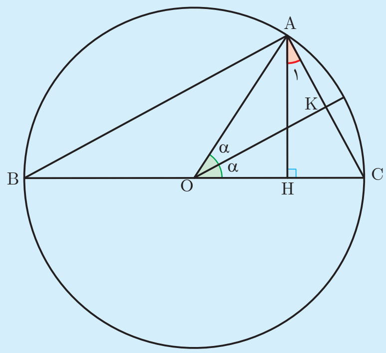
درس دوم

معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به‌دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.[1]



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث $O\overset{\Delta}{A}K$ داریم:

$$AK = \sin\alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2\sin\alpha \qquad (1)$$

همچنین $\overset{\frown}{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به $\overset{\frown}{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$

همچنین از مجموع زوایای $A\overset{\Delta}{B}C$ به‌دست می‌آید:

$$A\overset{\Delta}{B}C : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $A\overset{\Delta}{H}C$ داریم:

$$A\overset{\Delta}{H}C : \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $O\overset{\Delta}{A}C$ و $A\overset{\Delta}{H}C$ به‌دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} O\overset{\Delta}{A}C : AH = \sin 2\alpha \\ A\overset{\Delta}{H}C : \cos\hat{A}_1 = \cos\alpha = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC\cos\alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

همچنین در $O\overset{\Delta}{A}H$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $A\overset{\Delta}{H}C$ داریم:

$$\sin\hat{A}_1 = \sin\alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin\alpha \times AC = \sin\alpha(2\sin\alpha) = 2\sin^2\alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC=1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

۱ــ این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم :

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

مثال : مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos 15^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$ (۱۵° در ربع اول است.)

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

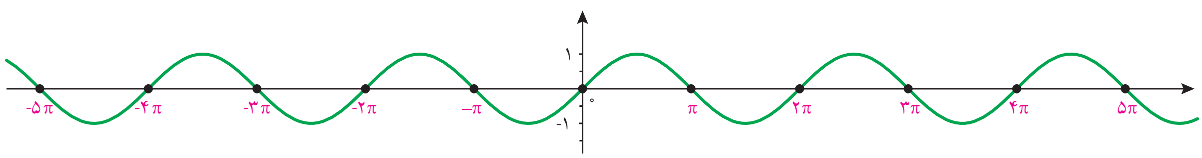
$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$ (۱۵° در ربع اول است.)

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد.

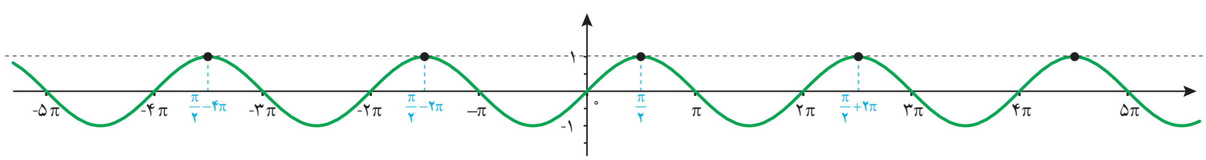
مثال : تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت $x=\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y=0$ (یعنی محور xها) و تابع $y=\sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=1$ و $y=\sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به‌صورت

$$x = \cdots , \frac{\pi}{۲} - ۴\pi , \frac{\pi}{۲} - ۲\pi , \frac{\pi}{۲} , \frac{\pi}{۲} + ۲\pi , \cdots$$

می‌باشند که به‌صورت کلی $x = \frac{\pi}{۲} + ۲k\pi , k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

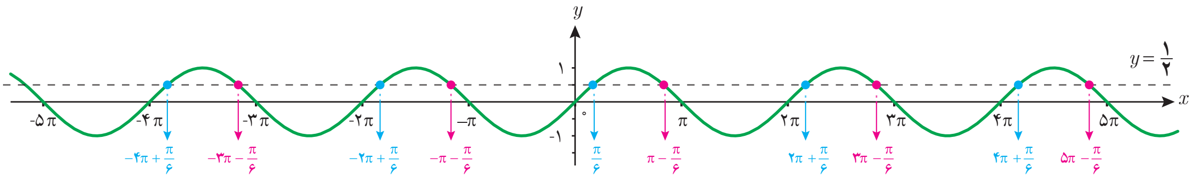
فعالیت

$$\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} , \sin\left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = \sin\frac{۵\pi}{۶} = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{۶} , \frac{۵\pi}{۶} , \ldots$$

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است مثال بزنید.

