

درس ۱

مدل سازی و دنباله

مدل سازی

در کتاب یازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبه قبض برق یک خانه یا مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم (رسم نمودار توابع متناظر با مفهوم مطرح شده).

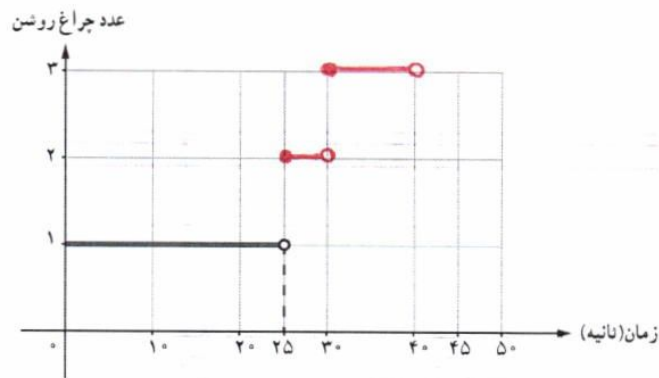
فعالیت



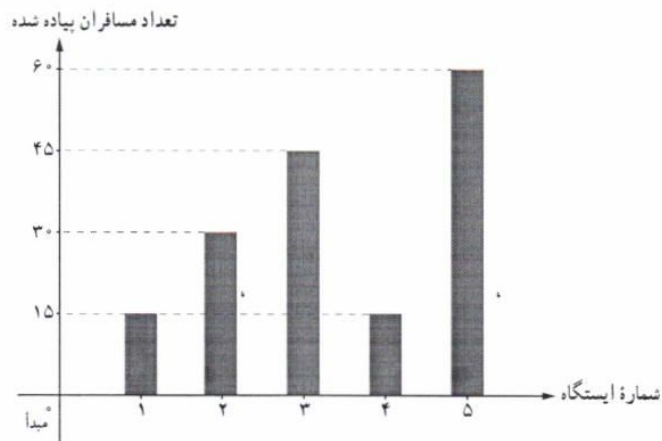
۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.
اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیه t ام، با توجه به فرض:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t < 45 \end{cases}$$

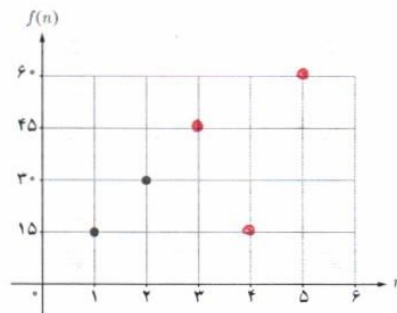
$$D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 45\}, R_f = \{1, 2, 3\}$$



۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر n ، شماره ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰	۴۵	۱۵	۶۰



$$f(n) = \begin{cases} \dots 15 \cdot n \dots & 1 \leq n \leq 3 \\ 15 + 45(n-4) & 4 \leq n \leq 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

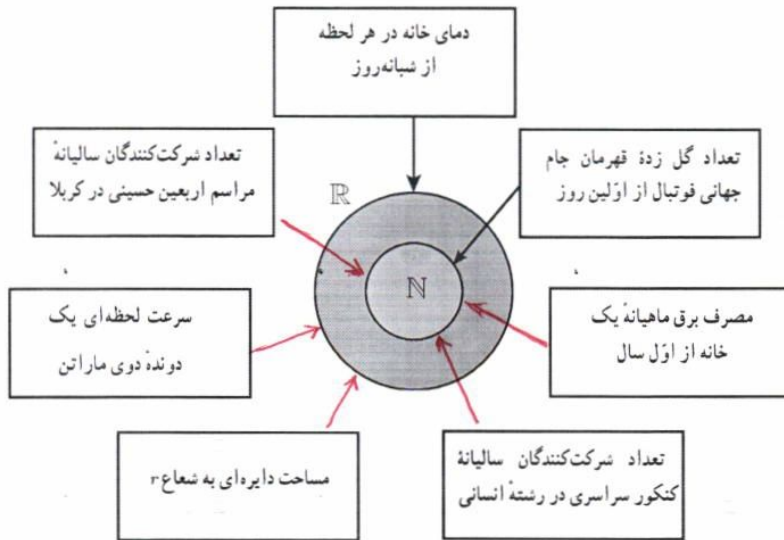
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 5\} \quad R_f = \{15, 30, 45, 15, 60\}$$

یکی از تفاوت‌های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنهاست. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع زمان شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ثانیه ۴۵م است و تابع در تمامی این زمان، قابل تعریف است، پس دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

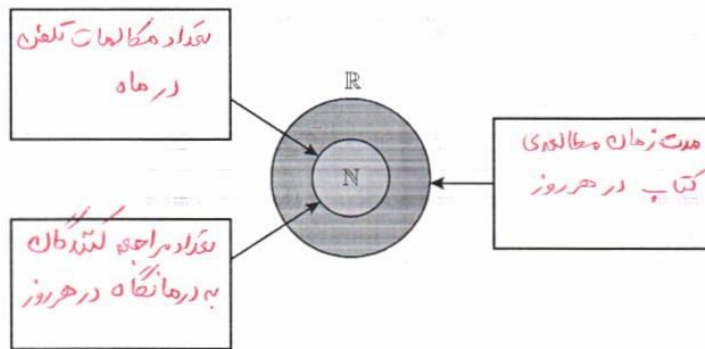
در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه‌های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و... است. پس، دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

کار در کلاس

۱. اگر f تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد:



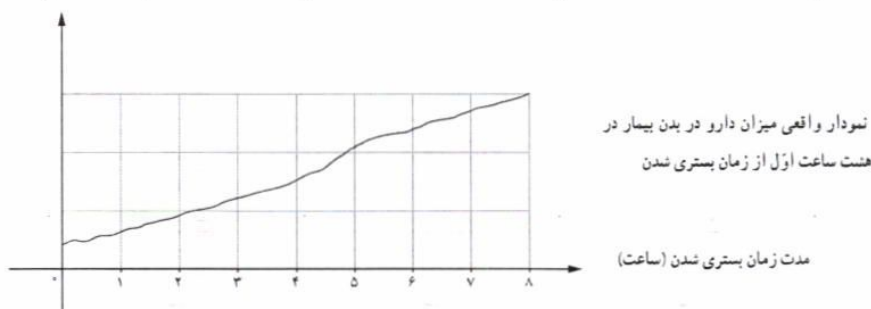
در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

کاربرد دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

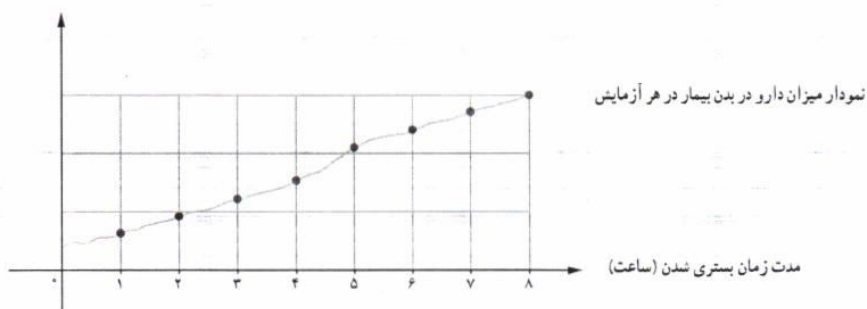
در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می‌کنیم. برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می‌تواند میزان دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه‌روز اندازه‌گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می‌کند.

