درس اوّل

حد بی‌نهایت

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش‌نیازها باید ارائه گردد.

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x-a)$:

فعالیت

۱ الف) چندجمله‌ای $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x-۳)$ تقسیم کرده‌ایم. جاهای خالی را پر کنید :

$$\begin{array}{l|l} \cancel{۲x^۲}-۵x+۱ & x-۳ \\ \cline{2-2} -(۲x^۲-۶x) & ۲x+\boxed{۱} \\ \hline \quad\quad \cancel{x}+۱ & \\ \quad -(\boxed{x}-۳) & \\ \hline \quad\quad ۴ & \end{array}$$

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم $R=$ ۴.

پ) مقدار $f(۳)$ را محاسبه کنید. f(۳)=۲(۹)-۵(۳)+۱=۱۸-۱۵+۱=۴

ت) $f(۳)$ و R چه رابطه‌ای با هم دارند؟ برابرند

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید : $۲x^۲-۵x+۱=(x-۳)(۲x+\boxed{۱})+۴$

۲ الف) اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چندجمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج‌قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقیماندهٔ آن عدد ثابت R باشد :

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \cline{2-2} & Q(x) \\ \hline R & \end{array}$$

رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است :

$$f(x)=(x-a)\,Q(x)+R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x=a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطهٔ فوق خواهیم داشت :

$$f(a)=\underbrace{(a-a)Q(a)}_{۰}+R\Rightarrow f(a)=R$$

ب) از رابطهٔ اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می‌شود که :

قضیه : در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

نتیجهٔ حاضر را می‌توان برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

کار در کلاس

۱ در چندجمله‌ای $f(x)=۳x^۲-۵x-۲$، مقدار $f(۲)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۲-۵x-۲ & x-۲ \\ -(۳x^۲-۶x) & ۳x+۱ \\ x-۲ & \\ -(x-۲) & \\ R=۰ & \end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم داریم : $f(x)=۳x^۲-۵x-۲=(x-۲)\,(۳x+\cdots)$

همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به‌صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده‌است.

۲ چندجمله‌ای $g(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ را در نظر بگیرید.

$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$

$g(-۱)=۲(-۱)^۳+(-۱)^۲+۱=-۲+۱+۱=۰$

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+۱)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟ بله

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید :

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳+x^۲+۱ & x+۱ \\ -(۲x^۳+۲x^۲) & ۲x^۲-x+۱ \\ -x^۲+۱ & \\ -(-x^۲-x) & \\ x+۱ & \\ -(x+۱) & \\ ۰ & \end{array}$$

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید. $g(x)=(x+۱)(۲x^۲-x+۱)$

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر دوجمله‌ای $x+۲$ بخش‌پذیر است.

$x+۲=۰\rightarrow x=-۲$

$f(-۲)=۲(-۲)^۳+۵(-۲)^۲-۳(-۲)-۱۰=-۱۶+۲۰+۶-۱۰=۰\Rightarrow \boxed{R=۰}$

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایهٔ قبل اشنا هستیم :

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به‌طوری که $m\neq ۰$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

مثال[۱] :
$$\lim_{x\to ۵}\frac{x^۲-۳x+۲}{x+۱}=\frac{۱۲}{۶}=۲$$

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a)=g(a)=۰$، در این صورت دیگر قضیهٔ بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a)=۰$ و $g(a)=۰$، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+x-۲}$ را محاسبه کنید.