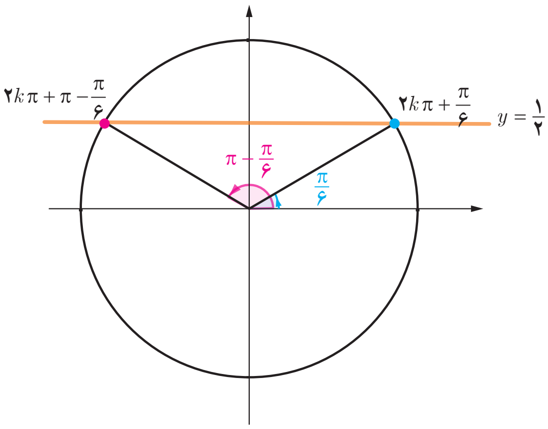
۲ خط $y = \frac{۱}{۲}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ بله



۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \frac{۱}{۲}$ و $y = \sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این معادله بی شمار جواب دارد

بله

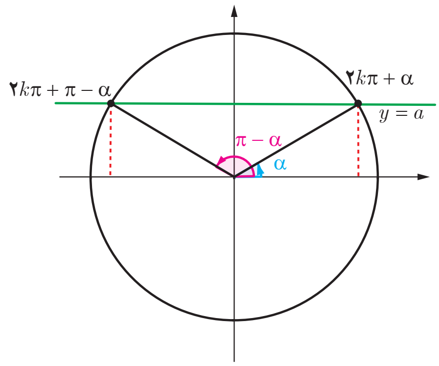
۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{۱}{۲}$ و زوایای $\frac{\pi}{۶}$ و $\pi - \frac{\pi}{۶}$ که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{۶}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{۶}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



هم انتها با $\frac{\pi}{۶}$: $\ldots\ldots , -۲\pi + \frac{\pi}{۶} , \frac{\pi}{۶} , ۲\pi + \frac{\pi}{۶} , \ldots\ldots$

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{۶}$: $\ldots\ldots , -\pi - \frac{\pi}{۶} , \pi - \frac{\pi}{۶} , ۳\pi - \frac{\pi}{۶} , \ldots\ldots$

برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به‌صورت $\sin x = \sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.



با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال : معادلهٔ $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & , \ k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} & , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

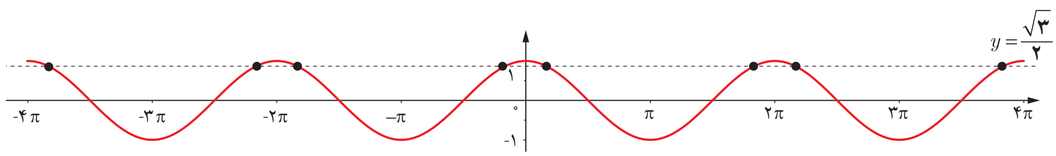
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

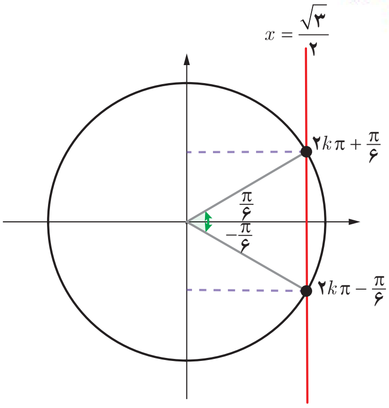
$$\sin x = \frac{-\sqrt{8}}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

فعالیت

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



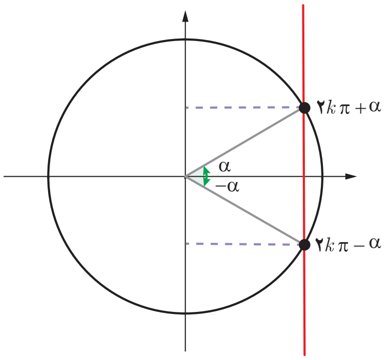
$x=\frac{\pi}{۶}, x=۲\pi-\frac{\pi}{۶}, x=۲\pi+\frac{\pi}{۶}, x=-\frac{\pi}{۶}, x=-۲\pi+\frac{\pi}{۶},...$



الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-۱\le a\le ۱$ در معادله $\cos x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha$ و $x=۲k\pi-\alpha$, $k\in\mathbb{Z}$

ب: $\frac{\pi}{۶}$ زاویه هایی هم انتها با $\Rightarrow \frac{\pi}{۶}, ۲\pi+\frac{\pi}{۶}, ۴\pi+\frac{\pi}{۶} \longrightarrow k\in\mathbb{Z}, x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$

$-\frac{\pi}{۶}$ زاویه هایی هم انتها با $\Rightarrow -\frac{\pi}{۶}, -۲\pi-\frac{\pi}{۶}, ۲\pi-\frac{\pi}{۶}, -۴\pi-\frac{\pi}{۶} \longrightarrow k\in\mathbb{Z}, x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : جواب‌های معادله $\cos x=\frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-۳\pi,\pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$ پس معادله به‌صورت $\cos x=\cos\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند :

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x=-۲\pi-\frac{\pi}{۳}, -۲\pi+\frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال : معادله $\sin ۲x=\sin ۳x$ را حل کنید.