به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می‌کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و...).

میزان دارو در بدن بیمار (میلی‌گرم)



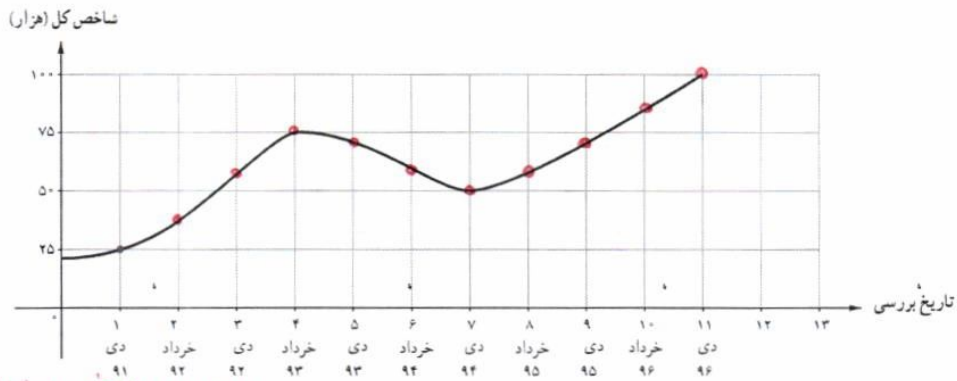
میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی‌گرم)



در فعالیت صفحه بعد، نمونه‌ای دیگر از همین کاربرد را می‌بینیم.

فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران^۱ (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می دهد:



اصحیح

از دی ماه ۹۱ تا خرداد ۹۲ افزایشی، از خرداد ۹۲ تا دی ۹۲ نزولی، از دی ۹۲ تا خرداد ۹۳ افزایشی، از خرداد ۹۳ تا دی ۹۳ نزولی، از دی ۹۳ تا خرداد ۹۴ افزایشی، از خرداد ۹۴ تا دی ۹۴ نزولی، از دی ۹۴ تا خرداد ۹۵ افزایشی، از خرداد ۹۵ تا دی ۹۵ افزایشی، از دی ۹۵ تا خرداد ۹۶ افزایشی.

الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ‌های نوشته شده معلوم کند. در سری زمانی بالا $f(n)$ را مشخص کنید. در چه فاصله‌ای روند کاهشی و در چه فاصله‌ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟
 ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

n (تاریخ بررسی)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$ مقدار شاخص کل (هزار)	۲۵	۴۰	۶۰	۷۵	۶۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۵	۱۰۰	

ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(۱۳)$ است؟ چرا؟

- ۱) ۸۵,۰۰۰ (۲) ۱۰۵,۰۰۰ (۳) ۱۱۲,۵۰۰ (۴) ۱۰۰,۰۰۰ (۵) ۱۲۵,۰۰۰

د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

۱. شاخص بورس تهران، TEPIX : Tehran Price Index

خواندنی

«شاخص بورس تهران امروز با ۱۵۰۰ واحد افزایش به ۸۵۰۰۰ واحد رسید»، «شاخص بورس امروز ۵۰۰ واحد افت داشت» اینها نمونه جملاتی است که بارها در اخبار اقتصادی شنیده‌ایم، اما این اعداد چه معنایی دارند؟ بازار بورس شاخص‌های مختلفی دارد اما شاید معروف‌ترین آنها – که در اخبار مطرح می‌شود – «شاخص کل» بورس باشد؛ همان شاخصی که نمودار آن در فعالیت بیش بررسی شد. این شاخص از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{شاخص کل سهام} = \frac{\text{ارزش جاری بازار}}{\text{ارزش پایه سهام}} \times ۱۰۰$$

در این تعریف، سال پایه سال ۱۳۶۹ در نظر گرفته شده است.

منظور از ارزش جاری بازار، مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در همان روز × تعداد سهام در روز مورد بررسی» برای تک تک شرکت‌هایی است که در بازار بورس قرار دارند. منظور از ارزش پایه سهام، نیز مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در روز پایه × تعداد سهام در روز بررسی»^۱ است. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید.

– فرض کنید در بازار بورس فقط دو شرکت A و B وجود داشته باشند. شاخص سهام کل بازار بورس مثلاً در تاریخ ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ به کمک اطلاعات جدول زیر قابل محاسبه است.

شرکت	تعداد سهام شرکت در زمان ورود به بورس (۲۰ فروردین ۱۳۶۹)	قیمت سهام شرکت در تاریخ پایه	تعداد سهام شرکت در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶	قیمت سهام در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶
A	۱۰۰۰	۴۵	۱۲۰۰	۶۰
B	۵۰۰	۳۰	۱۵۰۰	۸۰

$$\text{شاخص کل سهام} = \frac{۱۲۰۰ \times ۶۰ + ۱۵۰۰ \times ۸۰}{۱۲۰۰ \times ۴۵ + ۱۵۰۰ \times ۳۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۹۲۰۰۰}{۹۹۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱/۹۳ \times ۱۰۰ = ۱۹۳$$

عدد ۱۹۳ به معنای ۱۹۳ برابر شدن ارزش بازار در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ نسبت به ۲۰ فروردین ۱۳۶۹ است. توجه داشته باشید که شاخص کل، واحد ندارد و این عدد به تنهایی سود یا ضرر را نشان نمی‌دهد بلکه تغییرات آن اهمیت دارد. برای مثال، اگر شما از سهام تمام شرکت‌های بورس یک سهم خریده باشید، در این صورت تغییرات شاخص کل بورس میزان بازدهی شماست؛ یعنی اگر شاخص کل بورس در یک سال از ۲۰۰۰ واحد به ۳۰۰۰ واحد برسد، یعنی ۵۰٪ رشد کند، میانگین بازدهی بورس طی یک سال برای شما ۵۰٪ بوده است.

۱. فرمول بالا به روش محاسبه «لاسیپرز» (Laspeyres) معروف است.

در سال‌های پیش با مفهوم الگو و یافتن جمله n ام یک الگو آشنا شدیم. ^۱ عموماً این الگوها را نیز می‌توانیم به کمک تابعی با دامنه اعداد طبیعی مدل‌سازی کنیم.

فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام^۲، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می‌کنیم:



اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

$$a_4 = 32$$

$$a_5 = 76$$

الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

ب) بر اساس رابطه میان a_1, a_2 و رابطه میان a_2, a_3 و نیز a_3, a_4 می‌توان مقادیر a_5 و a_6 را مشخص کرد؟ چگونه؟

ج) آیا به کمک قسمت ب، می‌توانیم رابطه میان هر دو جمله متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به دست می‌آید؟ چرا؟

د) رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطه بازگشتی^۳ می‌نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه‌ای معلوم کنید. بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.

$$a_{n+1} = 2a_n \quad \& \quad a_1 = 1$$

ه) رابطه‌ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_n = 2^{n-1}$$

و) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «ج» دارد؟

در قسمت «ج» هر جمله به کمک جمله قبلی وابسته است. در قسمت «د» هر جمله به کمک جمله قبلی وابسته است.

