

ریاضی: هفتم

فصل ششم: سطح و حجم

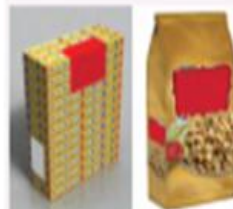
صفحه: ۶۹ تا ۸۲

تهیه کننده: احمد فرخ وند

در تهیه این فایل از اسلایدهای استاد یونس جمال پور و سایت زیر استفاده شده است. یونس جمال پور lali-riazi.blogfa.com



فصل ۶ سطح و حجم



- حجم های هندسی
- معادله حجم های منشوری
- مساحت جانبی و کل
- حجم و سطح

اهلیت بستندی معصوم لای خدای کشور از اهلیت تولید آن محصول نیست وای
مثال در بستندی شویی و شکلات کلیمت و طعم بستندی در فروش آن تأثیر زیادی
دارد. یکی از موضوعات مهم در این بستندی ها رابطه بین سطح و حجمی است که با آن
سطح ساخته می شود.

۷۰

حجم های هندسی



۱- به اطراف خود (کلاس، خانه، خیابان و ...) به دقت نگاه کنید.

آیا چیزی پیدا می کنید که حجم نداشته باشد؟ **بله مثل نور**

در تصویر مقابل چه نوع حجم هایی را می بینید؟ **هندسی و غیر هندسی**

آیا همه آنها شکل هندسی دارند؟ **خیر**

آیا می توانید یک طبقه بندی از انواع حجم ها ارائه کنید؟

منشوری

هرمی

کروی

هندسی

غیر هندسی

حجم ها را می توان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد. حجم های هندسی شکل های مشخص و تعریف شده

دارند. حجم های هندسی را می توان به سه دسته اصلی تقسیم کرد. **منشوری - کروی - هرمی**. برخی از حجم های هندسی نیز

ترکیبی از این سه نوع اند.



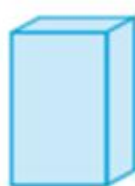
- ۱- در تصویر فعالیت بالا حجم های هندسی را با ✓ و غیر هندسی را با ✗ مشخص کنید.
- در حجم های هندسی نوع آن را تعیین کنید.
- در حجم های ترکیبی نیز مشخص کنید که از چه نوع حجم هایی ساخته شده اند.
- هندسی** ← جعبه اسباب بازی مکعب، قنددان استوانه، کاسه ها نیم کره
- ترکیبی** ← قنددان استوانه و درب آن نیم کره،

۲- با توجه به شکل های زیر خصوصیت های سه نوع حجم هندسی زیر را بنویسید.

۷۰



حجم های کروی



حجم های منشوری



حجم های هرمی

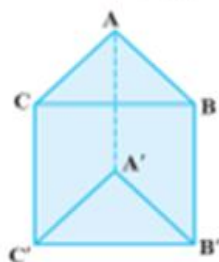
- حجم های منشوری : دارای دو قاعده که با هم برابرند و از مستطیل و متوازی الاضلاع کنار هم تشکیل می شوند
- حجم های هرمی : دارای یک قاعده هستند و دارای رأس می باشند و از مثلث های کنار هم تشکیل شده اند
- حجم های کروی : قاعده ندارند و فاقد رأس و گوشه می باشند

حجم های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می گیرند.

۷۱

به این دو سطح موازی که سطح منشوری را قطع می کنند، **قاعده** و به سطح های اطراف آن **وجه های جانبی** می گویند. به محل برخورد سطح ها **پال** و به نقطه برخورد هر سه سطح **رأس** می گویند.

۱- در هر یک از منشورهای زیر مشخص کنید چند وجه جانبی دارد؛ پال ها، رأس ها و قاعده ها را نام ببرید.



منشور سه پهلو

تعداد وجه های جانبی : ۳

رأس ها : ۶

پال ها : ۹

قاعده ها : ۲

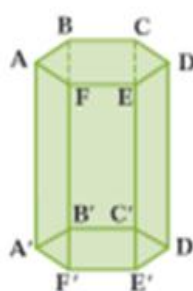
تعداد پال = تعداد پهلو $\times 3$

تعداد وجه های جانبی : ۶

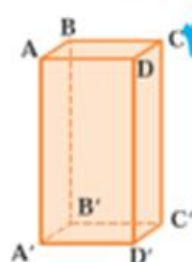
رأس ها : ۱۲

پال ها : ۱۸

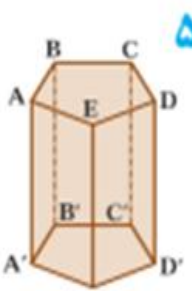
قاعده ها : ۲



منشور شش پهلو



تعداد رأس = تعداد پهلو $\times 2$ منشور چهارپهلو



منشور پنج پهلو

تعداد وجه های جانبی : ۴

رأس ها : ۸

پال ها : ۱۲

قاعده ها : ۲

تعداد وجه های جانبی : ۵

رأس ها : ۱۰

پال ها : ۱۵

قاعده ها : ۲

۷۱

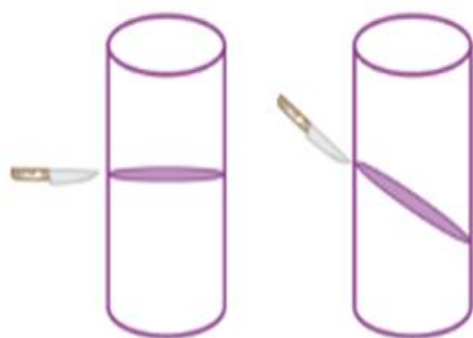
۲- برای اینکه در نام بردن یال و رأس چیزی جا نيفتد، از چه راهبردی استفاده می کنید؟

الگو سازی

۳- آیا استوانه هم یک حجم منشوری است؟ چرا؟ **بله**

دارای دو قاعده است و از بی نهایت وجه تشکیل شده است

با خمیر مجسمه سازی (یا می توانید از یک سیب زمینی استفاده کنید) یک استوانه بسازید. با یک قیچی یا چاقو مانند شکل های



مقابل آن را برش بزنید. سطح برش خورده را رنگ کنید و روی یک کاغذ بزنید، اثر آن

به چه شکلی است؟ **دایره و بیضی**

همین فعالیت را می توانید با برش های دیگر تکرار کنید. همچنین به جای استوانه

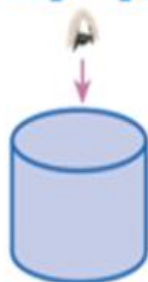
می توانید منشورهای دیگری را هم امتحان کنید. به این کار **مقطع زدن** می گویند.