حل : صورت و مخرج کسر به ازای $x=۱$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x-۱)$ بخش‌پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+x-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(x-۱)}(x+۲)}=\frac{۱+۱}{۱+۲}=\frac{۲}{۳}$$

۱ــ در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجهٔ صورت و مخرج حداکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی با فرجهٔ حداکثر ۳ مورد بحث هستند. بنابراین تابع‌های شامل قدر مطلق، جزء صحیح و نسبت‌های مثلثاتی مدنظر نیستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال : حد تابع $f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را در نقطهٔ $x=-2$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x=-2$ برابر صفرند. باید عامل $(x+2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله به حاصل‌ضرب عامل‌های اوّل تجزیه کنیم. اما برای تجزیهٔ صورت، آن را بر $(x+2)$ تقسیم می‌کنیم :

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^3}+3x^2+4 & x+2 \\ -(\cancel{2x^3}+4x^2) & 2x^2-x+2 \\ \hline \cancel{-x^2}+4 & \\ -(\cancel{-x^2}-2x) & \\ \hline \cancel{2x}+\cancel{4} & \\ -(\cancel{2x}+\cancel{4}) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم می‌توان نوشت $2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)$. بنابراین :

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(2x^2-x+2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}=\frac{8+2+2}{4+4+4}=1$$

تذکر : گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

مثال : حد تابع $g(x)=\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطهٔ به طول $x=5$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطهٔ ۵ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2+\sqrt{x-1}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\lim_{x\to 5} g(x)=\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

مثال : حد تابع $h(x)=\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$ را در $x=8$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : هم حد صورت و هم حد مخرج در $x=8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x\to 8} h(x)=\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x-8}}=8(4+4+4)=96$$

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+3x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}$

ت) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$

ث) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$

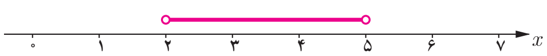
ج) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}$

حد نامتناهی

تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ‌تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطهٔ a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می‌کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

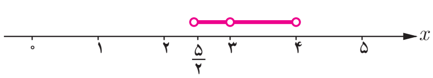
همسایگی : هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.
به‌عبارت دیگر اگر $x_0\in(a\,,\,b)$ آنگاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 می‌باشد.

مثال : بازهٔ $(2\,,\,5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازهٔ $(0\,,\,4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می‌شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



همسایگی محذوف : اگر بازهٔ (a,b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a\,,\,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ $(\frac{5}{2}\,,\,4)-\{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می‌باشد.



کاردرکلاس صفحه ۴۵: الف)

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \lim_{x \to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{x\cancel{(x+3)}} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)}{x} = \frac{-6}{-3} = 2$$

ب)

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}(4x-2)}{(2x+2)\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(4x-2)}{(2x+2)} = \frac{0}{3} = 0$$

پ)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\left(2x^2-7x+3\right)\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{(x-3)(2x-1)}=\frac{1}{0}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-2)}{(x-3)(2x-1)}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{(x-2)}{(x-3)(2x-1)}=-\infty\end{cases}$$

مخرج در نزدیکی ۳ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وحد صورت هم در ۳ برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی ۳ با مقادیرمنفی به صفر میل می کند وحد صورت هم در ۳ برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

ت)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)}{\left(x+\sqrt{2x+3}\right)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}\left(x-\sqrt{2x+3}\right)}{(x-3)\cancel{(x+1)}}=\frac{+4}{-4}=-1$$

ش)

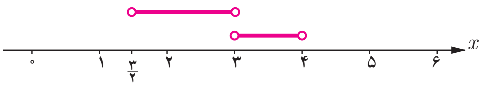
$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{\overbrace{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}^{x^{۲}-x}}{(x+۲)(x-۱)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x\,\cancel{(x-۱)}}{(x+۲)\,\cancel{(x-۱)}\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x}{(x+۲)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\frac{۱}{۶}$$

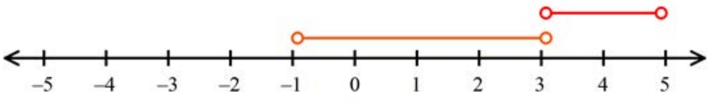
ج)

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^{۲}+۳x+۲}=\lim_{x\to -۱}\frac{\left(\sqrt[۳]{x}+۱\right)\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱\right)}{(x+۲)(x+۱)\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱\right)}=\lim_{x\to -۱}\frac{\cancel{(x+۱)}}{(x+۲)\,\cancel{(x+۱)}\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱\right)}=\lim_{x\to -۱}\frac{۱}{(x+۲)\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱\right)}=\frac{۱}{۳}$$

همسایگی چپ و راست : اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_\circ, x_\circ + r)$ یک همسایگی راست $x_\circ$ نامیده می‌شود. همچنین، $(x_\circ - r, x_\circ)$ را یک همسایگی چپ $x_\circ$ می‌نامیم.