۱. کتاب ریاضی هفتم و هشتم

۲. خوانندگی کتاب ریاضی دهم

الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحه قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سر هم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می نامند. جملات دنباله عموماً به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان داده می شوند. a_n را جمله n ام دنباله می نامند که می تواند به دو صورت زیر بیان شود:

- (الف) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)
 (ب) رابطه ای برحسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله).

برای مثال، در دنباله

$$\begin{array}{ccccccccc} 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & \dots & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \dots & & & \end{array}$$

با در نظر گرفتن $a_1 = 4$ ، بقیه جملات دنباله با اضافه کردن عدد ثابت 3 به جمله پیشین به دست می آیند؛ یعنی:

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad (\text{رابطه بازگشتی دنباله})$$

و یا می توان الگوی جملات دنباله را با ضابطه $a_n = 3n + 1$ نمایش داد که در این رابطه، n عددی طبیعی است و با جای گذاری در تساوی داده شده، مقدار هر جمله به طور مستقیم به دست می آید.

تعریف دنباله: همان طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد اعضای \mathbb{N} تابع می تواند دنباله ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله اول آن را $a(1)$ ، جمله دوم را $a(2)$ ، جمله سوم را $a(3)$ ، ... و جمله n ام را $a(n)$ در نظر می گیریم. معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می دهند که آن را جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می نامند.

کار در کلاس

با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

جمله n ام	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳
$b_n = n^2 - 1$	۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴
$c_n = \frac{1}{n}$	$\dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

مثال) برای جملات دنباله زیر:

۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳ و ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

پاسخ:

الف) برای نوشتن رابطه بازگشتی در اولین دنباله، رابطه میان جملات دنباله را بررسی می‌کنیم:

$$a_1 = 3 \quad \text{و} \quad a_2 = 9 = 3a_1 \quad \text{و} \quad a_3 = 27 = 3 \times 9 = 3 \times 3^2 \quad \text{و} \quad a_4 = 81 = 3 \times 27$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 3$$

یعنی، هر جمله دنباله ۳ برابر جمله پیشین است. بدیهی است که تنها رابطه $a_{n+1} = 3a_n$ جملات دنباله را مشخص نمی‌کند و حتماً باید یک جمله، مثلاً جمله اول آن یعنی $a_1 = 3$ نوشته شود.

ب) در نوشتن ضابطه تابعی دنباله باید رابطه میان n , a_n را مشخص کنیم:

$$n=1 \rightarrow a_1 = 3^1$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 9 = 3^2$$

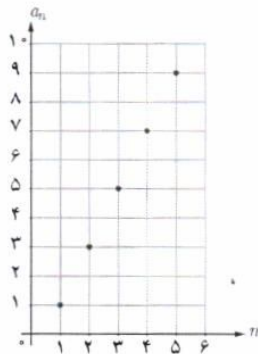
$$n=3 \rightarrow a_3 = 27 = 3^3$$

پس، ضابطه تابع به صورت $a_n = 3^n$ به دست می‌آید.

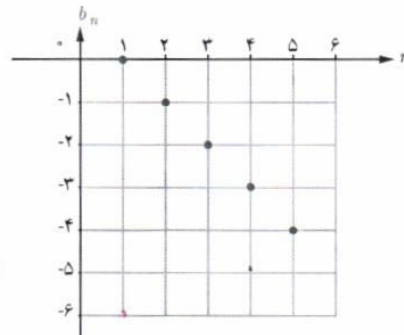
رسم دنباله

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار آنها را نیز می توان رسم کرد :

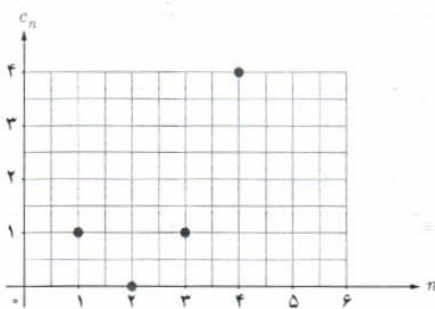
$$a_n = 2n - 1 \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$



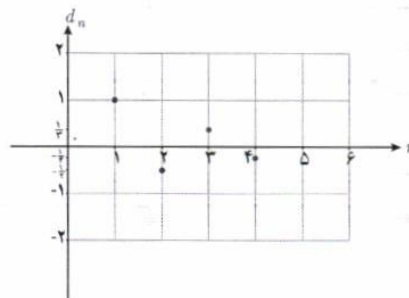
$$b_n = 1 - n \quad 0, -1, -2, -3, -4, \dots$$



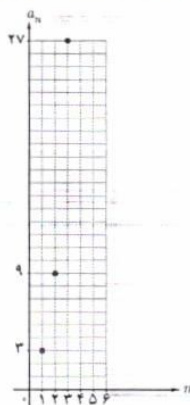
$$c_n = (n-2)^2 \quad 1, 0, 1, 4, \dots$$



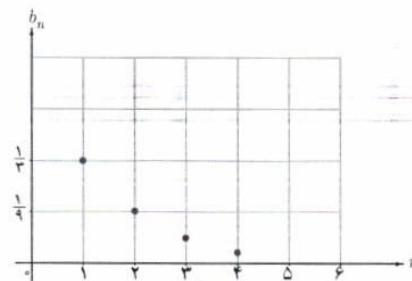
$$d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$



$$e_n = 3^{n^2}$$



$$f_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$



جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	فرمول بازگشتی	ضابطه دنباله	نمودار دنباله
9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ...	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 9$	$a_n = 3^{r-n}$	
1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, ...	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$	
3, 5, 7, 9, ...	$a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 3$	$a_n = 2n + 1$	
1, 3, 6, 10, ...	$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$		
1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{27}$, ...		$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$	
-1, -4, -9, -16, ...		$a_n = -n^2$	
1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$ *		

* دنباله فوق را دنباله فیبوناچی می نامند.

تمرین

۱. برای محاسبه قبض آب^۱ (آب بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب بها محاسبه می‌شود:

هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف \times میانگین مصرف = آب بها^۱

جدول ۱. محاسبه آب بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$0 \leq x < 5$	۱/۴۱۹	$25 \leq x < 30$	۸/۴۹۶
$5 \leq x < 10$	۲/۱۲۳	$30 \leq x < 35$	۱۱/۵۸۰
$10 \leq x < 15$	۲/۸۲۷	$35 \leq x < 40$	۱۵/۴۴۴
$15 \leq x < 20$	۳/۷۰۳	$40 \leq x < 50$	۳۳/۴۶۲
$20 \leq x < 25$	۵/۴۰۰	$x \geq 50$	۶۶/۹۲۴

الف) نمودار «طبقه مصرف – آب بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۲ در تهران در یک ماه $20/49 \text{ m}^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب بها را مشخص می‌کند؟