نرم افزارهای زیادی هستند که می توانند این فعالیت را شبیه سازی کنند. در صورت تمایل از آنها استفاده کنید.

۷۲

۱- آیا ممکن است مقطع یک کره و یک استوانه هم شکل باشند؟ در چه صورت؟ **بله**
بله، اگر هر دو را برش افقی بزیم مقطع هر دو شکل دایره خواهد بود

آیا ممکن است مقطع یک منشور و یک هرم هم شکل باشند؟ **بله**



۲- یک استوانه از دید بالا به چه شکلی دیده می شود؟ **دایره**

یک منشور ۶ پهلو به چه شکلی دیده می شود؟ **۶ ضلعی**



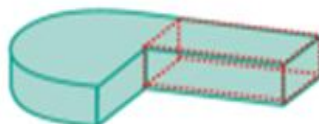
رأس های منشوری با قاعده ۶ ضلعی منتظم روی دایره قاعده استوانه است.

این حجم از بالا به چه شکلی دیده می شود؟

۳- مشخص کنید هر کدام از حجم های زیر، ترکیبی از کدام حجم ها هستند؟



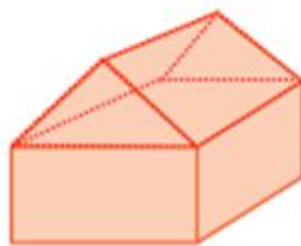
منشور ۴ پهلو
و منشور ۳ پهلو



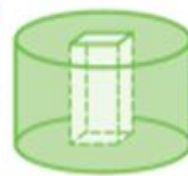
منشور ۴ پهلو
و نیم استوانه



استوانه و
مخروط



منشور ۴ پهلو و
منشور ۳ پهلو

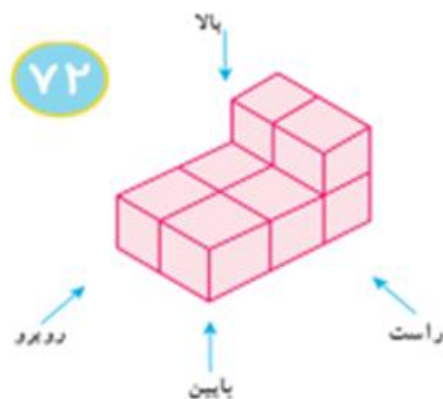


استوانه و داخل
آن منشور ۴ پهلو

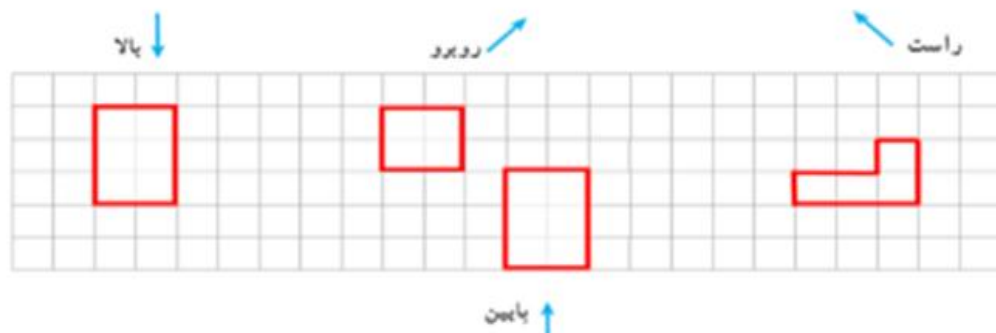


منشور ۶ پهلو
و هرم ۶ پهلو

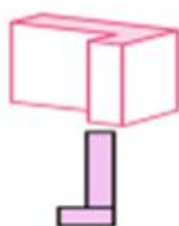
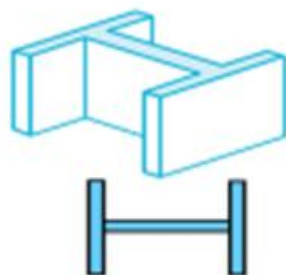
۷۲



۴- حجم مقابل را از ۴ جهت نگاه می‌کنیم این حجم از ۴ طرف به چه شکلی دیده می‌شود؟



۵- قاعده منشورهای زیر را رسم کنید (در واقع دید از بالا یا همان مقطع منشور است).

