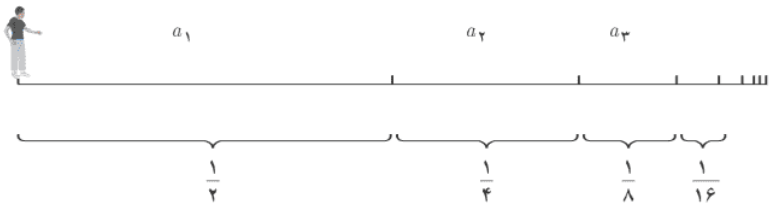
درس ۱

دنبالهٔ هندسی[۱]

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟

این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنو[۲]، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد :

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی‌مانده و... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهید رسید! زیرا هر چند هرکدام از فاصله‌ها نصف فاصلهٔ پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهند شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود.

به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت $a_۱$ زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت $a_۲$ به زمان $\frac{t}{۲}$ و نیاز داریم. بنابراین :

زمان رسیدن به در خروجی کلاس $T = t + \frac{t}{۲} + \frac{t}{۴} + \ldots$

و چون جملات دنباله ... و $\frac{t}{۴}$ و $\frac{t}{۲}$ و t هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند، پس T از مجموع بی‌شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود[۳]. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه‌ای به نام «سری‌های هندسی و محاسبهٔ مجموع آنها» انجامید که در ادامهٔ این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و درمی‌یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

---

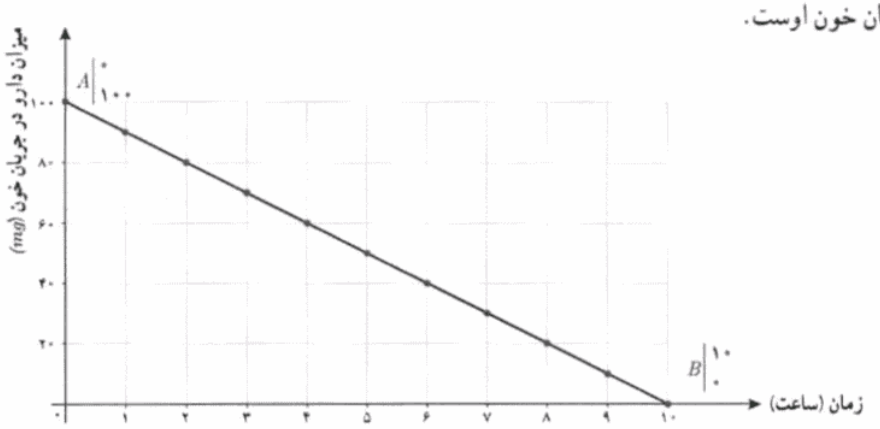
۱. Geometric Sequence ۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۱۲ گاوس و به دنبال او کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌هایی مانند مرکاتور، برونکور، نیوتن و اویلر از اواخر قرن هفدهم شروع کرده بودند، نتایجی دقیق برای حل این مسائل یافتند.

hamyar.in همیار

فعالیت

همان‌طور که در فعالیت صفحهٔ ۶۸ گفته شد، پس از مصرف بعضی از داروها، مادهٔ مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می‌شود. برای مثال، اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف ۱۰۰ میلی‌گرم از داروی A، در هر ساعت ۱۰ میلی‌گرم آن را حذف کند، نمایش دنبالهٔ کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظهٔ مصرف دارو تا لحظهٔ تمام شدن دارو در جریان خون اوست.