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

\mathbb{N} \mathbb{R}

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

\mathbb{N} \mathbb{R}

ب) میزان استفاده دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

\mathbb{N} \mathbb{R}

ج) حجم مکعبی به ضلع x

\mathbb{N} \mathbb{R}

د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر

\mathbb{N} \mathbb{R}

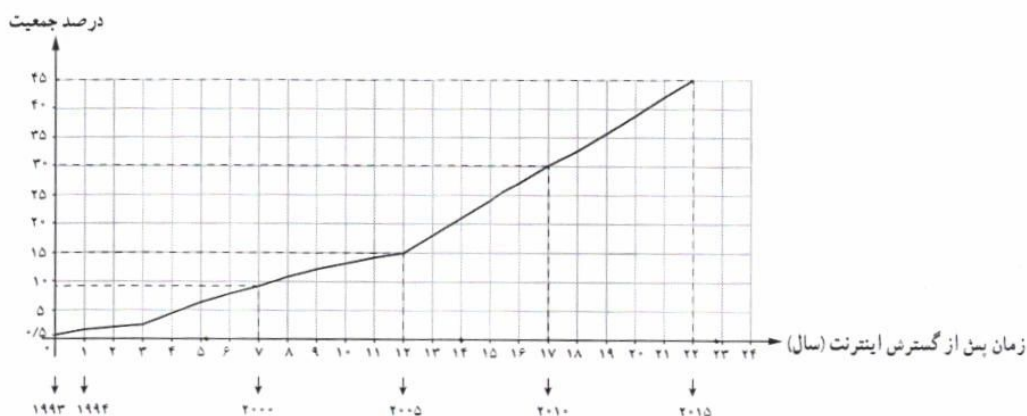
ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

۱. اطلاعات بالا از پایگاه www.tpww.ir استخراج شده است. در جدول واقعی پس از محاسبه حاصل ضرب گفته شده بر اساس طبقه مصرف عددی ثابت از عدد به دست آمده، کم می‌شود.

۲. توجه به میانگین مصرف آب در هر واحد مسکونی، مشترکان تقریباً $\frac{1}{3}$ هزینه واقعی تولید آب را می‌پردازند. هزینه آب در مقایسه با کشورهای منطقه و بسیاری از کشورهای جهان در ایران بسیار پایین است.

۳. الگوی مصرف برای هر واحد مسکونی در تهران 18 m^3 است.

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند^۱:



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(7)$ و $f(1)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_7 + b_1$

ب) $c_7 - d_1$

ج) $b_7 + d_7$

۶. جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ ، $a_1 = -2$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ، $a_1 = 1$

ج) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، $a_1 = 1$

^۱ . data.worldbank.org

۷. جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...			
۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...			
$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$			
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$			

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

الف) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$

ب) $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

ج) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2$

د) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$

۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل - با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی \sqrt{k} نزدیک شویم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_2 را تقریبی برای \sqrt{k} در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{3}$

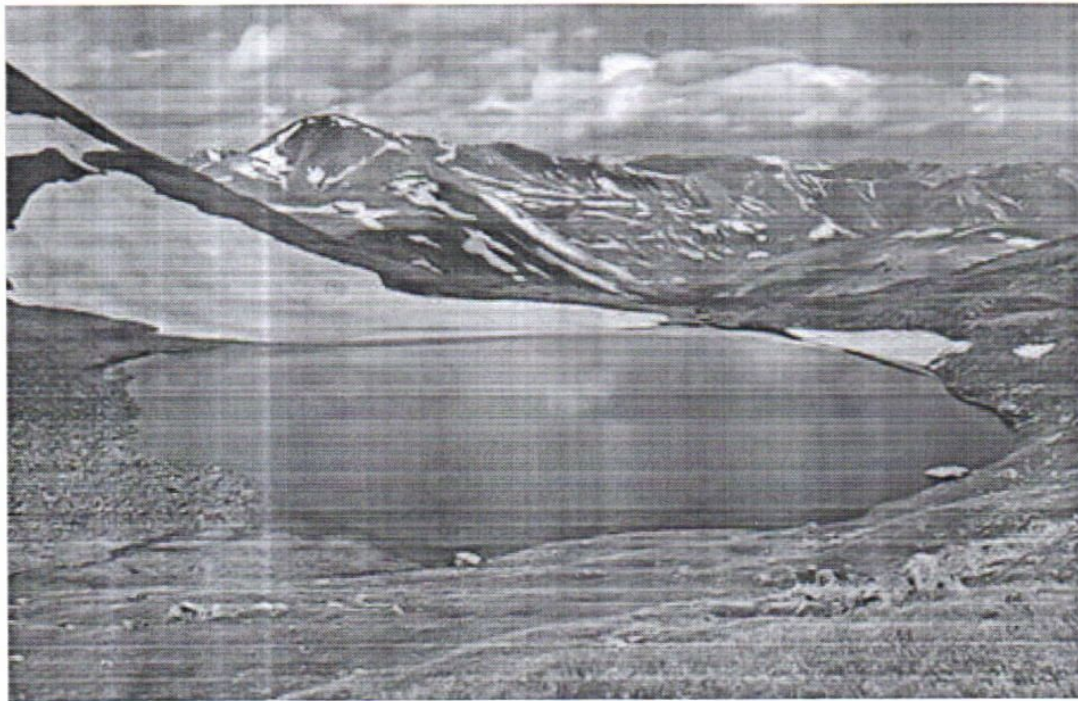
ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ، $a_1 = 1$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می‌کنند؟



۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پَس مانده‌های صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵۰ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالیانه ۱٪ فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی‌اثر می‌کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است. اگر $P_1 = 250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.