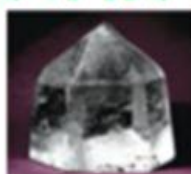


۶- بلورها کریستال‌های معدنی به طور طبیعی شکل می‌گیرند، ولی دارای حجم هندسی اند. برای نمونه مشخص کنید ۳ بلور زیر

منشور ۴ پهلو و دوهرم ۴ پهلو



منشور ۶ پهلو و هرم ۶ پهلو



هرم ۴ پهلو



از چه حجم‌هایی درست شده‌اند؟

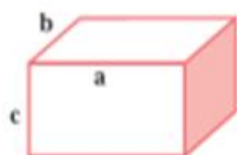
فعالین

۷۳

محاسبه حجم‌های منشوری

۱- در دوره دبستان آموختید که حجم یک مکعب مستطیل برابر است با حاصل ضرب طول، عرض و ارتفاع. با توجه به درس

جبر که در فصل قبل آموختید، حجم مکعب مستطیل را با یک رابطه جبری نشان دهید.



$$V = a \cdot b \cdot c$$

۲- قاعده مکعب مستطیل از ۸ مربع به ضلع یک سانتی متر درست شده است. (۲ × ۴)

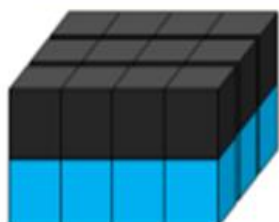
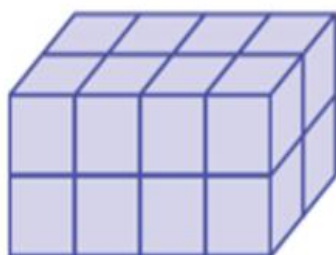
اگر روی این قاعده، مکعب مستطیلی به ارتفاع ۲ سانتی متر درست کنیم،

$$V = (2 \times 4) \times 2 = 16$$

حجم آن چقدر می‌شود؟

اگر قاعده مکعب مستطیل ۳ × ۴ باشد، با همان ارتفاع چه حجمی درست می‌شود؟

$$V = (3 \times 4) \times 2 = 24$$



۳- همچنین آموختید که واحد حجم مکعبی به ضلع ۱ سانتی متر یا ۱ متر، یک **سانتی متر مکعب** یا یک **متر مکعب** می گویند. مشخص کنید که هر کدام از حجم های زیر از چند مکعب واحد درست شده اند.

۷۳



۴۰



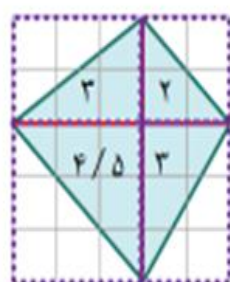
۳۲



۲۶

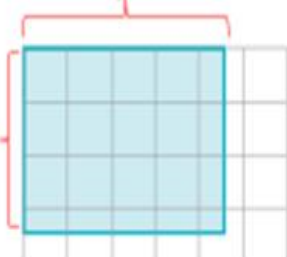
۴- اکنون هر کدام از شکل های زیر را به مربع هایی به ضلع ۱ سانتی متر تقسیم کنید تا مشخص شود قاعده هر کدام چند مربع به

ضلع یک سانتی متر است (می توانید از عددهای کسری هم استفاده کنید) $4/5$



$12/5$

$3/5$

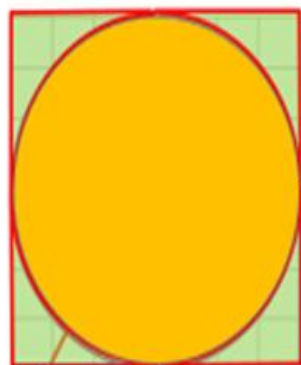


$4/5 \times 3/5 = 12/25$

اگر روی این قاعده ها منشوری به ارتفاع ۳ سانتی متر درست کنیم، حجم هر کدام چقدر می شود؟

$$12/5 \times 3 = 36/5$$

$$12/25 \times 3 = 36/25$$



اگر به همین ترتیب بتوانیم مساحت قاعده هر منشور را با مربع های واحد سطح تقریب بزنیم، چگونه

می توانیم حجم شکل های منشوری را به دست آوریم؟ **مساحت را در ارتفاع ضرب می کنیم**

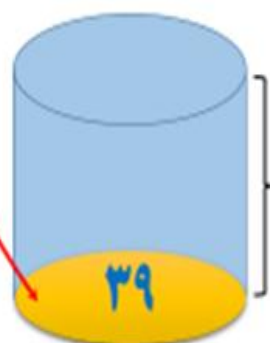
برای مثال قاعده یک استوانه را که به شکل دایره است، با مربع های واحد تقریب بزنید و حجم

استوانه به ارتفاع ۳ سانتی متر را به طور تقریبی به دست آورید.

$$49 - 10 = 39 \quad \text{مساحت دایره}$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره} = \text{حجم}$$

$$= 39 \times 3 = 117$$

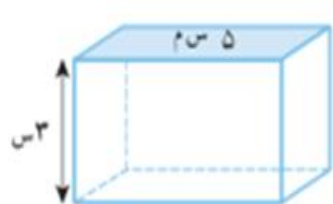


۱- با توجه به فعالیت صفحه قبل، رابطه جبری به دست آوردن حجم های منشوری (V) را که در آن مساحت قاعده منشور (S) و

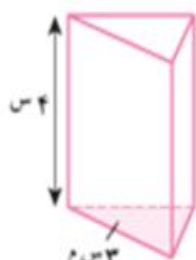
۷۴

ارتفاع منشور (h) موجود است، بنویسید. $V = S \times h$

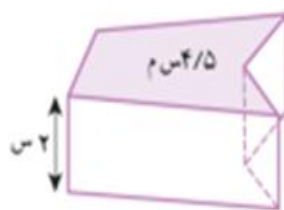
۲- با توجه به رابطه بالا و مساحت قاعده داده شده، حجم هر شکل را محاسبه کنید.