اگر a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص n ساعت پس از مصرف باشد، با توجه به کاهش ۱۰ میلی‌گرم دارو در بدن شخص در هر ساعت :

$$a_1=90 \qquad a_{n+1}=a_n-10$$

پس، برای تعیین ضابطهٔ تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده :

$$m_{AB}=\frac{0-100}{10-0}=-10$$

$$h=\text{عرض از مبدأ}=100 \quad \Rightarrow \quad a_n=-10n+100$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

ضابطهٔ تابعی دنباله را به کمک رابطهٔ $a_n=a_1+(n-1)d$ (جمله عمومی دنباله) نیز می‌توان مشخص کرد؛ زیرا :

$a_1=90$: میزان دارو در بدن پس از یک ساعت

$d=-10$: کاهش ثابت ۱۰ میلی‌گرم در هر ساعت پس از مصرف دارو

$$\Rightarrow a_n=90+(n-1)\times(-10) \quad \Rightarrow \quad a_n=-10n+100$$

میزان حذف دارو و مادهٔ مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی‌شود[1] و در تعداد زیادی از داروها مادهٔ مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه‌عمر مادهٔ مؤثر[2]» دارو در بدن کاهش می‌یابد. فعالیت صفحهٔ بعد، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطهٔ تابعی دنباله مشخص می‌کند.

---

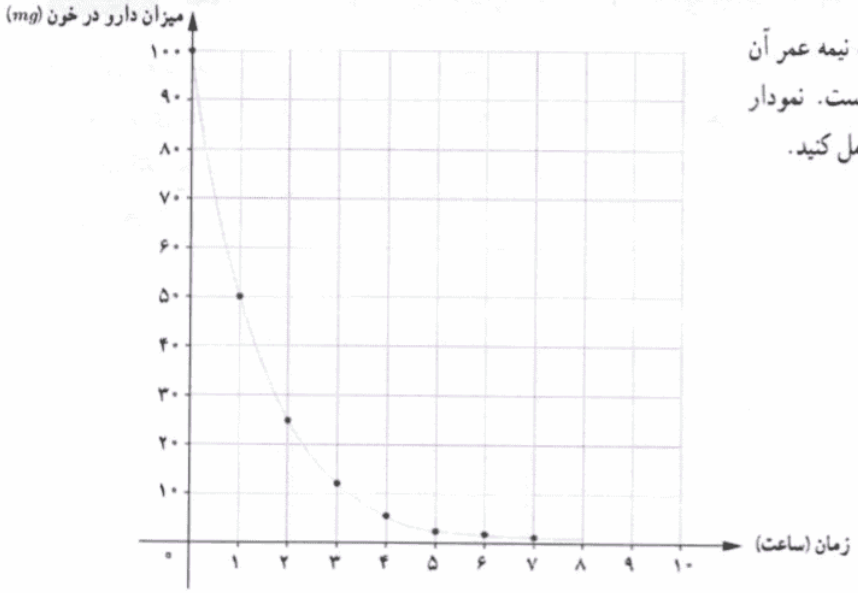
۱. اثر این دارو را First Zero Kinetics می‌نامند.

۲. نیمه‌عمر یک دارو (Half – life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهند.

hamyar.in همیار

فعالیت

شخصی ۱۰۰ میلی‌گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون ــ زمان» را کامل کنید.



الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی‌گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

پس از ۳ نیمه عمر ـ خیر ـ با افزایش زمان میزان دارو در بدن کم و کمتر می‌شود بطوریکه نمی‌توان آن را نامیز حساب کرد. اما صفر نمی‌شود

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از nاُمین نیمه عمر باشد، رابطهٔ بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جملهٔ دنباله از حاصل‌ضرب عدد ثابت ..... در جملهٔ پیشین به‌دست می‌آید؛ یعنی :

$a_1=50$ $\qquad a_{n+1}=\cdots\cdots\times a_n$

ج) ضابطهٔ تابعی (جملهٔ عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$a_1=50$ $\quad a_2=\frac{1}{2}\times 50$ $\quad a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 50\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 50$ $\quad a_4=\cdots\cdots$

$\Rightarrow \quad a_n=\cdots\cdots\times 50$

خواندنی

دانستن نیمه‌عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال :

ــ در درمان بیماری‌های عفونی، آنتی‌بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.

ــ در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شبانه‌روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.