دریاچه گُغَر، لرستان

بازی و ریاضی

آیا می‌توانید ده جمله اول دنباله زیر را مشخص کنید؟

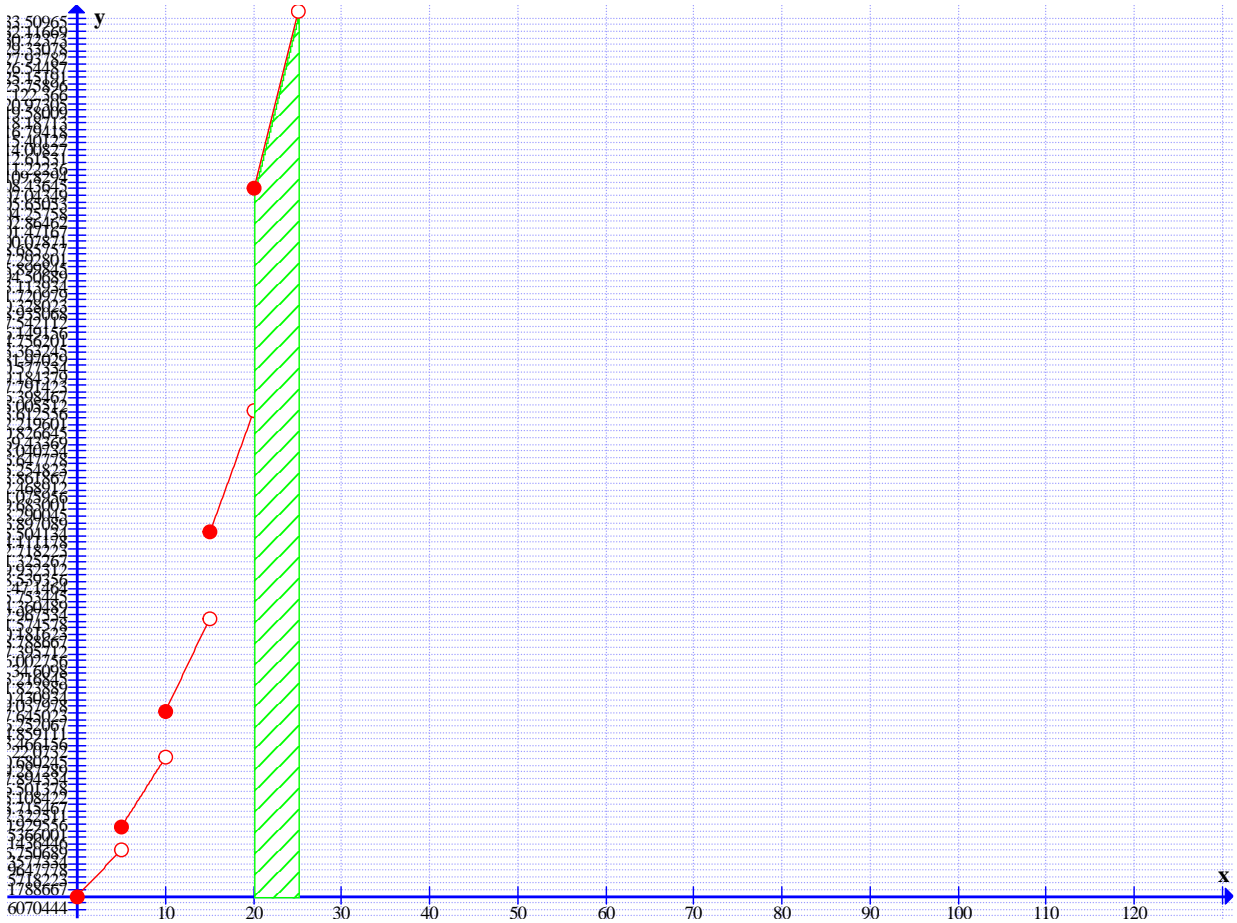
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_1 = a_2 = 1$$

۶۰

۱، ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، ۶، ۷، ...

تمرین ۱:

الف:



ضابطه:

طبقه ۱ $f(x) = 1/419x \quad 0 \leq x < 5$

طبقه ۲ $f(x) = 2/123x \quad 5 \leq x < 10$

.....

طبقه آخر $f(x) = 66/927x \quad x \geq 50$

برد $= [0, 7/0.95) \cup [10/615, 42/40.5) \cup \dots \cup [3346/2, +\infty)$

دامنه $= [0, +\infty)$

ب:

طبقه پنجم $f(20/49) = 5/400 \times 20/49 = 110/646$

تمرین ۲:

N	R	مورد
	✓	الف
✓		ب
	✓	ج
✓		د
✓		هـ

تمرین ۳:

الف:

$$f(1) = 0.5 \text{ و } f(7) = 9$$

درصد استفاده از اینترنت در سال اول و سال هفتم بعد از ۱۹۹۳ را نشان می دهند.

ب:

t	۲۰۰۵	۲۰۱۵
$f(t)$	۱۵	۴۵

$$m = \frac{45 - 15}{2015 - 2005} = \frac{30}{10} = 3$$

شیب خط

$$h = y_0 - mt_0 = 15 - 3(2005) = 15 - 6015 = -6000$$

$$y = mt + h \rightarrow y = 3t - 6000$$

$$f(t) = 3t - 6000$$

ضابطه‌ی تابع خطی

$$f(2020) = 3(2020) - 6000 = 6060 - 6000 = 60$$

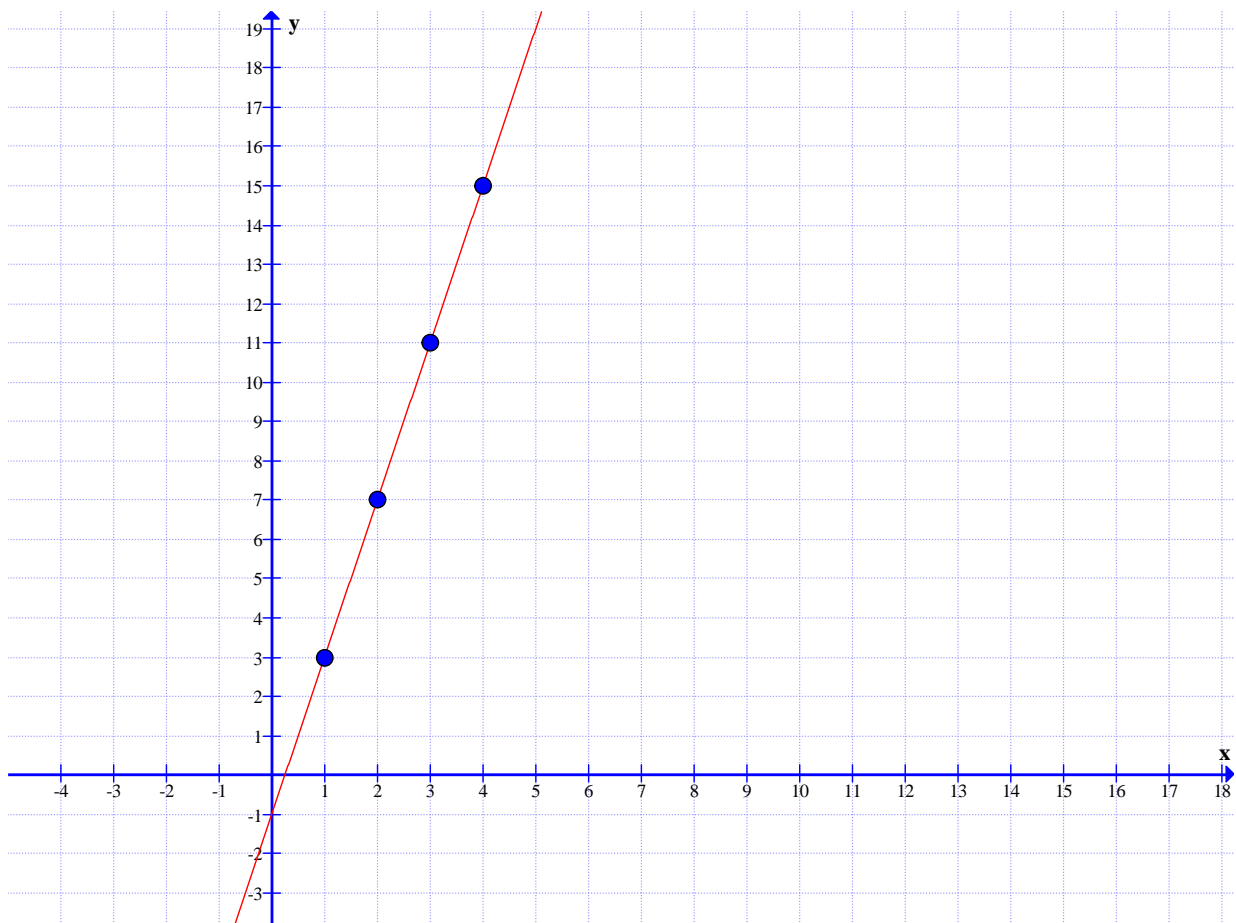
درصد استفاده از اینترنت در سال ۲۰۲۰

تمرین ۴:
الف: تابع خطی

$y = 4x - 1$		
x	۱	۲
y	۳	۷

دنباله

$a_n = 4n - 1$				
n	۱	۲	۳	۴
a_n	۳	۷	۱۱	۱۵



نمایش تابعی $a_n = 4n - 1$

ب: رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+1} = a_n + 4$

شیب خط برابر ۴ می باشد. به طور کلی (m شیب خط)

