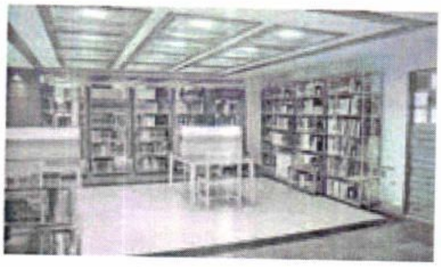
درس ۱
شمارش

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می‌تواند یکی از ۳۰ کتاب روان‌شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، ۵۵ = ۲۵ + ۳۰ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (علیهاالسلام) است. او می‌تواند به‌صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده‌روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ ۲+۳=۵ همه حالت‌های ممکن را که او می‌تواند به‌صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسید : $A=\{$پیاده‌روی, سرویس بیمارستان, تاکسی, اتوبوس, مترو$\}$.

شما برای حل کردن هر دو قسمت، از قاعده یا اصلی استفاده کردید که به اصل جمع معروف است و به‌صورت زیر بیان می‌شود.

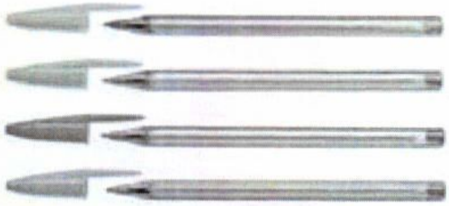
اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

مثال : شما به چند طریق می توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین چهار خودکار با چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ‌های متفاوت و سه روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کنید؟

حل : در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیا می‌تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم :

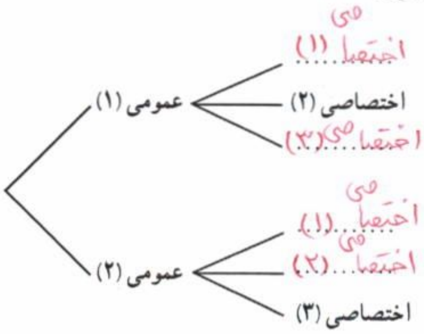
۱۲=۳+۴+۵ = تعداد انتخاب‌ها



فعالیت

فرض کنید دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی « و » یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟

با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید :



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی ..۳.. راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به ..۶.. = ..۳.. × ..۲.. طریق امکان‌پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق « و » در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

مثال : مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهامداران و هیئت امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می‌گیرند. اعضای گروه A باید دربارهٔ نتایج مساعد احتمالی اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۱۵ نفر مشورت بگیرد؟

ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

راه‌حل :

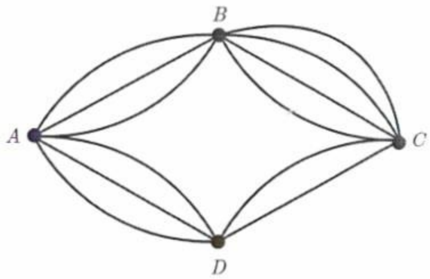
الف) از اصل جمع استفاده می‌کنیم؛ زیرا مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A «یا» یک نفر از گروه B را به ۱۵=۸+۷ طریق انتخاب کند.

ب) در این حالت، مدیرعامل می‌تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند «و» به ازای هر انتخاب از A، به ۸ طریق می‌تواند یک نفر از گروه B را انتخاب کند. بنابراین، طبق اصل ضرب به ۵۶=۸×۷ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل روبه‌رو، میان چهار شهر A، B، C و D راه‌هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان :

الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟ از A به B سه راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به ۱۲=۴×۳ طریق می‌توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \to B \to C$ «یا» $A \to D \to C$ را انتخاب کرد (اصل جمع)؛ بنابراین :

تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه‌های سفر از A به C

۱۸ = ۶ + ۱۲ = ۲ × ۳ + ۴ × ۳ =

پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می‌توان یکی از دو مسیر $B \to C \to D$ «یا» $B \to A \to D$ را انتخاب کرد؛ پس داریم :

۱۷= ۳ × ۳ + ۲ × ۴ = تعداد راه‌های مسافرت از B به D

نماد فاکتوریل

همان‌طور که برای ضرب یک عدد، مانند a، در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $a\times a=a^{۲}$، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می‌کنیم. برای مثال، $۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ و $۴!=۴\times۳\times۲\times۱$.

قرارداد : برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به‌صورت $۰!=۱$ و $۱!=۱$ تعریف می‌کنیم.

