درس دوم

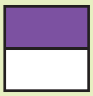
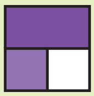
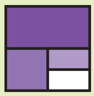
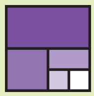
حد در بی‌نهایت

حد در بی‌نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شد، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحلهٔ اوّل، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحلهٔ دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

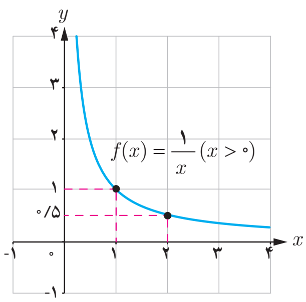
مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$	$1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$	$1-\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}$	...

الف) در مرحلهٔ دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟ $1-\frac{1}{2^{10}}=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$

ب) در مرحلهٔ nام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟ $1-\frac{1}{2^n}$

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحلهٔ nام چه می‌توان گفت؟

تقریبا کل سطح مربع رنگ می شود



مثال : تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بازهٔ $(0\ ,+\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\to +\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\to ?$ ۰

از جدول دیده می‌شود که با افزایش مقدار x، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصلهٔ $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از ۰/۰۰۰۰۱ باشد، لازم است x بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰ انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می‌توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصلهٔ $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۱ باشد؟

با این شرایط می‌گوییم حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. به‌طور کلی می‌توان گفت :

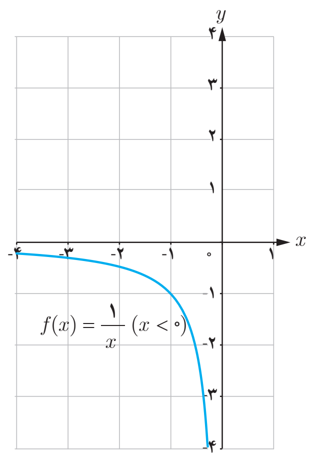
> اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود :

> فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه. می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی.. کوچک و منفی اختیار شود.

مثال : با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ که در بازهٔ $(-\infty\,,0)$ رسم شده است، دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

x	-100	-1000	-100000	-1000000	...	$-\infty \leftarrow$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$-0/01$	$-0/001$	$-0/00001$	$-0/000001$	...	0 ؟ $\leftarrow$



در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیهٔ زیر مفیدند.

قضیه ۱ : فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این‌صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{x^n}=۰$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۱}{x^n}=۰$.

قضیه ۲ : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=m$. در این صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\pm\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l\pm m$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x).g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l.m$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\dfrac{l}{m}\quad(m\neq ۰)$

تذکر : قضیهٔ ۲ برای وقتی که $x\to-\infty$ نیز برقرار است.

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۷x^۲-۴x+۱}{۳x^۲+۵x-۶}$ را به دست آورید.

حل : برای محاسبهٔ این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی $x^۲$ تقسیم کنیم (چون $x\to+\infty$، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^۲\neq ۰$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۷x^۲-۴x+۱}{۳x^۲+۵x-۶}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{۷x^۲-۴x+۱}{x^۲}}{\dfrac{۳x^۲+۵x-۶}{x^۲}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۷-\dfrac{۴}{x}+\dfrac{۱}{x^۲}}{۳+\dfrac{۵}{x}-\dfrac{۶}{x^۲}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(۷-\dfrac{۴}{x}+\dfrac{۱}{x^۲})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(۳+\dfrac{۵}{x}-\dfrac{۶}{x^۲})}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}۷-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۴}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{x^۲}}{\lim\limits_{x\to+\infty}۳+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۵}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۶}{x^۲}}=\frac{۷-۰+۰}{۳+۰-۰}=\frac{۷}{۳}$$

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۳x+۲}{x-۱}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{۲-۳x}$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-۱) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.
ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

حل کار در کلاس صفحه ۶۰: سوال ۱:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+۲}{x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(۳-\frac{۲}{x}\right)}{\cancel{x}\left(۱-\frac{۱}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}۳-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}۱-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}}=\frac{۳-۰}{۱-۰}=۳$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\frac{۱-۵t^۲}{t^۲}}{\frac{t^۲+۳t}{t^۲}}=\frac{\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{۱}{t^۲}-\lim\limits_{t\to-\infty}۵}{\lim\limits_{t\to-\infty}۱+\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{۳}{t}}=\frac{۰-۵}{۱+۰}=-۵$$