مثال : بازهٔ (۴ , ۳) یک همسایگی راست ۳ و بازهٔ $(\frac{۳}{۲}, ۳)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.





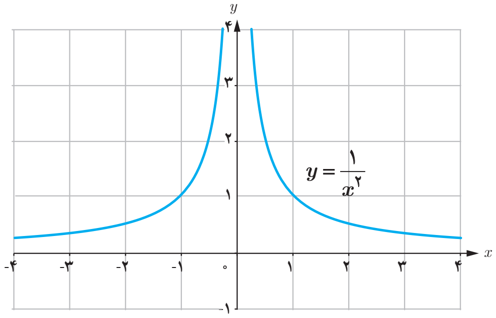
همسایگی راست (۳،۵) و همسایگی چپ (۱،۳-)

فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{۱}{x^۲}$ را در صورت وجود به‌دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ در هر نقطهٔ غیرصفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{\circ\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	۰/۲-	۰/۱-	۰/۰۱-	۰/۰۰۰۱-	$\to \circ \leftarrow$	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲
$f(x)=\frac{۱}{x^۲}$	۲۵	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	$\to ? \leftarrow$	... ۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	... ۱۰۰۰۰	۱۰۰	۲۵

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار $x^۲$ نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{۱}{x^۲}$، به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار[۱] تابع $y=\frac{۱}{x^۲}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازهٔ کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقدارهای بزرگ‌شوندهٔ $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{۱}{x^۲}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$.



تذکر : همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطهٔ $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{۱}{x^۲}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این‌گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

۱ــ رسم نمودار تابع‌های گویا جزو اهداف کتاب حاضر نمی‌باشد.

تعریف ۱ : فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

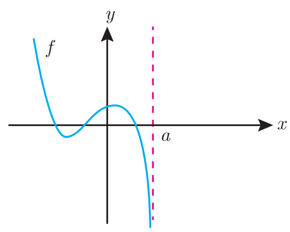
رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود :

تعریف ۲ : فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف .... a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر ... کرد، مشروط بر آنکه x به قدر . کافی. . به a نزدیک اختیار شود.

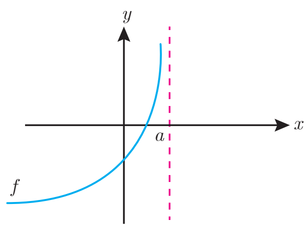
حدهای یک طرفهٔ نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳ : فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

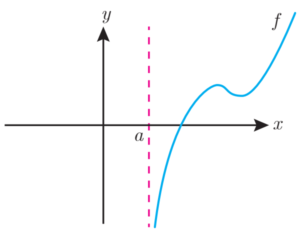
به نمودار مربوط به $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک‌طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



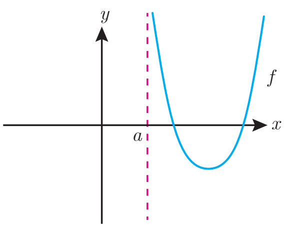
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

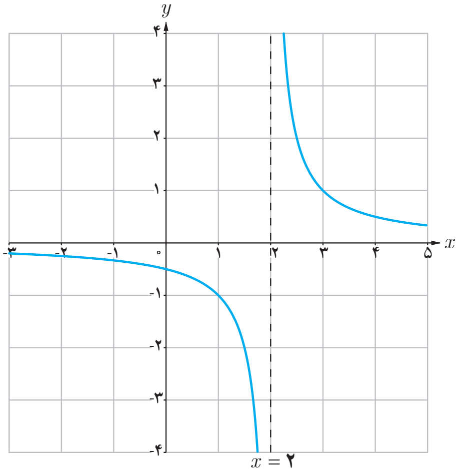


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

مثال : حد چپ و راست تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ را در $x=۲$ به دست آورید.