مثال : حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $۴!\times۲=(۴\times۳\times۲\times۱)\times۲=۲۴\times۲=۴۸$

ب) $\dfrac{۵!}{۳!}=\dfrac{۵\times۴\times(\overbrace{۳\times۲\times۱}^{۳!})}{(\underbrace{۳\times۲\times۱}_{۳!})}=۵\times۴=۲۰$

پ) $\dfrac{۱۰!}{۷!}=\dfrac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}}=۷۲۰$

ت) $\dfrac{۳!\times۵!\times۰!}{۷!\times۱!}=\dfrac{\cancel{۶}\times\cancel{۵!}\times۱}{۷\times\cancel{۶}\times\cancel{۵!}\times۱}=\dfrac{۱}{۷}$

جایگشت

چهار شیء متمایز a، b، c و d را در نظر بگیرید. آرایش یا حالت $abcd$، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک **جایگشت** ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می‌شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک **جایگشت** n تایی از آن n شیء می‌نامیم.»

فعالیت

۱ــ اگر افراد A ، B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۳	۲	۱	
A یا B یا C	یکی از ۲ نفر باقی‌مانده	۱ نفر باقی‌مانده	$\to ۳\times۲\times۱=۶$

$ABC-ACB-BAC-BCA-CAB-CBA$

(اول شخص B، بعد C و آخر A سخنرانی کرده‌اند)

۲ــ با ارقام ۲، ۷، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

تعداد انتخاب‌ها $\leftarrow$ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ $\leftarrow$ تعداد اعداد ۵ رقمی $=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵!$

۳ـ ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.

حل : اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $n-1$ انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با، $n!$ = $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$.

$\underline{n}$ $\underline{n-1}$ $\underline{n-2}$ $\underline{\ldots}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم، و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام :

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟

تعداد انتخاب‌ها ← $\underset{\text{۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}}{\underline{5}}$ $\underline{5}$ $\underline{4}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ $5\times5!=600$

(توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد ان عدد فرد است.) بنابراین :

تعداد انتخاب‌ها ← $\underline{4}$ $\underline{4}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underset{\text{۱ یا ۳ یا ۵}}{\underline{3}}$ $\longrightarrow$ $4\times4\times3\times2\times3=288$

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول : تعداد ۵ رقمی‌های فرد − تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

$=600-288=312$

روش دوم : اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم :

الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

تعداد انتخاب‌ها ← $\underline{5}$ $\underline{4}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underset{\text{صفر}}{\underline{1}}$ $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ $5!=120$

ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند :

تعداد انتخاب‌ها ← $\underline{4}$ $\underline{4}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underset{\text{۲ یا ۴}}{\underline{2}}$ $\longrightarrow$ $4\times4\times3\times2\times2=192$

$312=192+120=$ تعداد ۵ رقمی‌های زوج

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۵ رقمی‌هایی که به ۵ ختم می‌شوند + ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند = تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵

۵!=۱۲۰ $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ ۱ (صفر) ۲ ۳ ۴ ۵ ← تعداد انتخاب‌ها

۴×۴×۳×۲×۱=۹۶ $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ ۱ (۵) ۲ ۳ ۴ ۴ ← تعداد انتخاب‌ها

۲۱۶=۹۶+۱۲۰= تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵

تبدیل (انتخاب r شیء از بین n شیء، که در آن جابه‌جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد.)

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می‌توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست.)

۷×۶×۵×۴ =۸۴۰ $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ ۴ ۵ ۶ ۷ ← تعداد انتخاب‌ها

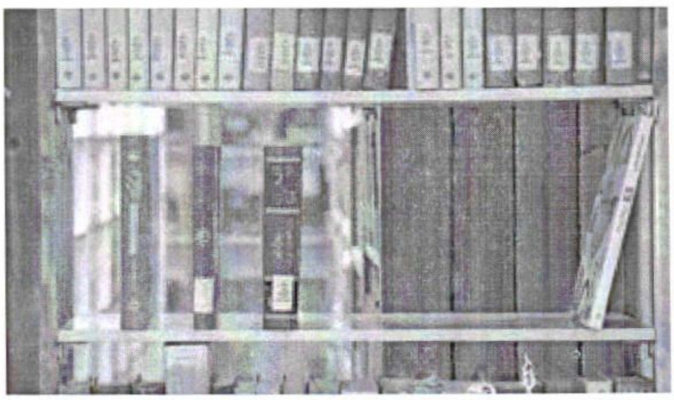
از طرفی: $۷×۶×۵×۴=\frac{۷×۶×۵×۴×۳!}{۳!}=\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷!}{(۷-۴)!}=۸۴۰$

(توجه دارید که با جابه‌جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت‌ها، جابه‌جایی ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۲. به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

۵×۴×۳=۶۰ $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ ۳ ۴ ۵ ← تعداد انتخاب‌ها

از طرفی: $\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۱۲۰}{۲}=۶۰$



۳. در حالت کلی، نشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n ($r \le n$)، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد، برابر است با : $\frac{n!}{(n-r)!}$

تعداد انتخاب‌ها ← $\underline{n}$ $\underline{n-۱}$ $\underline{n-۲}$ ... $\underline{(n-r+۲)}$ $\underline{(n-r+۱)}$

$\xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}}$ $n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۲)(n-r+۱)$

$$=\frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)\times(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

*** تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت r شیء از n شیء**

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

حل : در واقع باید سه رقم را از بین ۷ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جابه‌جایی آنها پس از انتخاب، عدد جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد.