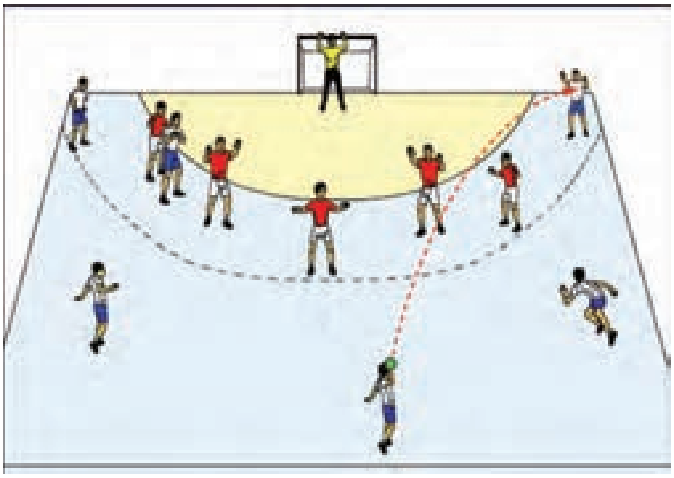
می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

$$\begin{cases} ۲x=۲k\pi+۳x \Rightarrow x=۲k\pi & , \ k\in\mathbb{Z} \\ ۲x=(۲k+۱)\pi-۳x \Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۵} & , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$$
$$۲\sin ۳x = \sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۳}\pi - \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت ۱۶ m/s برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$۱۲/۸ = \frac{(۱۶)^۲ \sin ۲\theta}{۱۰} \Rightarrow \sin ۲\theta = \frac{۱۲/۸ \times ۱۰}{۲۵۶} \Rightarrow \sin ۲\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲\theta = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۲\theta = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{۱۲}$ می‌باشد.

مثال : جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x \cos x = ۲\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $\cos x(2\cos x-9)=5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $2\cos^2 x-9\cos x-5=0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x=t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2-9t-5=0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t=-\frac{1}{2}$ و $t=5$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x=5$ و $\cos x=-\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x=5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{1}{2}$ را به‌دست می‌آوریم.

زیرا مقادیر کسینوس همواره بین مثبت یک ومنفی یک می باشد

$$\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\ ,\ k=\mathbb{Z}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

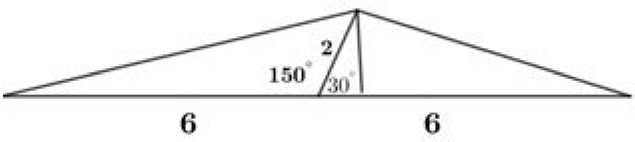
۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x$ ب) $\cos 2x-\cos x+1=0$

پ) $\cos x=\cos 2x$ ت) $\cos 2x-\sin x+1=1$

ث) $\cos^2 x-\sin x=\frac{1}{4}$ ج) $\sin x-\cos 2x=0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\times 6\times\sin C=3\rightarrow\sin C=\frac{1}{2}\rightarrow C=30^\circ,150^\circ$$

حل تمرین صفحه ۴۸:

الف)

$$\sin^{۲}\alpha = ۱ - \left(\frac{۵}{۱۳}\right)^{۲} = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱ = ۲ \times \frac{۲۵}{۱۶۹} - ۱ = -\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$$

ب)

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha.\cos\alpha = ۲ \times \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$$

حل تمرین ۲:

$$\sin^{۲} ۲۲/۵ = \frac{۱-\cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow \sin ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos^{۲} ۲۲/۵ = \frac{۱+\cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow \cos ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

حل تمرین ۳:

الف)

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$$

$$1 = \sin 3x \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

ب)

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 \rightarrow \cos x\,(2\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پ)

$$\cos x = \cos 2x \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

ت)

$$\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} t^2 + t - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow & \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث)

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} t^2 + t - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 3 = 4 \rightarrow t = \frac{-1 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow & \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array} \\ \sin x = \frac{-3}{2} & \text{غیر ممکن} \end{cases}$$

ج)

$$\sin x - \cos ۲x = ۰$$

$$\sin x = \cos ۲x = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - ۲x\right) \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{۲} - ۲x\right) \rightarrow x = -۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$