$$a_{n+1} = a_n + m$$

تمرین ۵:

$$\text{الف) } a_2 + b_1 = 3^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{1+1} = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$$

$$\text{ب) } c_2 - d_1 = \left(\frac{1}{3(2)-1}\right) - (2^2 - 1) = \frac{1}{5} - 3 = -\frac{14}{5}$$

$$\text{ج) } b_4 + d_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + (2^2 - 1) = \frac{1}{16} + 3 = \frac{49}{16}$$

تمرین ۶:

(الف)

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n ; a_1 = -2$$

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}(-2) = -\frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9}$$

$$a_4 = \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{2}{27}$$

$$a_5 = \frac{1}{3}a_4 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{27}\right) = -\frac{2}{81} \quad \text{جمله ی پنجم}$$

(ب)

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} ; a_1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{1+a_3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$a_5 = \frac{1}{1+a_4} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} \quad \text{جمله ی پنجم}$$

(ج)

$$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} ; a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1$$

$$n=1 \rightarrow a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1+1+1=3$$

$$n=2 \rightarrow a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1+1+3=5 \quad \text{جمله ی پنجم}$$

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n ; a_1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = a_1 + (-1)^1 = 1 + (-1) = 0$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = a_2 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$$

$$n = 3 \rightarrow a_4 = a_3 + (-1)^3 = 1 + (-1) = 0$$

$$n = 4 \rightarrow a_5 = a_4 + (-1)^4 = 0 + 1 = 1 \quad \text{جمله ی پنجم}$$

تمرین ۷:

ردیف اول:

.... و ۱۷ و ۱۴ و ۱۱ و ۸ و ۵

$$a_{n+1} = a_n + 3 ; a_1 = 5$$

$$a_n = 3n + 2 \quad \text{ضابطه ی دنباله}$$

ردیف دوم:

.... و ۱ و ۴ و ۱ و ۴ و ۱

$$a_{2n-1} = a_1 ; a_1 = 4 \quad \text{و} \quad a_{2n} = a_2 ; a_2 = 1$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ فرد} \\ 4 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

ردیف سوم:

.... و $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{4}$ و ۳ و $\frac{1}{2}$ و ۱

$$a_n = \begin{cases} n & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

ردیف چهارم:

.... و $\frac{4}{5}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{ضابطه ی دنباله}$$

تمرین ۸:

الف:

$$a_1 = 11$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3(11) + 1 = 34$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}(34) = 17$$

$$n = 3 \rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3(17) + 1 = 52$$

$$n = 4 \rightarrow a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2}(52) = 26$$

$$n = 5 \rightarrow a_6 = 3a_5 + 1 = 3(26) + 1 = 79$$

.... و ۷۹ و ۲۶ و ۵۲ و ۱۷ و ۳۴ و ۱۱ دنباله

ب:

$$a_1 = 25$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3(25) + 1 = 76$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}(76) = 38$$

$$n = 3 \rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3(38) + 1 = 115$$

$$n = 4 \rightarrow a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2}(115) = \frac{115}{2}$$

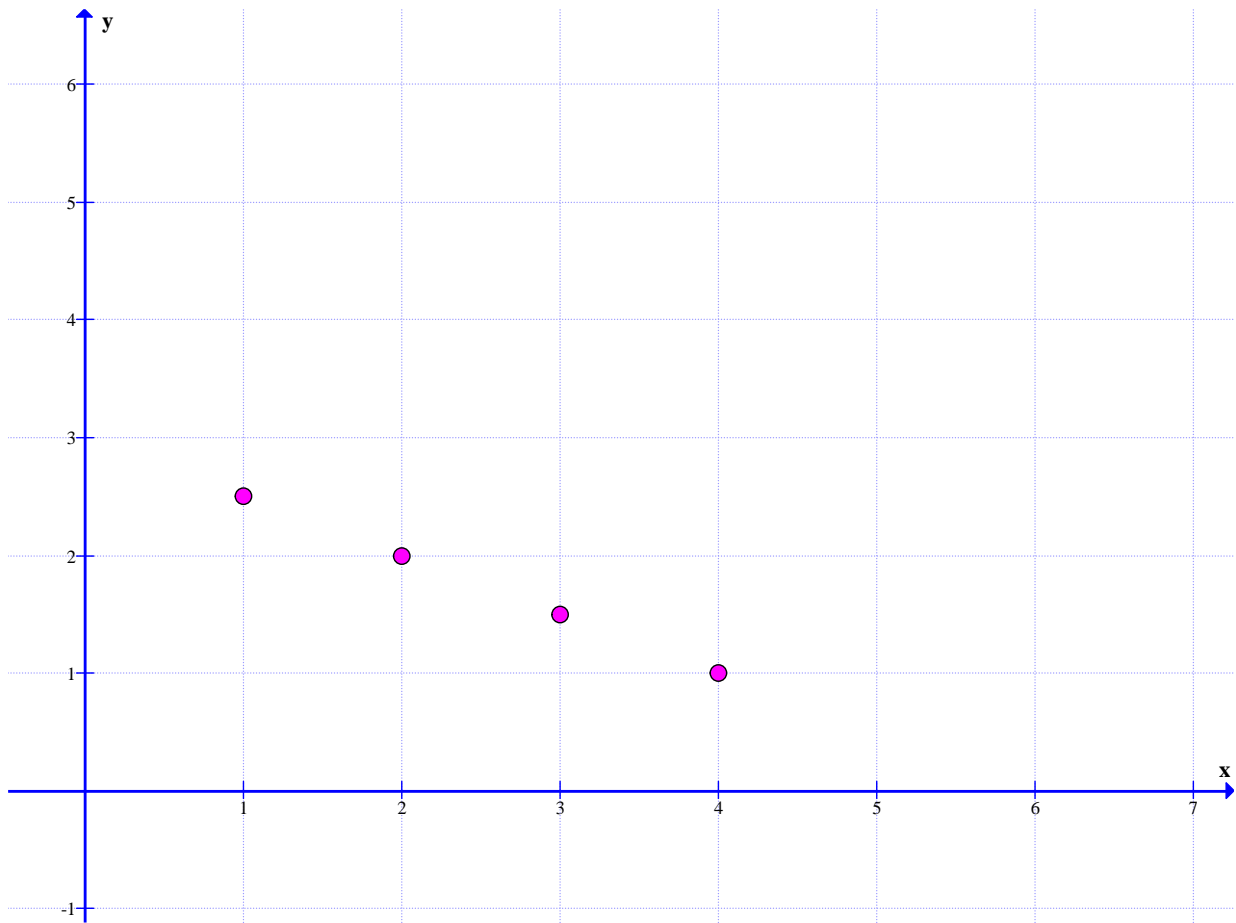
$$n = 5 \rightarrow a_6 = 3a_5 + 1 = 3\left(\frac{115}{2}\right) + 1 = \frac{123}{2}$$