روش اول: $P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}=۲۱۰$ = تعداد اعداد سه رقمی

روش دوم: $\underline{۷}$ $\underline{۶}$ $\underline{۵}$ $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ $۷\times۶\times۵=۲۱۰$

*** ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در ان جابه‌جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد.)**

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، !۳ جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر !۳ تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه‌های سه عضوی} = \frac{P(۴,۳)}{۳!} = \frac{۴!}{۱! \times ۳!} = ۴$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۴	۱,۲,۶	۱,۴,۶	۲,۴,۶
جایگشت‌های سه رقم انتخاب شده	۱۲۴ ۱۴۲ ۲۴۱ ۲۱۴ ۴۱۲ ۴۲۱	۱۲۶ ۱۶۲ ۲۱۶ ۲۶۱ ۶۱۲ ۶۲۱	۱۴۶ ۱۶۴ ۴۱۶ ۴۶۱ ۶۱۴ ۶۴۱	۲۴۶ ۲۶۴ ۴۲۶ ۴۶۲ ۶۲۴ ۶۴۲
	$A_1=\{۱,۲,۴\}$	$A_2=\{۱,۲,۶\}$	$A_3=\{۱,۴,۶\}$	$A_4=\{۲,۴,۶\}$

$$\text{تعداد مجموعه‌های سه عضوی} = \frac{۲۴}{۶} = ۴$$

* ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء را که جابه‌جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال : به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستمان هدیه بدهیم؟

حل : در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم،

$$\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳! \times ۴!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۳! \times ۴!} = ۳۵$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

روش اول: ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ $\longrightarrow$ ۹×۸×۷×۶×۵ = ۱۵۱۲۰

روش دوم: $P(۹,۵) = \frac{۹!}{(۹-۵)!} = \frac{۹!}{۴!} = ۱۵۱۲۰$

۲. به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

در ساختن تیم با جابه‌جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی‌شود بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم :

$$\text{تعداد تیم‌های ۶ نفره}=\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\times 3!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6!}{6!\times 3!}=84$$

۳. مجموعه ۸ عضوی $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می‌سازد (در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا اهمیت ندارد)؛ بنابراین، داریم :

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی}=\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\times 5!}=\frac{8\times 7\times 6\times 5!}{3!\times 5!}=56$$

۴. در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟

در انتخاب مهره‌های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره ابی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده‌اند. در هر صورت، ۲ قرمز و ۱ ابی خارج شده است) و بنابراین داریم :

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره}=\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\times 6!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6!}{3!\times 6!}=84$$

تمرین

۱. می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

۱۲ + ۱۱ + ۱۰ = ۳۳

۲. بین پنج شهر E ،D ،C ،B ،A مطابق شکل زیر راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان :

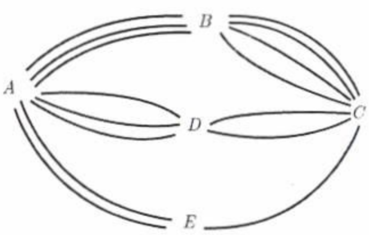
الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ (۳×۴)+(۳×۲)+(۲×۱) = ۲۰

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

(۳×۴)+(۴×۳)=۲۴

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟

۳ + (۲×۴×۳) = ۲۷



۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف : (با معنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به‌صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

۶. مجموعه $A=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}$ مفروض است؛ الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان ساخت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟ پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟ ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید : الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟ ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم :

الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

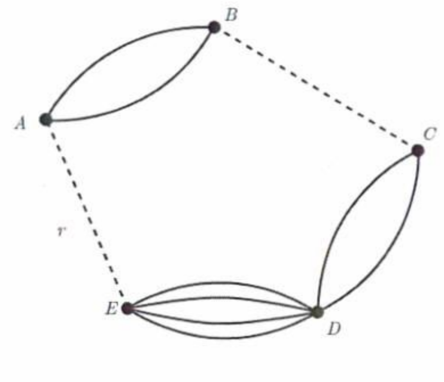
ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

۹. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به‌صورت $(۳^۲+۳\times۴+۳\times۲)$ باشد.