ــ کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص‌های آرام‌بخش استفاده می‌کنند باید در طول روز شاداب و سرحال باشند و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

hamyar.in
همیار

به دنباله‌هایی از اعداد که هر جمله‌شان به جز جملهٔ اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جملهٔ پیشین به‌دست می‌آید، دنبالهٔ هندسی گفته می‌شود. عدد ثابت را نسبت مشترک[1] می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

یک دنبالهٔ هندسی، دنباله‌ای به‌صورت

$$a\ ,\ ar\ ,\ ar^{2}\ ,\ ar^{3}\ ,\ \ldots$$

است که در آن $a\neq 0$ جملهٔ اول و $r\neq 0$ نسبت مشترک دنباله است.
جملهٔ nاُم این دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $a_n = a_1 r^{n-1}$ به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جملهٔ عمومی دنباله	ضابطهٔ بازگشتی	پنج جملهٔ اول	نسبت مشترک	جملهٔ اول
$a_n=(\frac{1}{3})^{n-1}$	$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$ $a_1=1$	$1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81}$	$r=\frac{1}{3}$	$a_1=1$
$a_n=(\frac{3}{2})^{n-1}(\frac{1}{81})$	$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n$ $a_1=\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81},\frac{1}{54},\frac{1}{36},\frac{1}{24},\frac{1}{16}$	$r=\frac{3}{2}$	$a_1=\frac{1}{81}$
$a_n=4(-\frac{1}{2})^{n-1}$	$a_{n+1}=(-\frac{1}{2})a_n$ $a_1=4$	$4,-2,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4}$	$r=-\frac{1}{2}$	$a_1=4$
$a_n=(\frac{1}{5})^{n-1}$	$a_{n+1}=\frac{1}{5}a_n$ $a_1=1$	$1,\frac{1}{5},\frac{1}{25},\frac{1}{125},\frac{1}{625}$	$r=\frac{1}{5}$	$a_1=1$
$a_n=100(\frac{1}{4})^{n-1}$	$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$ $a_1=100$	$100,25,\frac{25}{4},\frac{25}{16},\frac{25}{64}$	$r=\frac{1}{4}$	$a_1=100$

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n=a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1>0$:

الف) اگر $0<r<1$، دنبالهٔ a_n، ☐ افزایشی ☑ کاهشی ☐ ثابت است.

ب) اگر $r>1$، دنبالهٔ a_n، ☑ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است.

ج) اگر $r=1$، دنبالهٔ a_n، ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☑ ثابت است.

---

۱. Common ratio

hamyar.in
همیار

n		n	
۱	$\left(\frac{9}{10}\right)^{1-1} < 0/5 \Rightarrow 1 \not< 0/5$	۵	$\left(\frac{9}{10}\right)^{5-1} < 0/5 \Rightarrow 0/6561 \not< 0/5$
۲	$\left(\frac{9}{10}\right)^{2-1} < 0/5 \Rightarrow 0/9 \not< 0/5$	۶	$\left(\frac{9}{10}\right)^{6-1} < 0/5 \Rightarrow 0/59049 \not< 0/5$
۳	$\left(\frac{9}{10}\right)^{3-1} < 0/5 \Rightarrow 0/81 \not< 0/5$	۷	$\left(\frac{9}{10}\right)^{7-1} < 0/5 \Rightarrow 0/531441 \not< 0/5$
۴	$\left(\frac{9}{10}\right)^{4-1} < 0/5 \Rightarrow 0/729 \not< 0/5$	۸	$\left(\frac{9}{10}\right)^{8-1} < 0/5 \Rightarrow 0/4782969 < 0/5$

ادامه قسمت د

$\Rightarrow n > 7$ هشت سال پس از خرید

کار در کلاس

ضابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ هندسی $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ را مشخص کنید.

$a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = a$

کار در کلاس

(هزینهٔ استهلاک)[1] ــ شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینهٔ استهلاک این یخچال هر سال معادل ٪۱۰ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال nاُم باشد :

الف) ضابطهٔ تابعی دنبالهٔ v_n را به‌دست آورید.