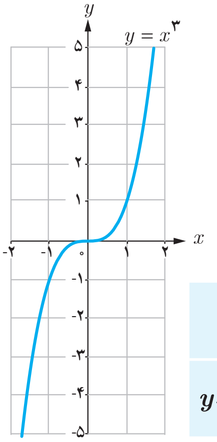
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۲-۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{۱}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{۲}{x}-۳\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{۱}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{۲}{x}-۳\right)}=\frac{۰}{-۳}=۰$$

سوال ۲: الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{-x+۵}=-۱$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱۰۰x^۲+۳x}{x^۲+۵}=۱۰۰$

حد نامتناهی در بی‌نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x\to +\infty$ یا $x\to -\infty$، مقدار آنها یعنی $f(x)$ می‌تواند به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این‌گونه تابع‌ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مثال : تابع $f(x)=x^3$ را در نظر بگیرید.



x	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\rightarrow +\infty$
$y=x^3$	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰	$\rightarrow +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می‌دهند که با افزایش مقدار x، مقدار x^3 هم افزایش می‌یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می‌توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$. در حالت کلی داریم :

تعریف : فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a\ ,\ +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می‌شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می‌توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$. در حالت کلی می‌توان گفت :

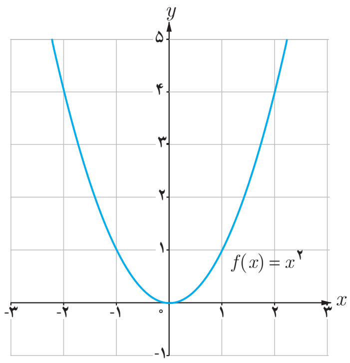
تعریف : فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty\ ,\ b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تذکر ۱ : رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند.

تذکر ۲ : رابطه‌هایی مانند $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ را حد نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم. همچنان‌که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت‌هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چراکه $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

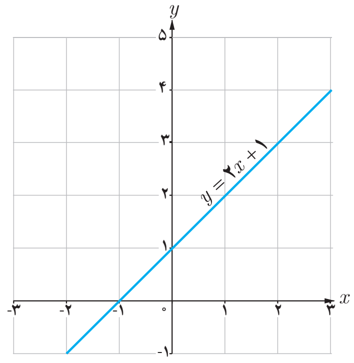
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



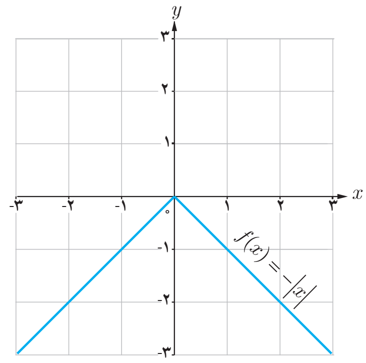
الف) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



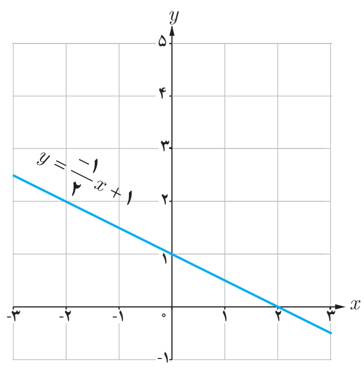
ب) $\lim_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$



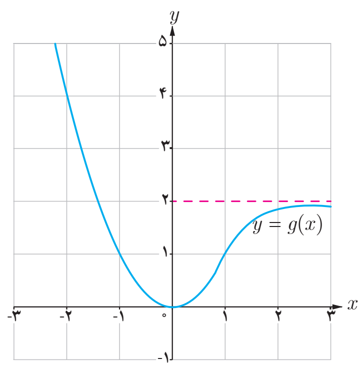
پ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



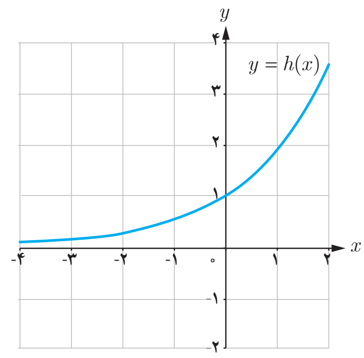
ت) $\lim_{x\to-\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = -\infty$



ث) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

از قضیهٔ زیر برای محاسبهٔ حد تابع یک‌جمله‌ای $f(x)=ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

قضیه : فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر باشد.

