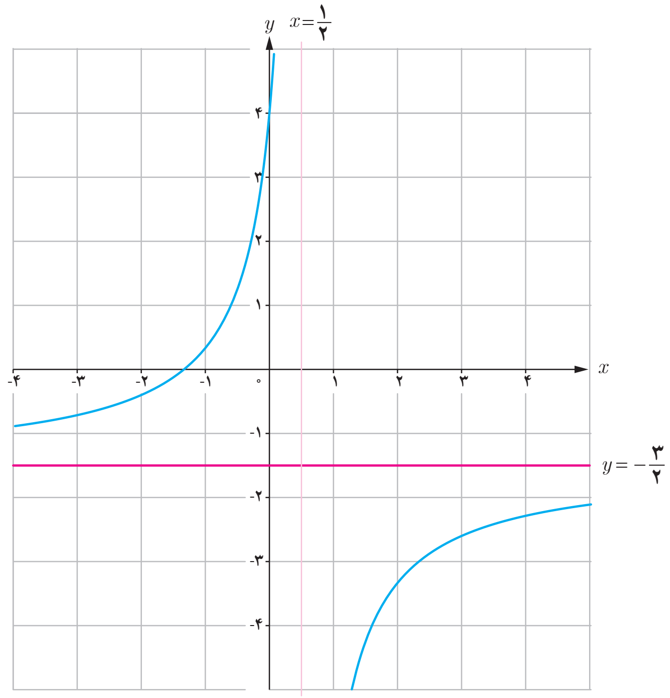
بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty , \frac{۱}{۲})$ و $(\frac{۱}{۲} , +\infty)$ همواره مثبت و در نتیجه تابع f در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت :

$$f''(x) = \frac{۴۴}{(-۲x+۱)^۳} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{۱}{۲}$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty , \frac{۱}{۲})$ داریم $f'' > ۰$، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر x در بازهٔ $(\frac{۱}{۲} , +\infty)$ داریم $f'' < ۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$	$-\frac{۴}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$+\infty$
y'	+	+	+	+	
y''	$\cup$ +	$\cup$ +	$\cup$ +	$\cap$ −	
y	$-\frac{۳}{۲}$ ↗	۰ ↗	۴ ↗	$-\infty$ $+\infty$ ↗	$-\frac{۳}{۲}$

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطهٔ کمکی می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت زیر رسم کرد.



تمرین

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۱$

ب) $f(x) = x^۳ - ۵x + ۵$

پ) $f(x) = -x\,(x+۲)^۲$

ت) $f(x) = \dfrac{۲x-۱}{x-۲}$

ث) $f(x) = \dfrac{-x}{x+۳}$

ج) $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۱$

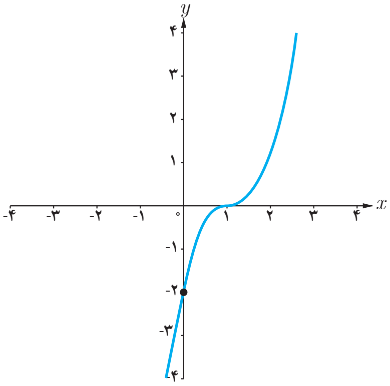
۲ فرض کنید $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطهٔ (۱ , ۲) است. اگر این تابع از نقطهٔ (۰ , ۱−) بگذرد، ضابطهٔ تابع را به دست آورید.

۳ کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^۳ + x - ۲$ است.

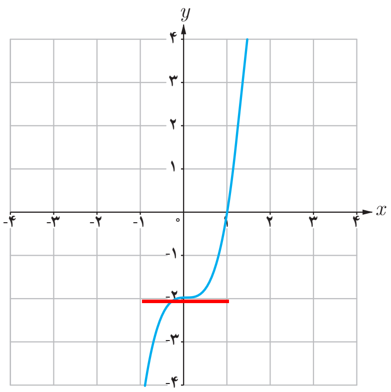
$f(x) = x^۳ + x - ۲ \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۱ \rightarrow f''(x) = ۶x$

$f''(x) = ۰ \rightarrow ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$

$f(۰) = -۲$ $(۰, -۲)$ نقطه عطف $a > ۰$ صعودی

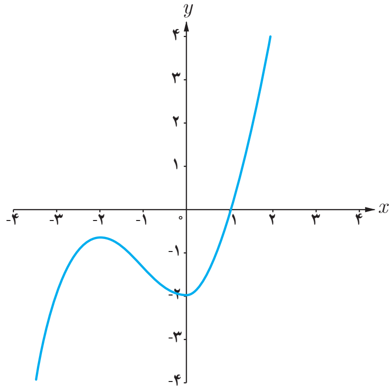


(الف)