با توجه به هزینهٔ استهلاک ٪۱۰، ارزش یخچال فریزر در هر سال ٪۹۰ سال قبل خواهد بود؛ یعنی :

$v_1 = 960{,}000 \qquad v_2 = 960{,}000 \times \frac{90}{100} = 864{,}000 \qquad v_3 = 777{,}600 \qquad v_n = 960{,}000\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

ب) در v_2 ــ خیر ــ زیرا هرچه زمان ما گذرد این کاهش ارزش کم و کمتر می‌شود.

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟

با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ٪۱۰ کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان ٪۱۰ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین v_1 کاهش ارزش یخچال فریزر بیشتر است.

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطهٔ v_n را به‌گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنبالهٔ v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

چون ما در هر عدد عنیر صفر، صفر نیست ـ میزان کاهش ثابت باشد ـ $a_n = 960000 - 96000n$ ـ حسابی

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

(راهنمایی : با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹۶۰ هزار تومان، نصف ارزش آن ۴۸۰ هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n < 480{,}000$ را تأمین می‌کند، مشخص کنیم.)

$960000\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 480000 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \frac{1}{2} \propto$

ادامه بالای صفحه

هـ) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنبالهٔ حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنبالهٔ هندسی است؟

$a_{n+1} = a_n - k$ (k واحد کسر شود) $\qquad a_{n+1} = ka_n$ (k درصد کسر شود)

بیانگر دنباله حسابی است. بیانگر دنباله هندسی است.

---

۱. Depreciation Cost

زمانی که k واحد کسر شود ممکن است یکی از جملات دنباله صفر شود اما زمانی که k درصد کسر شود. مقدار جملات کم و کمتر شود اما هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

hamyar.in همیار

کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه‌عمر مادهٔ کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی‌گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه‌عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی‌گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

$r = \frac{1}{2}$ $\quad a_n = a_1(\frac{1}{2})^{n-1}$

$80(\frac{1}{2})^{n-1} < 0.5 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{n-1} < \frac{0.5}{80} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{n-1} < \frac{425}{100000}$

خواندنی برای بدست آوردن چند نیمه عمر می توان مانند کار در کلاس قبلی جدول تشکیل داد

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به‌سبب وجود مادهٔ کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازهٔ کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و... می‌گردد. مصرف بیش از اندازهٔ آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند، دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند.

یکی از دلایل توصیهٔ پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازهٔ آنهاست.

توجه به نیمه‌عمر مادهٔ کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.

$2^{n-1} > \frac{425}{100} \Rightarrow 2^{n-1} > 4 \times 2^4 \Rightarrow 2^{n-1} > 5 \times 2^5 \Rightarrow 2^{n-6} > 5 > 2^2$

$n-6 > 2 \Rightarrow n > 8$ $\Rightarrow$ ۹ نیمه عمر یا بیشتر

$9 \times 6 = 54$ ساعت یا بیشتر

hamyar.in همیار

فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حامل ۸۰ میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

ب) با یک «رابطهٔ بازگشتی» میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

ج) آیا می‌توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه‌ای مشخص کنید؟ (ضابطهٔ تابعی دنباله)

د) با جای‌گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطهٔ به‌دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به‌دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر «S_n» میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله :

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی‌گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_1=80mg$
۲	۱۵ بهمن	۸:۰۰ صبح	$S_2=\frac{1}{2}S_1+80 \quad =40+80=120$
۳	۱۵ بهمن	۴:۰۰ بعد از ظهر	$S_3=\frac{1}{2}S_2+80 \quad =60+80=140$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_4=\frac{1}{2}S_3+80=70+80=150$
۵	۱۶ بهمن	۸:۰۰ صبح	$S_5=\frac{1}{2}S_4+80=75+80=155$
۶	۱۶ بهمن	۴:۰۰ بعد از ظهر	$S_6=\frac{1}{2}S_5+80=77/5+80=157/5$