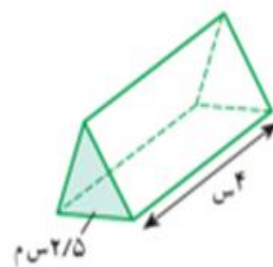
$$V = s.h \\ = 5 \times 3 = 15$$



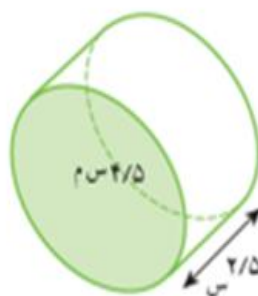
$$V = 3 \times 4 = 12$$



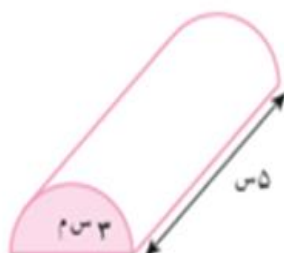
$$V = 4/5 \times 2 = 9$$



$$V = 2/5 \times 4 = 10$$



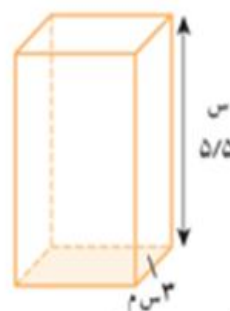
$$V = 4/5 \times 2/5 = 11/25$$



$$V = 3 \times 5 = 15$$

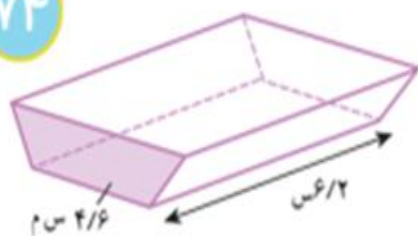


$$V = 6/5 \times 1/5 = 9/25$$

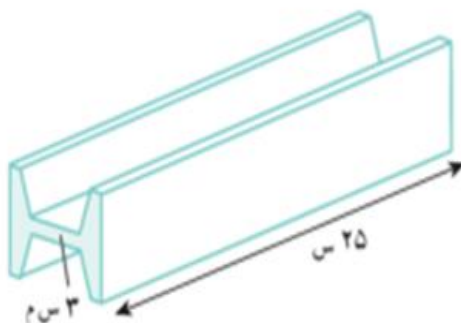


$$V = 3 \times 5/5 = 16/5$$

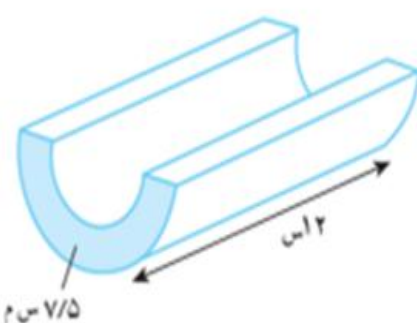
۷۴



$$V = 4/6 \times 6/2 = 28/52$$



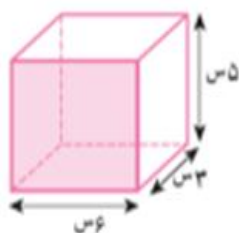
$$V = 3 \times 25 = 75$$



$$V = 7/5 \times 12 = 90$$

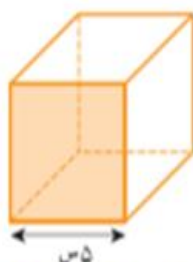
۳- ابتدا مساحت قاعده و سپس حجم هر یک از اجسام زیر را حساب کنید. برای به دست آوردن مساحت و حجم هر شکل

رابطه های جبری را بنویسید.



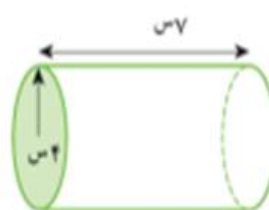
$$V = (6 \times 5) \times 3 = 90$$

مساحت مستطیل



$$V = (5 \times 5) \times 5 = 125$$

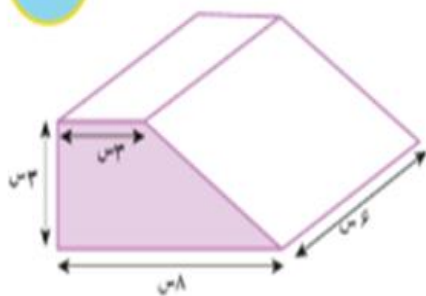
مساحت مربع



$$V = (4 \times 4 \times 3/14) \times 7 = 351/68$$

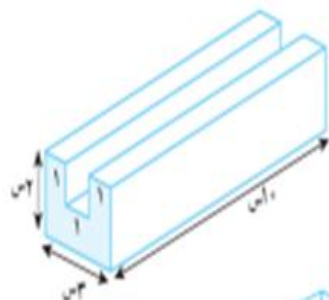
3/14 × شعاع × شعاع = مساحت دایره

۷۴

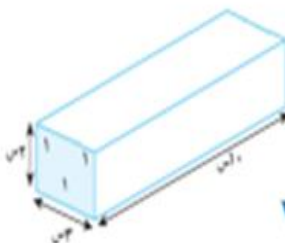


$$V = \left[\frac{(8+3) \times 3}{2} \right] \times 6 = 99$$

ارتفاع $\times$ (قاعده کوچک + قاعده بزرگ) $\div$ ۲ = مساحت دوزنقه

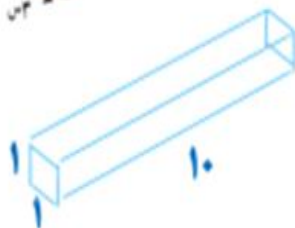


$$V = 60 - 10 = 50$$



$$V = (3 \times 2) \times 10 = 60$$

عرض $\times$ طول = مساحت مستطیل



$$V = (1 \times 1) \times 10 = 10$$

خودش $\times$ یک ضلع = مساحت مربع

۷۴



۴- منبع آبی به شکل استوانه است که شعاع قاعده آن ۰/۸ متر و ارتفاعش

۲ متر است. این منبع چند متر مکعب آب می گیرد؟

$$V = (0.8 \times 0.8 \times 3.14) \times 2 = 4.0192$$



$3.14 \times$ شعاع $\times$ شعاع = مساحت دایره

۵- یک جعبه دستمال کاغذی به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی متر است. تعیین