الف) $\lim_{x\to+\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases}$

ب) $\lim_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x-۳+۵x^۲)$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳+۴x^۲-۵x-۹)$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x-۳+۵x^۲)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^۲(\frac{۲}{x}-\frac{۳}{x^۲}+۵)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{۲}{x}$ و $\frac{۳}{x^۲}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}x^۲(\frac{۲}{x}-\frac{۳}{x^۲}+۵)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^۲(۰-۰+۵)=\lim\limits_{x\to+\infty}۵x^۲=+\infty$$

ب) $$\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳+۴x^۲-۵x-۹)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^۳(-۲+\frac{۴}{x}-\frac{۵}{x^۲}-\frac{۹}{x^۳})=\lim\limits_{x\to-\infty}x^۳(-۲+۰)$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳)=+\infty$$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جملهٔ با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی :

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت :

$$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ax^n \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim\limits_{x\to+\infty}ax^n$$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۱۲x^۵+۷x^۳-۲x-۹}{۳x^۲-۸x+۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۱۲x^۵}{۳x^۲}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-۴x^۳)=+\infty$$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳-۵x+۴}{۷x^۳-۱۱x^۲-۶x}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵x+۴}{x^۳+x-۸}$ پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}$

تمرین

۱ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to۰}f(x)$

ب) $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

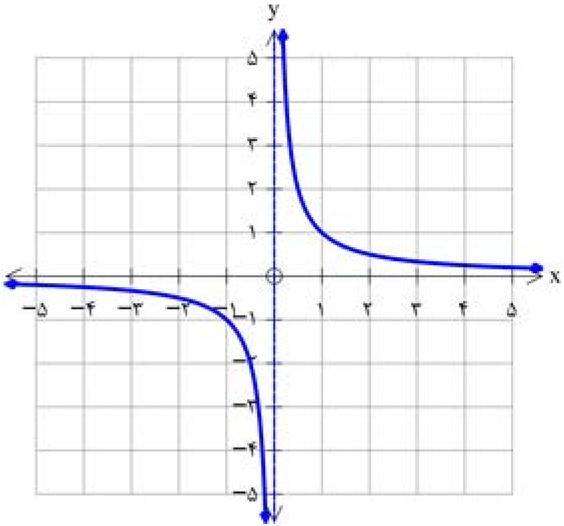
حل کاردرکلاس صفحه ۶۳:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۳}-۵x+۴}{۷x^{۳}-۱۱x^{۲}-۶x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۳}}{۷x^{۳}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲}{۷}=\frac{۲}{۷}$$

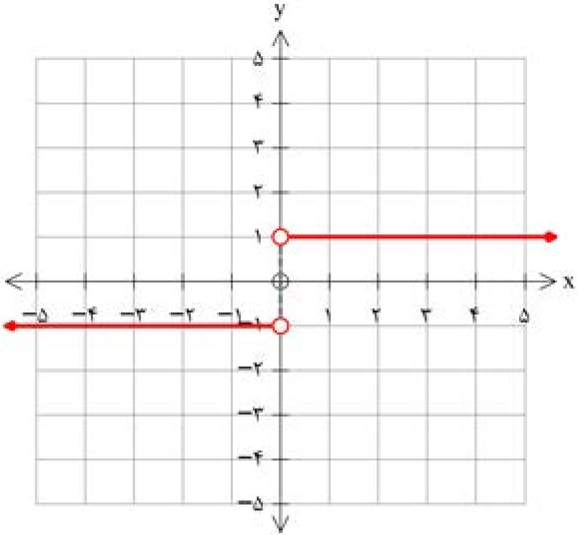
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x+۴}{x^{۳}+x-۸}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x}{x^{۳}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵}{x^{۲}}=۰$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^{۷}+۵x^{۲}}{۲x^{۳}+۹}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^{۷}}{۲x^{۳}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-۲x^{۴}\right)=-۲(+\infty)=-\infty$$