حل : نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=۲$ دقت نمایید. وقتی $x \to ۲^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{۱}{x-۲}$ مثبت و بسیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود. بنابراین همان‌طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x-۲}=+\infty$.

به همین ترتیب وقتی $x \to ۲^-$، مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{۱}{x-۲}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۱}{x-۲}=-\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیهٔ زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

قضیه : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ در این صورت :

الف) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : قضیهٔ قبل، برای حالتی که $x\to a^+$ و یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}$ را محاسبه کنید[1].

حل : مخرج در نزدیکی $\frac{۱}{۲}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{۱}{۲}$ برابر ۳- است.

پس بنابر قسمت (پ) قضیهٔ قبل داریم :

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}=-\infty$$

۱ــ در اینجا حد آن دسته از توابع کسری مدنظر است که به‌صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشند. بنابراین حالت‌هایی مثل $\infty\times ۰$ و $\infty-\infty$ مورد نظر نیستند که رعایت این مطلب در سؤالات ارزشیابی الزامی است.

کار در کلاس

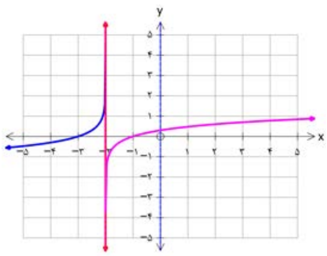
۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{۲x}{x-۵}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \dfrac{۲x}{x-۵}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-۱}{x^۲}$ ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۲}{|x-۳|}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۳}} \dfrac{[x]}{|۳x+۱|}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x+۱}{\sin^۲ x}$

۲ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=+\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.



تمرین

۱ الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۱$ بر دوجمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \dfrac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{x^۳-۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}$ پ) $\lim\limits_{x\to -۴} \dfrac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}$

۳ حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^۲-x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}$ پ) $\lim\limits_{x\to -۸} \dfrac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}$

۴ حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{۱}{x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-۱}{|x|}$ پ) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{۱}{x-۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to -۶} \dfrac{۹}{(x+۶)^۲}$ ث) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{-۱}{(x-۳)^۴}$ ج) $\lim\limits_{x\to \frac{-۱}{۲}} \dfrac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{۱-۵x}{x^۲-۹}$ ح) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} \dfrac{-۳x}{x^۲-۴}$ خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \dfrac{۱}{\cos x}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x$ ذ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x$ ر) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{[x]-۳}{x-۳}$

۵ الف) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=+\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

حل کاردر کلاس صفحه ۵۷:

الف) $\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}=\frac{10}{0^-}=-\infty$

مخرج در نزدیکی ۵ با مقادیرمنفی به صفر میل می کند وحد صورت هم در ۵ برابر۱۰ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

ب) $\lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}=\frac{10}{0^+}=+\infty$

مخرج در نزدیکی۵ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وحد صورت هم در ۵ برابر۱۰ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

پ) $\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{0}=-\infty$

مخرج در نزدیکی صفر همواره با مقادیر مثبت به صفرمیل می کند وصورت هم برابر۱- است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

ت) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{|x-3|}=\frac{1}{0}=+\infty$

مخرج در نزدیکی۳ همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وح صورت هم برابر۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

ث) $\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{[x]}{|3x+1|}=\frac{-1}{0}=-\infty$

مخرج در نزدیکی $\frac{-1}{3}$ همواره با مقادیر مثبت به صفرمیل می کند وصورت هم $\left[\frac{-1}{3}\right]=-1$ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

ج) $\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\sin^2 x}=\frac{+1}{0}=+\infty$