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر E به $\cancel{D}$ A را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



حل تمرینهای صفحه‌ی ۱۱

تمرین ۳ :

الف) $۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱=۵!=۱۲۰$

ب) $۴\times ۳\times ۱=۱۲$

پ) $۱\times ۳\times ۲\times ۱\times ۱=۶$

تمرین ۴ :

$$p(۱۰,۲)=\frac{۱۰!}{۸!}=۹۰$$

تمرین ۵ :

$$۷\times ۲\times ۳=۴۲$$

تمرین ۶ :

الف) $۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۴=۴۸۰$ ب) $۲\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲=۲۴۰$ پ) $\binom{۶}{۳}=۲۰$

ت) $\binom{۱۰}{۵}\times \binom{۶}{۱}=۲۵۲\times ۶=۱۵۱۲$

کافی است تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۴,۶,۹\}$ را پیدا کنیم.

$$\binom{۶-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

تمرین ۷ :

الف) $\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$ ب) $\binom{۱۲}{۲}=۶۶$

تمرین ۸ :

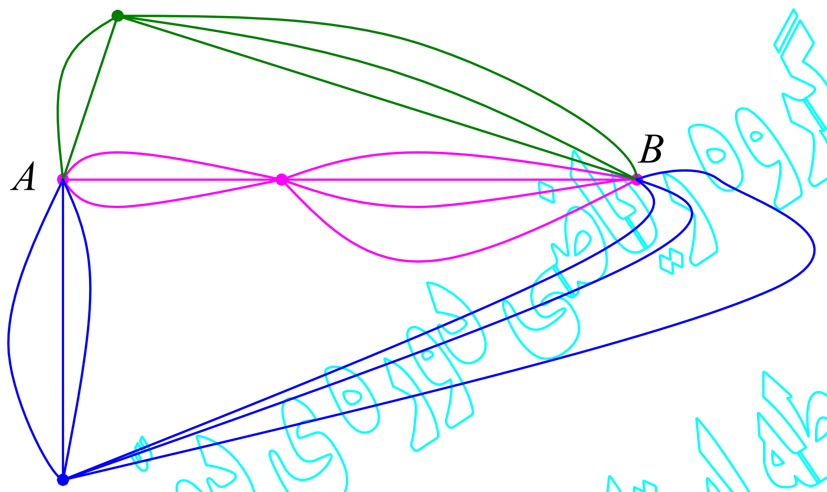
الف) $\binom{۵}{۳}\times \binom{۶}{۳}=۱۰\times ۲۰=۲۰۰$ ب) $\binom{۱۲}{۲}=????$

پ)

$$\binom{۵}{۲}\times \binom{۶}{۴}+\binom{۵}{۱}\times \binom{۶}{۵}+\binom{۵}{۰}\times \binom{۶}{۶}=(۱۰\times ۱۲)+(۵\times ۶)+(۱\times ۱)=۱۲۰+۳۰+۱=۱۵۱$$

ت) $\binom{۵}{۲}\times\binom{۶}{۴}=۱۰\times۱۲=۱۲۰$

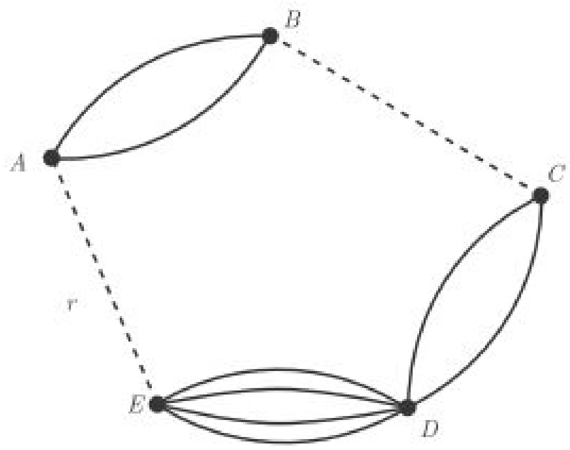
تمرین ۹ : به توجه به شکل زیر، تعداد مسیرهای سفر از شهر A به شهر B را به دست آورید.



تمرین ۱۰: به نظر می رسد که صورت مسئله اشتباه تایپی دارد. حال اگر تغییر زیر را انجام دهیم. می توان به شکل زیر عمل کرد.

$\boxed{A}$

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



اکنون اگر تعداد مسیرهای از B به C را برابر m و همچنین تعداد مسیرهای از E به A را برابر n قرار دهیم. خواهیم داشت.

$$۲\times m\times ۲+n\times ۴=۲۰\rightarrow ۴m+۴n=۲۰\xrightarrow{\div ۴} m+n=۵$$

لذا می توان نوشت :

m	۱	۲	۳	۴
n	۴	۳	۲	۱