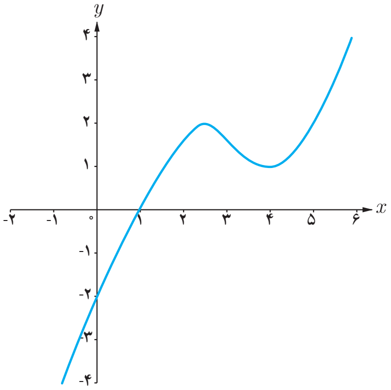


درست

(ب)



(پ)



(ت)

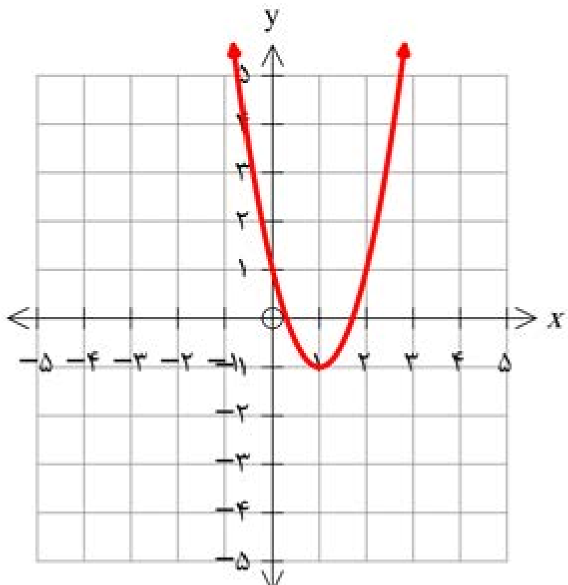
تمرین ۱: الف)

$f(x) = 2x^2 - 4x + 1 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x - 4 \xrightarrow{f'(x)=0} 4x - 4 = 0 \rightarrow x = 1$

$f''(x) = 4 > 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$		$-$		$+$	
f''		$+$		$+$		$+$	
f		↘	1	↘	-1	↗	

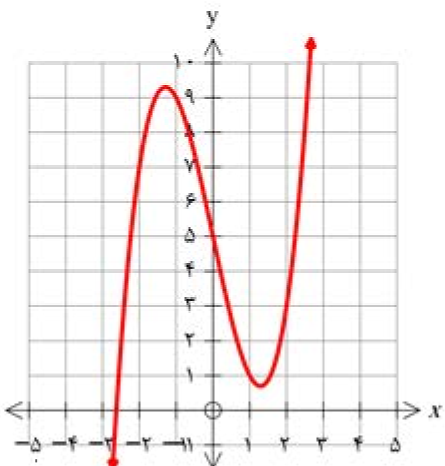


ب)

$$f(x)=x^3-5x+5 \qquad D_f=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=3x^2-5 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-5=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$f''(x)=6x \xrightarrow{f''(x)=0} 6x=0 \rightarrow x=0$$



x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{3}}$		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$-$		$+$	
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		$\nearrow$	$9/3$	$\searrow$	5	$\searrow$	$0/7$	$\nearrow$	

پ)

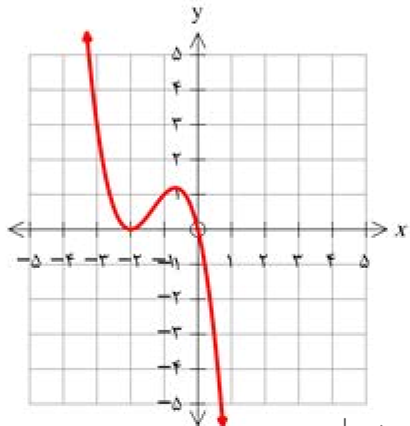
$$f(x) = -x(x+۲)^۲ \qquad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -۱(x+۲)^۲ - ۲x(x+۲) = (x+۲)(-x-۲-۲x) =$$

$$(x+۲)(-۳x-۲) \xrightarrow{f'(x)=۰} \begin{cases} x+۲=۰ \to x=-۲ \\ -۳x-۲=۰ \to x=-\dfrac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$f''(x) = ۱(-۳x-۲) - ۳(x+۲) \xrightarrow{f''(x)=۰} -۶x-۸=۰ \to x = \frac{-۴}{۳}$$

x	$-\infty$		-۲		$\frac{-۴}{۳}$		$\frac{-۲}{۳}$		۰		$+\infty$
f'		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$		$-$	
f''		$+$ ∪		$+$ ∪	۰	$-$ ∩		$-$ ∩		$-$ ∩	
f		↘	۰	↗	$\frac{۱۶}{۲۷}$	↗	$\frac{۳۲}{۲۷}$	↘	۰	↘	