۷۵

کنید چند عدد از این جعبه ها در یک کارتن که به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰ و ۳۰ و ۲۴ سانتی متر است، جا می گیرد؟



$$V_{\text{کارتن}} = (50 \times 30) \times 24 = 36000$$

$$V_{\text{جعبه}} = (25 \times 12) \times 5 = 1500$$



$$36000 \div 1500 = 24$$

۲۴ جعبه در کارتن جا می گیرد

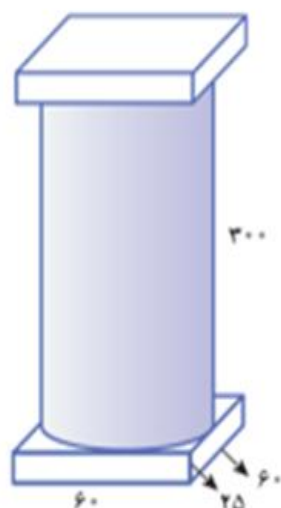
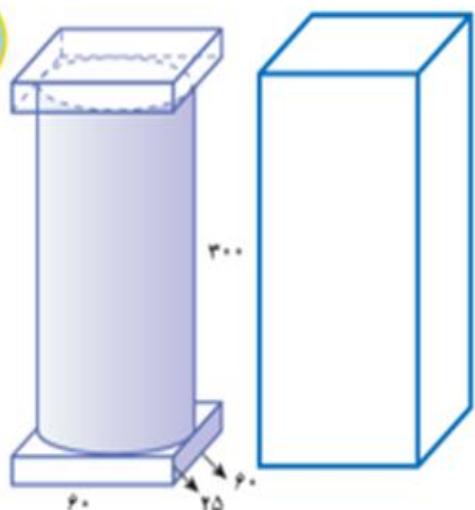
۱- حجم ستون شکل مقابل را به صورت تقریبی پیدا کنید.

(کل شکل را مکعب مستطیل و یا استوانه در نظر بگیرید.)

شکل را مکعب در نظر می گیریم.

ارتفاع $\times$ مساحت قاعده = حجم مکعب

$$\text{حجم مکعب} = 350 \times (60 \times 60) = 1260000$$



حالا کمی دقیق تر محاسبه کنید و آن را به سه قسمت تقسیم کنید و حجم سه تکه را جداگانه حساب کنید و مجموع را به دست آورید (شعاع قاعده استوانه چند است؟).

$$\text{حجم مکعب پایین} = 25 \times (60 \times 60) = 90000$$

تفاوت دو جواب را به دست آورید.

$$\text{حجم مکعب بالا} = 90000$$

ارتفاع $\times$ مساحت دایره = حجم استوانه

$$\text{حجم استوانه} = 300 \times (30 \times 30 \times \pi) = 847800$$

$$\text{حجم کل} = 90000 + 90000 + 847800 = 1027800$$

$$\text{اختلاف} = 1260000 - 1027800 = 232200$$

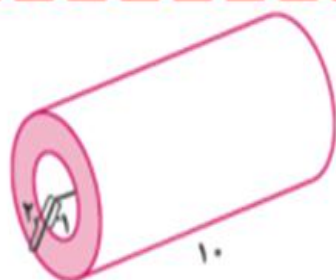
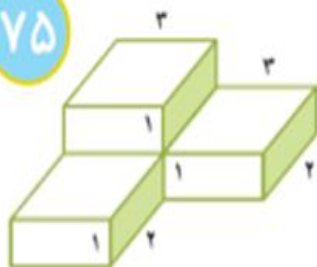
۲- حجم اشکال زیر را به دست آورید.

چون ۴ مکعب (منشور ۴ بهلو) با هم مساویند حجم یکی از آنها را بدست آورده و در ۴ ضرب می کنیم

$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم هر مکعب}$$

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

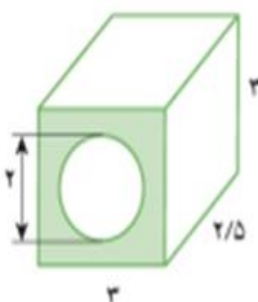
$$\text{حجم کل} = 4 \times 6 = 24$$



$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره بزرگ} = \text{حجم استوانه بزرگ} = (2 \times 2 \times \pi) \times 10 = 40\pi$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره کوچک} = \text{حجم استوانه کوچک} = (1 \times 1 \times \pi) \times 10 = 10\pi$$

$$\text{اختلاف حجم} = 40\pi - 10\pi = 30\pi$$

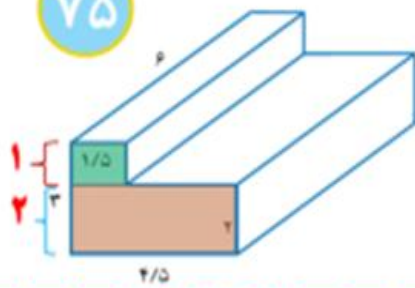


$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم مکعب} = 3 \times 2/5 \times 3 = 22/5$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره} = \text{حجم استوانه} = (1 \times 1 \times \pi) \times 2/5 = 2/5\pi = 7/850$$

$$\text{اختلاف حجم} = 22/5 - 7/850 = 14/65$$

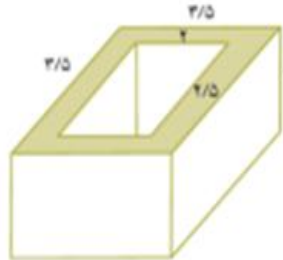
۷۵



$$\text{حجم مکعب پایین} = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = 4/5 \times 2 \times 6 = 54$$

$$\text{حجم مکعب بالا} = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = 1/5 \times 1 \times 6 = 9$$