ب) با توجه به نحوهٔ کامل کردن جدول بالا، رابطهٔ بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطهٔ زیر مشخص می‌شود :

$$S_{n+1}=80+\frac{1}{2}S_n \quad , \quad S_1=80$$

ج) برای نوشتن ضابطهٔ تابعی دنبالهٔ S_n برحسب n، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A میلی‌گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A=80mg$ است)، با استفاده از رابطهٔ بازگشتی به‌دست آمده در قسمت ب :

$$S_1=A$$

$$S_2=A+\frac{1}{2}S_1=A+\frac{A}{2}$$

$$S_3=A+\frac{1}{2}=A+\frac{1}{2}(A+\frac{1}{2}A)=A+\frac{1}{2}A+(\frac{1}{2})^2A$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

hamyar.in
همیار

به همین صورت برای محاسبهٔ S_6 :

$$S_6 = A + \frac{1}{2}A + (\frac{1}{2})^2 A + \cdots + (\frac{1}{2})^{\cdots} A$$

پس برای محاسبهٔ مجموع آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف :

$$S_n = A + \frac{1}{2}A + (\frac{1}{2})^2 A + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1} A \qquad (1)$$

اگر طرفین رابطهٔ (۱) را در ضریب $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم :

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}A + (\frac{1}{2})^2 A + \cdots + (\frac{1}{2})^n A \qquad (2)$$

با تفاضل رابطهٔ (۱) از (۲) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = A - (\frac{1}{2})^n A \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}S_n = A(1-(\frac{1}{2})^n)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = 2A(1-(\frac{1}{2})^n)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A=80\ mg$، مجموع میزان آنتی‌بیوتیک پس از n بار مصرف :

$$S_n = 160(1-(\frac{1}{2})^n)$$

د) با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده برای S_n :

$$S_1 = 160(1-(\frac{1}{2})^1) = 160 \times \frac{1}{2} = 80$$

مطابق روشی که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی را می‌توانیم مشخص کنیم :

اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n=ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \qquad (r \neq 1)$$

از رابطهٔ :

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

در فعالیت صفحهٔ پیش :

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

ب) ضابطه‌های دنباله‌های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_2 و S_2 چیست؟

hamyar.in
همیار

کار در کلاس

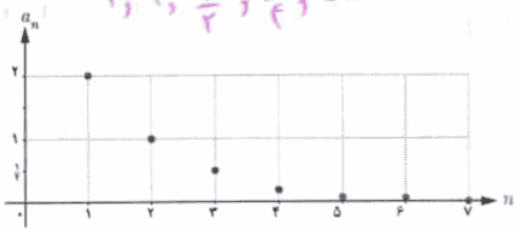
۱. جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

جملات دنباله	a_1 (جملهٔ اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جملهٔ اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^5)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}}\right) =$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \dots\frac{1}{4}\dots$	$r = \dots\frac{1}{4}\dots$	$S_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-(\frac{1}{4})^4}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\left(\frac{256-1}{256}\right) = \frac{85}{256}$ $S_8 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-(\frac{1}{4})^8}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times\left(\frac{65536-1}{65536}\right) = \frac{21845}{65536}$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a_1 = \dots\frac{2}{5}\dots$	$r = \dots\frac{1}{2}\dots$	$S_2 =$ $S_4 =$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \dots\frac{2}{5}\dots$	$r = \dots 5\dots$	$S_6 = \frac{2}{5}\left(\frac{1-5^6}{1-5}\right) = \frac{2}{5}\times\frac{1-15625}{-4} = 1562.4$

۲. نمودار زیر یک دنبالهٔ هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جملهٔ اول آن و محاسبهٔ نسبت مشترک دنبالهٔ هندسی:

الف) جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

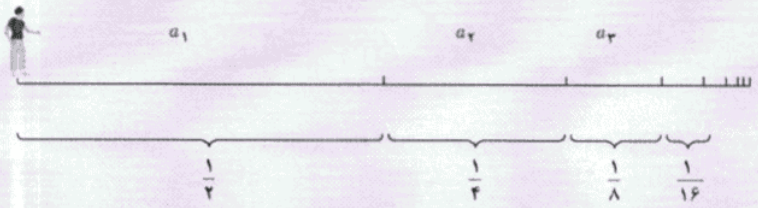
ب) حاصل S_{10} را به‌دست آورید.