مخرج در نزدیکی صفر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وحد صورت هم درصفر برابر۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

حل تمرین صفحه ۵۷ سوال۱: الف)

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$f(-1)=2(-1)^3+(-1)^2+1=-2+1+1=0 \rightarrow \boxed{R=0}$$

ب)

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-(2x^3+2x^2)} & 2x^2-x+1 \\ -x^2+1 & \\ \underline{-(-x^2-x)} & \\ x+1 & \\ \underline{-(x+1)} & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(2x^2-x+1)$$

تمرین ۲:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\cancel{2}x \cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}}{\cancel{2} \cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)} (2x + 1)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x}{(2x + 1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x - 5)} (x^2 + x - 1)}{\cancel{(x - 5)} (x + 5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 + x - 1}{(x + 5)} = \frac{25 + 5 - 1}{10} = \frac{29}{10}$$

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{\cancel{(x + 4)} (x - 1)}{\cancel{(x + 4)} (x^2 + 1)} = \lim_{x \to -4} \frac{x - 1}{x^2 + 1} = \frac{-5}{17}$$

تمرین ۲:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^{۲}-x}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^{۲}-x}\times\frac{x+\sqrt{۲x-۱}}{x+\sqrt{۲x-۱}}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x(x-۱)\left(x+\sqrt{۲x-۱}\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x-۱)}{x\,\cancel{(x-۱)}\left(x+\sqrt{۲x-۱}\right)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{x\left(x+\sqrt{۲x-۱}\right)}=\frac{۱-۱}{۱(۱+۱)}=\frac{۰}{۲}=۰$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)\left(۲+\sqrt{x+۱}\right)}{\left(۲-\sqrt{x+۱}\right)\left(۲+\sqrt{x+۱}\right)}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)\left(۲+\sqrt{x+۱}\right)}{\underbrace{۴-x-۱}_{-\cancel{(x-۳)}}}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۳)\left(۲+\sqrt{x+۱}\right)}{-۱}=\frac{۶\times ۴}{-۱}=-۲۴$$

$$\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}=\lim_{x\to -۸}\frac{۲(x+۸)\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)}{\left(\sqrt[۳]{x}+۲\right)\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)}=\lim_{x\to -۸}\frac{۲\cancel{(x+۸)}\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)}{\cancel{(x+۸)}}$$

$$=\lim_{x\to -۸}۲\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)=۲(۴+۲\times ۲+۴)=۲۴$$

تمرین ۴:

مخرج در نزدیکی صفر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و صورت برابر ۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=+\infty$$

مخرج در نزدیکی صفر به صفر میل می کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{|x|}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

مخرج در نزدیکی ۶- چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت برابر ۹ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x\to -6}\frac{9}{(x+6)^2}=\frac{9}{0}=+\infty$$

مخرج درنزدیکی ۳ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x-3)^2}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

مخرج درنزدیکی $-\frac{1}{2}$ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱- است که عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی ۳ به ازای مقادیر مثبت صفر میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱۴- یک عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9} = \frac{1-15}{0} = \frac{-14}{0} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی ۲- به ازای مقادیر منفی صفر میل می کند و صورت حاصلش برابر ۶ یک عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4} = \frac{-3(-2)}{0} = \frac{6}{0} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{2}$ به صفرازسمت منفی میل می کند و صورت برابر ۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{0}=-\infty$$

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{2}$ از سمت منفی ها به صفر مثبت میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{0}=+\infty$$

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{2}$ از سمت مثبت ها به صفر منفی میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\tan x=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{0}=-\infty$$

مخرج در نزدیکی ۳ از سمت چپ به صفر منفی میل می کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3}=\frac{\overbrace{[3]}^{2}-3}{3-3}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

تمرین ۵: الف) حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود از هرعدد مثبت دلخواهی بزرگتر است.

ب) حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود از هرعدد مثبت دلخواهی کوچکتر است.

پ)