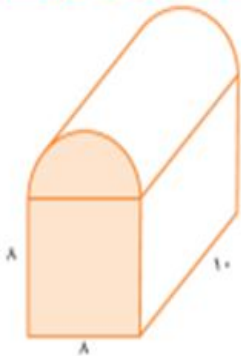
$$\text{حجم کل} = 54 + 9 = 63$$



$$\text{حجم مکعب بزرگ} = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = 3/5 \times 3/5 \times 2 = 24/5$$

$$\text{حجم مکعب کوچک} = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = 2/5 \times 2 \times 2 = 10$$

$$\text{اختلاف حجم} = 24/5 - 10 = 14/5$$



$$\text{حجم مکعب پایین} = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = 8 \times 8 \times 10 = 640$$

$$\text{حجم استوانه} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره} = (4 \times 4 \times \pi) \times 10 = 160\pi$$

$$\text{حجم نیم استوانه} = 160\pi \div 2 = 80\pi = 251.2$$

$$\text{حجم کل} = 640 + 251.2 = 891.2$$

۷۵

۳- چاهی به عمق ۱۲ متر حفر کرده‌ایم. شعاع دهانه این چاه ۰/۴ متر است. وقتی خاک کنده و بیرون ریخته می‌شود، حجم آن

۱/۳ برابر می‌شود. اگر خاک این چاه بعد از بیرون آمدن در سطحی به ابعاد ۴ و ۵ متر به طور یکنواخت ریخته شود تا یک مکعب مستطیل

به وجود آید، ارتفاع این مکعب مستطیل چقدر خواهد شد؟



$$\text{حجم چاه} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره} = (0.4 \times 0.4 \times \pi) \times 12 = 1/92\pi$$

$$\text{مساحت مستطیل} = 5 \times 4 = 20 \quad \text{حجم خاک} = 1/92\pi \times 1/3 = 2/496\pi$$

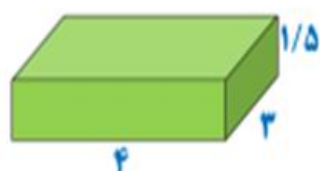
و اگر حجم خاک را بر مساحت زمین مستطیل شکل تقسیم کنیم ارتفاع آن بدست می‌آید

$$\text{ارتفاع} = 2/496\pi \div 20 = 0.1248\pi = 0.39$$

۴- حوضی است به شکل مکعب مستطیل که ابعاد آن ۳ و ۱/۵ متر است. این حوض خالی را با شیر آبی که در هر دقیقه ۶۰

لیتر آب وارد آن می‌کند، پر می‌کنیم. چند ساعت طول می‌کشد تا حوض پر شود؟

$$\text{حجم مکعب} = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول}$$



$$4 \times 3 \times 1/5 = 12$$

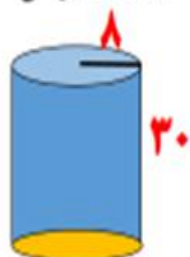
$$12 \times 1000 = 12000$$

هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است پس:

$$12000 \div 60 = 200 \text{ دقیقه}$$

$$200 \div 60 = 3 \text{ ساعت}$$

۵- یک پارچ به شکل استوانه است که ارتفاع آن ۳۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۸ سانتی متر است. آب داخل این پارچ را در لیوان هایی به شکل استوانه که ارتفاع آنها ۱۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۴ سانتی متر است، می ریزیم. این آب چند لیوان را پر می کند؟



حجم پارچ را محاسبه نموده و بر حجم لیوان تقسیم می کنیم

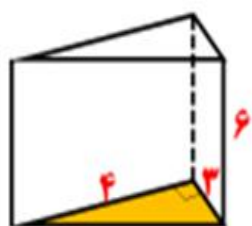
$$\text{حجم پارچ} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره} = (8 \times 8 \times \pi) \times 30 = 1920 \pi$$

$$\text{حجم لیوان} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره} = (4 \times 4 \times \pi) \times 10 = 160 \pi$$

$$1920 \pi \div 160 \pi = 12$$

۶- قاعده یک منشور سه پهلو مثلث قائم الزاویه ای که اندازه ضلع های قائمه آن ۳ و ۴ است. ارتفاع این منشور ۶ سانتی متر است.

حجم این منشور را پیدا کنید.



$$\text{حجم منشور} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$36 = (4 \times 3 \div 2) \times 6$$

$$\text{مساحت مثلث} = \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \div 2$$

مساحت جانبی و کل

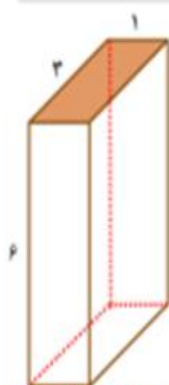
۱- مساحت همه وجه های جانبی منشورهای زیر را به دست آورید. هر وجه چه شکلی دارد؟
به مجموع این مساحت ها مساحت جانبی شکل می گویند.

مساحت را با حرف S نشان می دهیم

$$S = 6 \times 1 = 6 \quad S = 6 \times 3 = 18$$

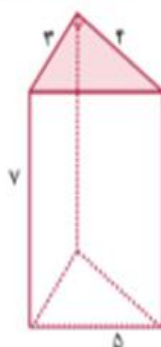
$$S = 6 \times 1 = 6 \quad S = 6 \times 3 = 18$$