hamyar.in
همیار

خواندنی

جواب تناقض (پارادوکس) زنو



همان‌طور که خوانده شد، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به‌دست می‌آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنبالهٔ r^n بسیار بسیارکوچک می‌شود و می‌توانیم در حالتی که مجموع بی‌شمار جملات دنبالهٔ هندسی خواسته می‌شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین :

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{\text{در حالتی که n عدد خیلی بزرگ باشد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفتهٔ او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از رابطهٔ $T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots$ به‌دست آید که یک دنبالهٔ هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ است :

$$\text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس} = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots$$

$$= \frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$$

چون n، تا بی‌نهایت ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{2})^n$ در بی‌نهایت بسیار بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{2})^n$ می توان صرف‌نظر کرد :

$$\frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t(1-\cancel{(\frac{1}{2})^n})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$$

یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده‌اید، با فرض ثابت بودن سرعت شما، بقیهٔ مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می‌پنداشت اگر بی‌شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی‌شمار جمله باید بی‌نهایت شود!

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

hamyar.in
همیار

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنبالهٔ هندسی را تشکیل می‌دهد.

۱) $a_{n+1}=(a_n)^2$ $\quad a_1=\frac{1}{2}$

۲) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ $\quad a_1=\frac{1}{2}$

۳) $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$ $\quad a_1=1$

۴) $a_{n+1}=2a_n$ $\quad a_1=1$

۲. با توجه به مفهوم دنبالهٔ هندسی و نسبت مشترک جملات دنبالهٔ هندسی ثابت کنید هرگاه c و b و a سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $a\times c=b^2$. (b را واسطهٔ هندسی میان a و c می‌نامند.)

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقدار x را به‌دست آورید.

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه[1] مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ٪۶۰ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر تودهٔ سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی‌درمانی، رشد تودهٔ سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به‌طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی‌درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن تودهٔ سرطانی به کمک جراحی، باقی‌ماندهٔ سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی‌درمانی شود؟

۵. میان دو عدد a و b، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنبالهٔ شروع از a و ختم به b یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطهٔ $r^{n+1}=\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید. (راهنمایی : تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۶. جملهٔ سوم یک دنبالهٔ هندسی۲۷ و جملهٔ پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جملهٔ هفتم این دنبالهٔ هندسی را به‌دست آورید.

قسمت الف سوال ۴

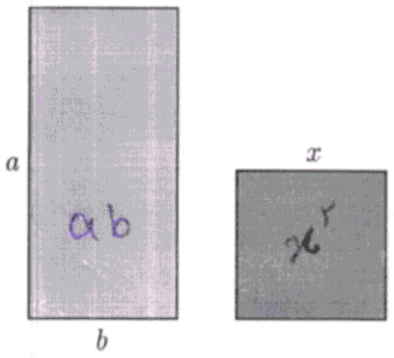
بعد از ۱۴ بار

n		n	
۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{1-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 1\not<7\times10^{-6}$	۸	$\left(\frac{4}{10}\right)^{8-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.001638\not<0.000007$
۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{2-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.4\not<0.000007$	۹	$\left(\frac{4}{10}\right)^{9-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.000655\not<0.000007$
۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{3-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.16\not<0.000007$	۱۰	$\left(\frac{4}{10}\right)^{10-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.000262\not<0.000007$
۴	$\left(\frac{4}{10}\right)^{4-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.064\not<0.000007$	۱۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{11-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.000104\not<0.000007$
۵	$\left(\frac{4}{10}\right)^{5-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.0256\not<0.000007$	۱۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{12-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.000041\not<0.000007$
۶	$\left(\frac{4}{10}\right)^{6-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.0102\not<0.000007$	۱۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{13-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.000016\not<0.000007$
۷	$\left(\frac{4}{10}\right)^{7-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.0040\not<0.000007$	۱۴	$\left(\frac{4}{10}\right)^{14-1}<7\times10^{-6}\Rightarrow 0.000006<0.000007$