حل تمرین صفحه ۶۳: تمرین ۱:



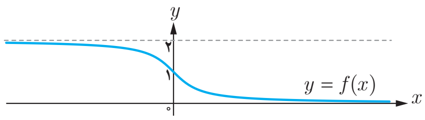
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty\end{cases}$$



$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-1,\ \lim_{x\to+\infty} g(x)=1$$

۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

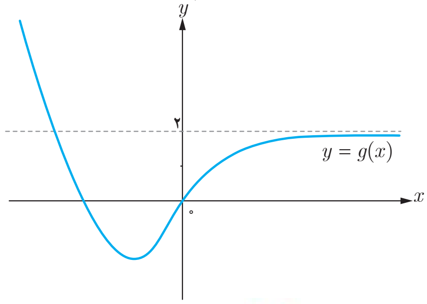
(الف)



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

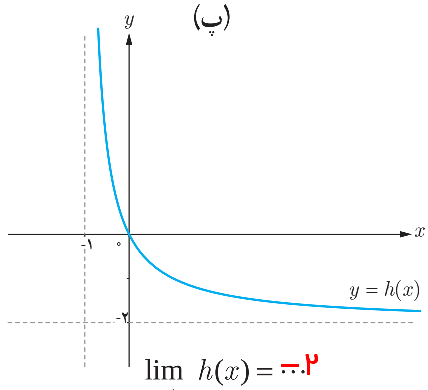
(ب)



$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$

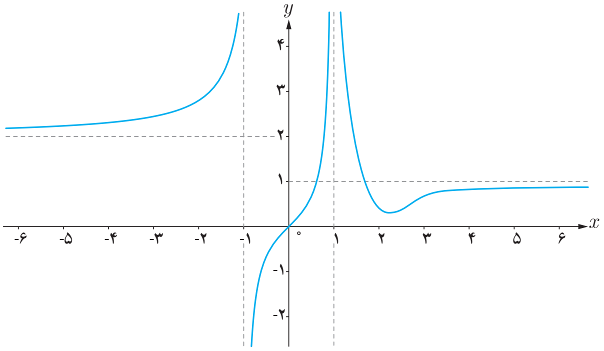
(پ)



$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -2$

$\lim_{x\to(-1)^+} h(x) = +\infty$

۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$

ت) $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty} \left(9 + \frac{7}{x^3}\right)$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6\right)$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x-3}$

ت) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

ث) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{3x+1}$

ج) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$

چ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$

ح) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

خ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

د) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{4}$

۵ الف) هر یک از رابطه‌های $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

تمرین ۴:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{۱}{۲}x^{۳}+۷x۲-۶\right)=\lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{۱}{۲}x^{۳}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(۹+\frac{۷}{x^{۳}}\right)=۹+۰=۹$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{۳+\frac{۱}{x^{۲}}}{\frac{۴}{x}-۵}\right)=\frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(۳+\frac{۱}{x^{۲}}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{۴}{x}-۵\right)}=\frac{۳}{-۵}=-\frac{۳}{۵}$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{۱}{۲x-۳}\right)=\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{۱}{۲x}\right)=۰$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{۲x^{۲}-۳x+۱}{x^{۲}+۵x-۳}\right)=\frac{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(۲x^{۲}\right)}{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(x^{۲}\right)}=۲$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{۲x-۱}{۳x+۱}\right)=\frac{\lim\limits_{x \to +\infty}(۲x)}{\lim\limits_{x \to +\infty}(۳x)}=\frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۲x^{۵}-۶x^{۳}-x}{x^{۲}-۵x+۱}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(۲x^{۵}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^{۲}\right)}=\lim_{x\to-\infty}۲x^{۳}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{۲}+x}{۳-x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{۲}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(-x\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-۶x^{۳}+۷x-۹}{۲x^{۳}-۴x^{۲}+x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-۶x^{۳}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(۲x^{۳}\right)}=-۳$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۲x+۱}{۴}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(۲x\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}۴}=\frac{۱}{۲}\left(+\infty\right)=+\infty$$

تمرین ۵: الف) اگر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به ۱- نزدیک کرد

اگر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شود تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به ۲ نزدیک کرد

ب)