$$\text{مساحت جانبی} = 18 + 18 + 6 + 6 = 60$$



$$S = 5 \times 2 = 10$$

$$\text{مساحت جانبی} = 10 \times 6 = 60$$



$$S = 5 \times 7 = 35$$

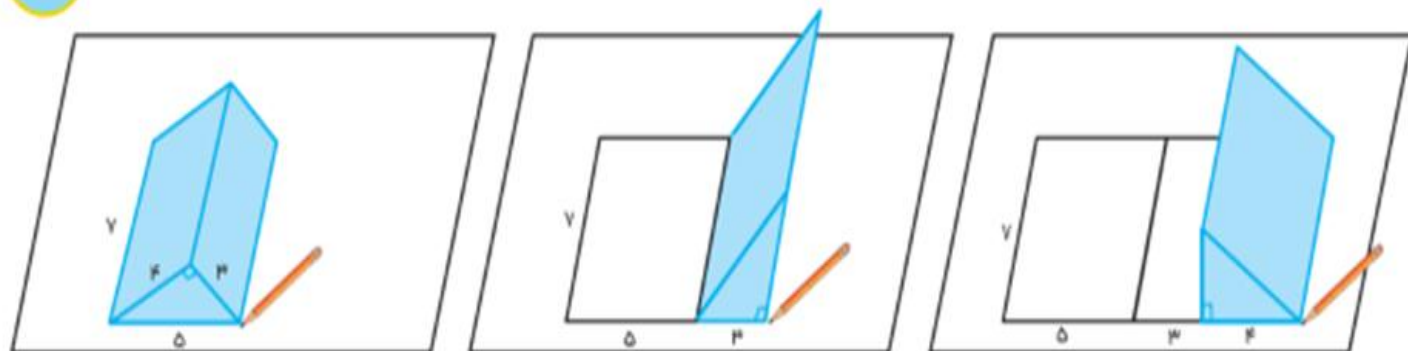
$$S = 3 \times 7 = 21$$

$$S = 4 \times 7 = 28$$

$$\text{مساحت جانبی} = 35 + 21 + 28 = 84$$

۲- برای به دست آوردن مجموع مساحت جانبی منشور سه پهلوئی بالا به صورت زیر، آن را روی کاغذ قرار می دهیم، و به اندازه طول هر ضلع یک علامت می گذاریم.

۷۶



با توجه به شکل های بالا چگونه می توانستیم ساده تر مساحت جانبی را به دست آوریم؟ $۳ + ۴ + ۵ = ۱۲ = \text{طول}$

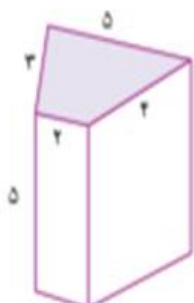
$$S = ۱۲ \times ۷ = ۸۴$$

۳- با توجه به ۲ سؤال بالا اگر مساحت را با S ، محیط را با P و ارتفاع را با h نشان دهیم. رابطه جبری مساحت جانبی منشورهای بالا را بنویسید.

$$S = p.h$$

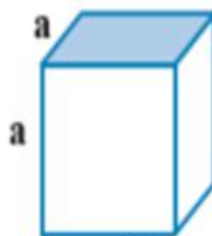
۷۶

۱- مساحت جانبی شکل های زیر را پیدا کنید.



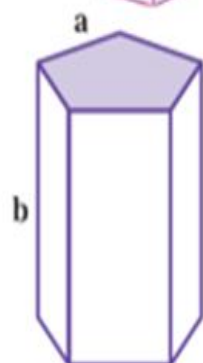
$$\text{محیط قاعده} = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۴$$

$$S = ۱۴ \times ۷ = ۹۸$$



$$\text{محیط قاعده} = a + a + a + a = ۴a$$

$$S = ۴a \times a$$



$$\text{محیط قاعده} = a + a + a + a + a = ۵a$$

$$S = ۵a \times b = ۵ab$$



$$\text{محیط قاعده} = a + a + b + b = ۲a + ۲b$$

$$S = (۲a + ۲b) \times c = ۲ac + ۲bc$$

۲- ستونی به شکل منشور ۶ پهلوست که هر ضلع آن $۰/۲$ متر و ارتفاع آن ۵ متر است. می خواهند بدنه جانبی این ستون را کاشی کاری

کنند. چند متر مربع کاشی لازم است؟



$$\text{محیط قاعده} = ۰/۲ + ۰/۲ + ۰/۲ + ۰/۲ + ۰/۲ + ۰/۲ = ۱/۲$$

$$S = ۱/۲ \times ۵ = ۶$$

۱- یک استوانه را به شکل زیر روی یک صفحه می‌غلطانیم و ابتدا و انتهای کار را مشخص می‌کنیم.

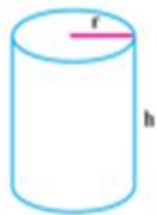


با این کار چه شکلی به دست می‌آید؟ **مستطیل**

طول و عرض آن چگونه به دست می‌آید؟ **طول آن محیط دایره است. عرض آن ارتفاع استوانه است**

مساحت این شکل چگونه به دست می‌آید؟ **ارتفاع استوانه $\times$ محیط دایره**

۲- با توجه به سؤال بالا مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده r را با عبارت جبری نشان دهید.



$$S = 2r \times \pi \times h$$

ارتفاع



ارتفاع استوانه $\times$ محیط دایره = مساحت جانبی استوانه

$$\text{محیط دایره} = \text{قطر} \times \frac{3}{14} = 2r \times \pi$$

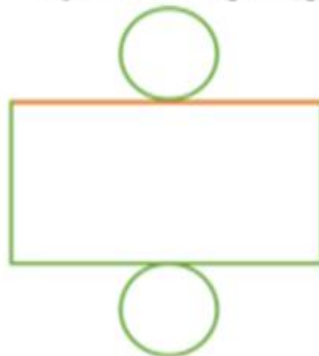
$$\text{ارتفاع استوانه} = h$$

۷۷

۱- با توجه به سؤال بالا با یک مستطیل می‌توان یک سطح استوانه‌ای درست کرد.



این سطح استوانه را روی کاغذ بگذارید و دور آن خط بکشید. این دایره، قاعده استوانه است. چون استوانه ۲ قاعده دارد.



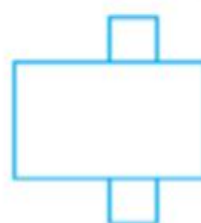
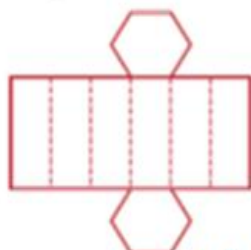
۲ دایره و یک مستطیل **مساحت کل** استوانه را تشکیل می‌دهند.