hamyar.ir همیار

۸) $a_n = ۱۵۰۰۰\left(\frac{۸۵}{۱۰۰}\right)^{n-۱} \Rightarrow a_۵ = ۱۵۰۰۰\left(\frac{۸۵}{۱۰۰}\right)^{۵-۱} = ۱۵۰۰۰ \times ۰/۵۲۲۰۰۶۲۵ = ۷۸۳۰/۰۹۳۷۵$

۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است.
اگر مربعی به ضلع x هم‌مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟



الف) x و b و a
ب) b و x و a
پ) x و a و b

۸. یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جوّ زمین، در هر دقیقه ٪۱۵ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جوّ زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

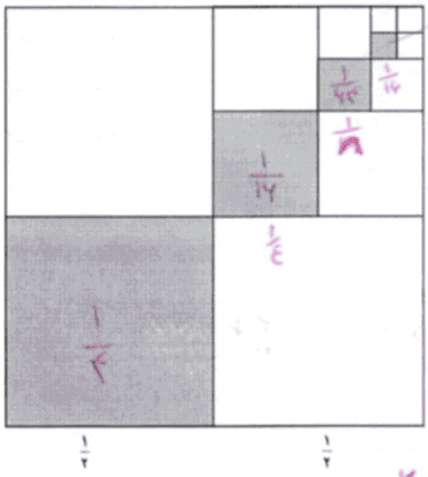
۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادربزرگ، چهار پدر پدربزرگ و چهار مادر مادربزرگ و ... دارد.
الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)
ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

۱۰. مجموع‌های زیر را به‌دست آورید.
الف) $۱ + ۴ + ۱۶ + \ldots + ۴۰۹۶$
ب) $\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۲۰} + \cdots + \frac{۱}{۶۴۰}$

۱۱. نخستین جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}$ است. کدام جملهٔ دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به‌دست آورید.

hamyar.in
همیار

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنبالهٔ مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنبالهٔ هندسی را تشکیل می‌دهد؟

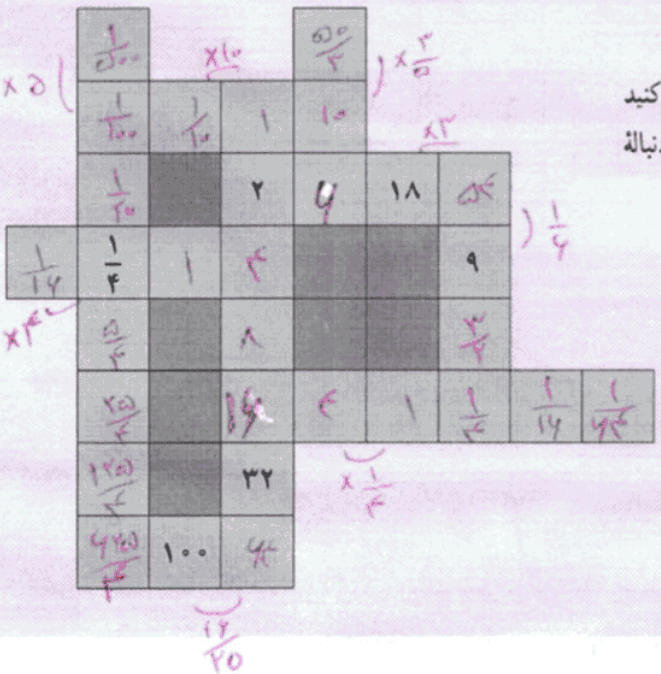
ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی، از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

$$S_n = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱-\left(\frac{۱}{۴}\right)^n}{۱-\left(\frac{۱}{۴}\right)}$$

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

بازی و ریاضی

مربع های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنبالهٔ هندسی تشکیل بدهد.



hamyar.in
همیار