.... و $\frac{123}{2}$ و $\frac{115}{2}$ و ۱۱۵ و ۳۸ و ۷۶ و ۲۵ دنباله

تمرین ۹:

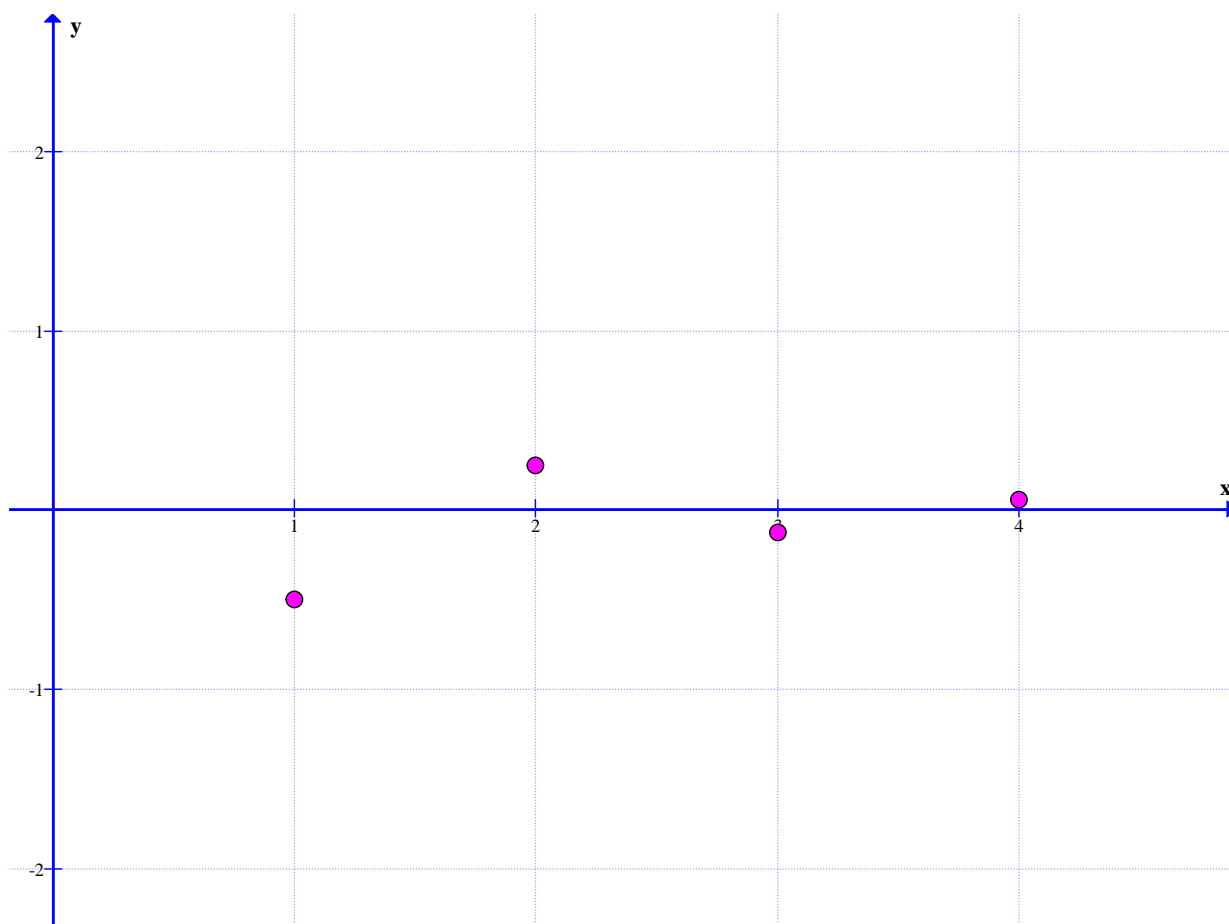
الف:

$a_n = -\frac{1}{2}n + 3$				
n	۱	۲	۳	۴
a_n	$\frac{5}{2}$	۲	$\frac{3}{2}$	۱



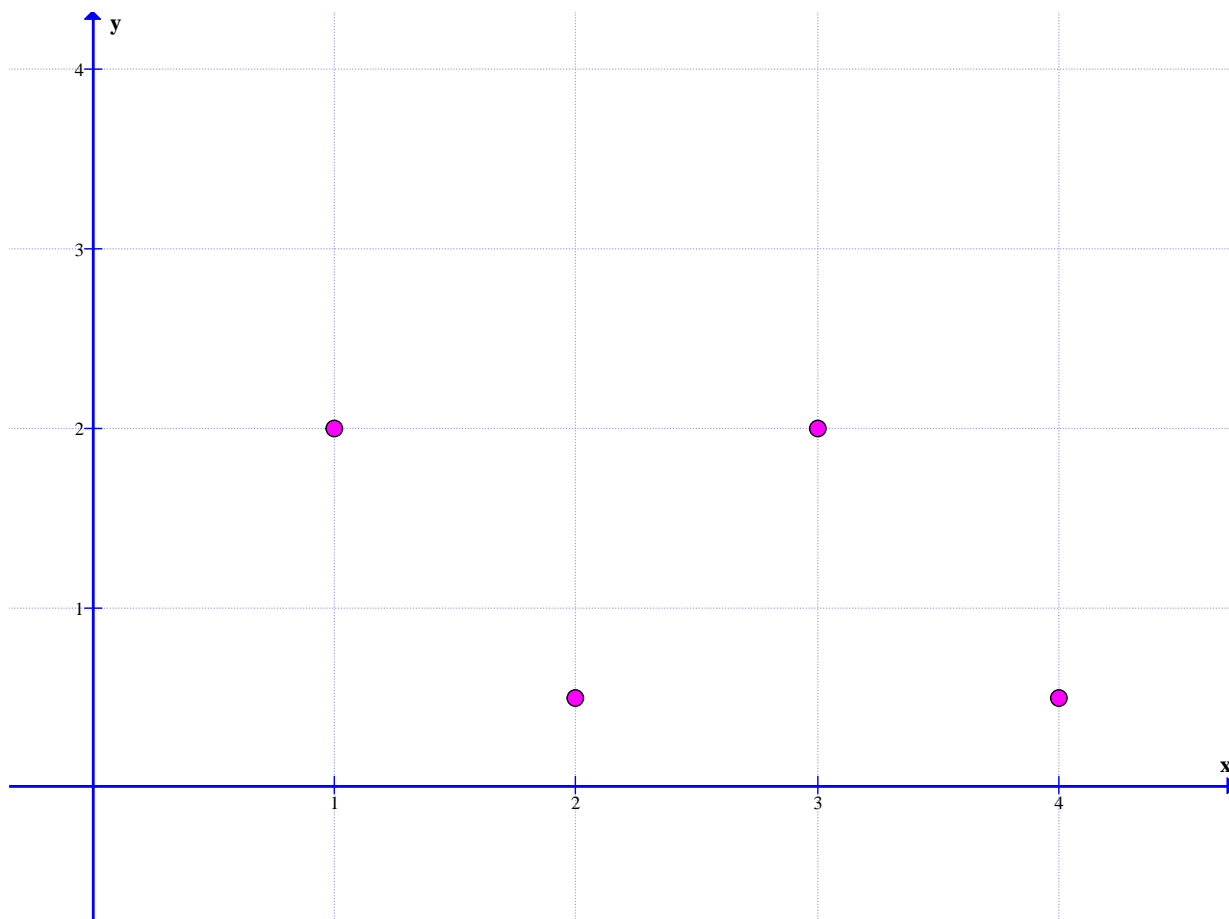
ب:

$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$				
n	۱	۲	۳	۴
a_n	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



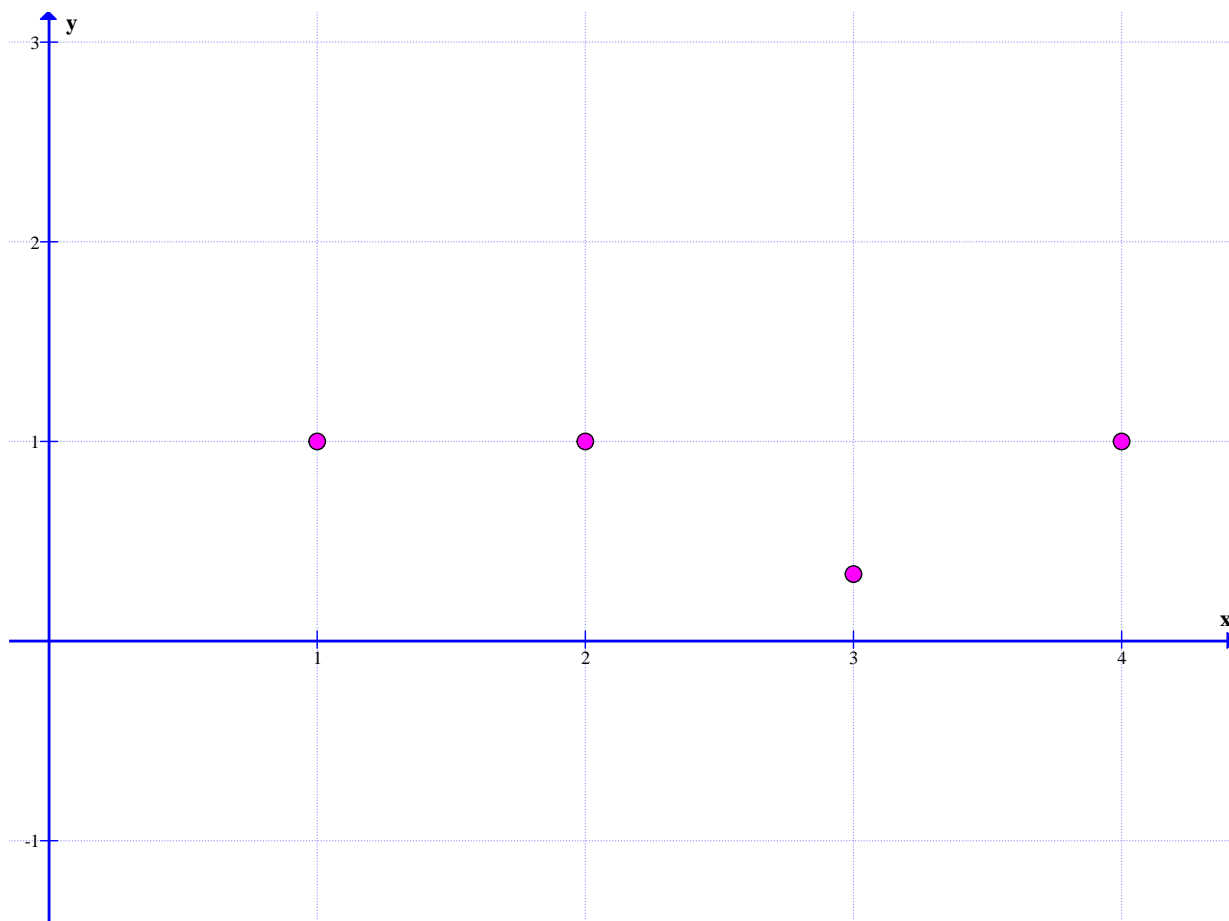
$$a_1 = 2 \text{ و } a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} \text{ و } a_3 = \frac{1}{a_2} = 2 \text{ و } a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$$

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۲	$\frac{1}{2}$	۲	$\frac{1}{2}$



$$a_1 = 1 \text{ و } a_2 = 1 \text{ و } a_3 = \frac{1}{3} \text{ و } a_4 = 1$$

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۱	۱	$\frac{1}{3}$	۱



تمرین ۱۰:

الف: $k = 2$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) ; a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{2}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{2}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} = \frac{17}{12} \approx 1.416$$

ب: $k = 3$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) ; a_1 = 3$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{3}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{3} \right) = \frac{1}{2} (3 + 1) = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{3}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4} \approx 1.75$$

ج: $k = 5$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{5}{a_n} \right) ; a_1 = 5$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{5}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{5}{5} \right) = \frac{1}{2} (6) = 3$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{5}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33$$

مزیت این روش این است که در صورت عدم دسترسی به ماشین حساب، به راحتی

محاسبه مقدار تقریبی ریشه دوم اعداد طبیعی را تعیین کرد.

تمرین ۱۱:

$$a_{n+1} = a_n + (n+1) ; a_1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = a_1 + (1+1) = 1 + 2 = 3$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = a_2 + (2+1) = 3 + 3 = 6$$

.... و ۶ و ۳ و ۱ دنباله

این دنباله با جملات الگوی الف مطابقت دارد.

تمرین ۱۲:

$$P_{n+1} = P_n - \frac{1}{10} P_n - 15 ; P_1 = 250$$

$$n = 1 \rightarrow P_2 = P_1 - \frac{1}{10} P_1 - 15 = 250 - \frac{1}{10}(250) - 15 = 250 - 25 - 15 = 210$$

پایان سال اول

$$n = 2 \rightarrow P_3 = P_2 - \frac{1}{10} P_2 - 15 = 210 - \frac{1}{10}(210) - 15 = 210 - 21 - 15 = 174$$

پایان سال دوم

$$n = 3 \rightarrow P_4 = P_3 - \frac{1}{10} P_3 - 15 = 174 - \frac{1}{10}(174) - 15 = 174 - 17.4 - 15 = 141.6$$

پایان سال سوم

$$\begin{aligned} n = 4 \rightarrow P_5 &= P_4 - \frac{1}{10} P_4 - 15 = 141.6 - \frac{1}{10}(141.6) - 15 \\ &= 141.6 - 14.16 - 15 = 112.44 \end{aligned}$$

پایان سال چهارم

$$\begin{aligned} n = 5 \rightarrow P_6 &= P_5 - \frac{1}{10} P_5 - 15 = 112.44 - \frac{1}{10}(112.44) - 15 \\ &= 112.44 - 11.244 - 15 = 86.196 \end{aligned}$$

پایان سال پنجم