ت)

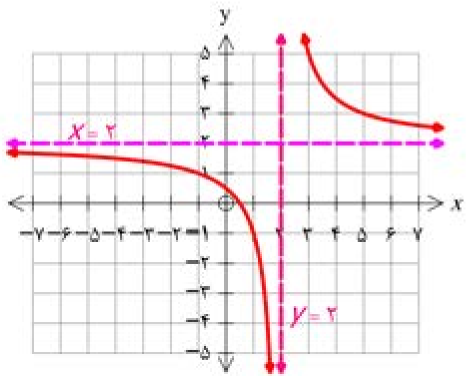
$$f(x)=\frac{2x-1}{x-2} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=2\Rightarrow y=2$$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to(2)^+}\dfrac{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\dfrac{\frac{3}{2}}{0^+}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to(2)^+}\dfrac{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\dfrac{\frac{3}{2}}{0^-}=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=2$$ مجانب قائم

$$f'(x)=\frac{2(x-2)-(2x-1)}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{6}{(x-2)^3}$$



x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$		$-$		$+$	
f''		$-$		$-$		$+$	
f		$\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	2

ث)

$$f(x)=\frac{-x}{x+۳} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}$$

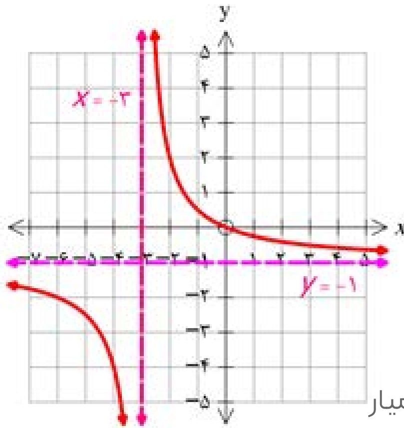
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x+۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x}=-۱\Rightarrow y=-۱$$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to -۳}\frac{-x}{x+۳}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۳)^+}\dfrac{-x}{x+۳}=\dfrac{-۳}{۰^+}=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to(-۳)^-}\dfrac{-x}{x+۳}=\dfrac{-۳}{۰^-}=+\infty\end{cases}\Rightarrow x=-۳$$ مجانب قائم

$$f'(x)=\frac{-(x+۳)+x}{(x+۳)^۲}=\frac{-۳}{(x+۳)^۲}<۰$$

$$f''(x)=\frac{۶}{(x+۳)^۳}$$

x	$-\infty$		-۳		۰		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$		$-$	
f''		$-$ ⌒	‖	$+$ ⌣		$+$ ⌣	
f	-۱	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	۰	↘	-۱



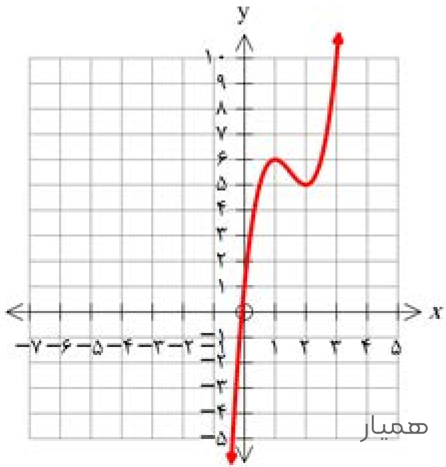
ج)

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 \qquad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-2)(x-1) \xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} x-2=0 \to x=2 \\ x-1=0 \to x=1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x - 18 \xrightarrow{f''(x)=0} 6(2x-3) = 0 \to x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		$\nearrow$	6	$\searrow$	5.5	$\searrow$	5	$\nearrow$	



تمرین۲)

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (۲,۱)=\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$$

$$\frac{a}{c}\rightarrow ۱=\frac{a}{c}\rightarrow \underline{a=c},\ -\frac{d}{c}\rightarrow ۲=-\frac{d}{c}\rightarrow \underline{d=-۲c}$$

$$\xrightarrow{(-۱,۰)} ۰=\frac{-a+b}{-c+d}\rightarrow -a+b=۰\rightarrow \underline{a=b}$$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+a}{ax-۲a}=\boxed{\frac{x+۱}{x-۲}}$$