شکل مقابل را گسترده استوانه می‌گویند.

چه رابطه‌ای بین دایره و مستطیل در این گسترده وجود دارد؟

محیط دایره برابر طول مستطیل است.

۲- گسترده یک منشور ۶ پهلوی با قاعده ۶ ضلعی منتظم و گسترده یک مکعب مستطیل با قاعده مربع در



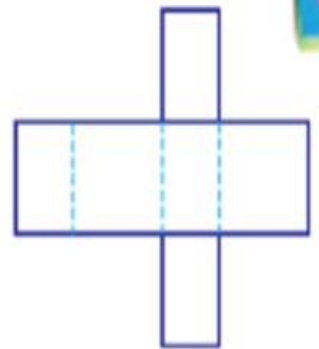
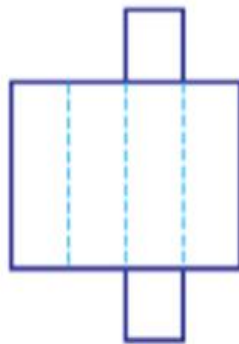
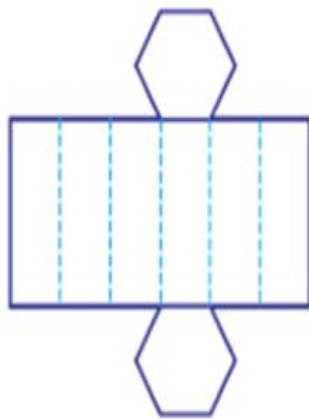
شکل‌های زیر رسم شده‌اند.

چه رابطه‌ای بین قاعده‌ها و مستطیل‌ها وجود دارد؟

محیط مربع با طول مستطیل برابر است محیط شش ضلعی با طول مستطیل برابر است

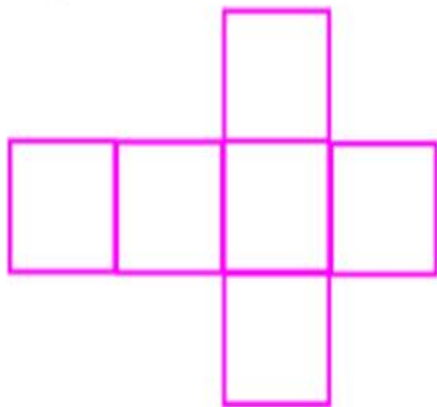
۱- در شکل زیر گسترده چند منشور داده شده است. آنها را روی کاغذ بکشید و منشورها را درست کنید و به کلاس بیاورید.

۷۸



در چه صورت گسترده شکل وسط به یک مکعب تبدیل می شود؟

در صورتی که اندازه همه ضلع های مستطیل ها برابر باشد



۷۸



۲- یک غلتک روی زمین آسفالت شده باید ۴ بار غلت بزند تا سطح آن صاف شود. اگر شعاع غلتک ۵۰ سانتی متر و ارتفاع استوانه آن ۱ متر باشد، برای آسفالت کردن سطح یک کوچه به طول ۲۰ و عرض ۴ متر، این غلتک باید به طور تقریبی چند بار بچرخد؟

$$\frac{3}{14} \times \text{قطر} = \text{محیط دایره}$$

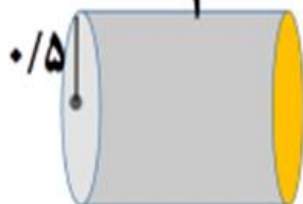
ارتفاع استوانه محیط دایره = مساحت جانبی استوانه

$$\frac{3}{14} = 1 \times \pi = 1 \times (1 \times \pi) = 1 \times \pi = \frac{3}{14}$$

$$80 = 20 \times 4 = \text{مساحت کوچه}$$

$$25/47 = 80 \div \frac{3}{14} = \text{تعداد دور غلتک}$$

$$101/88 = 25/47 \times 4 = \text{در ۴ دور غلت}$$



محیط دایره

۳- یک چرخ ماشین که کاملاً خیس شده است، با ۱۰° دور چرخیدن روی زمین جای خود را مشخص می کند تا خشک شود.

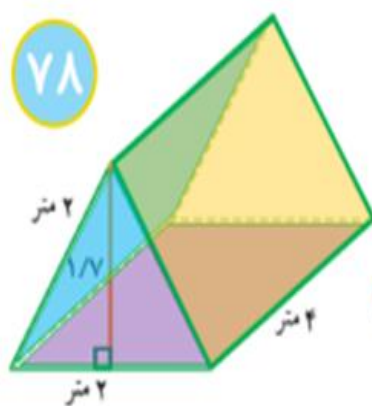
اگر این چرخ به ضخامت ۲۰° سانتی متر و قطر ۷۰° سانتی متر باشد، چه مساحتی از زمین را خیس خواهد کرد؟



ارتفاع استوانه $\times$ محیط دایره = مساحت جانبی چرخ

$$\text{مساحت جانبی چرخ} = 1400 \pi = (70 \times \pi) \times 20$$

۲۰  $1400 \pi \times 10 = 14000 \pi$ مساحت زمین خیس شده پس از ۱۰ دور



۴- یک چادر مسافرتی به شکل مقابل است. چند متر پارچه برای ساخت آن به کار رفته است؟

حجم این چادر چقدر است؟

برای محاسبه پارچه مصرفی می بایست مساحت کل آن را بدست آوریم

$$\text{مساحت جانبی} = (2 + 2 + 2) \times 4 = 24$$

$$\text{مساحت مثلث جلو} = (2 \times 1/7) \div 2 = 1/7 = (2 \times 1/7) \div 2 = (ارتفاع \times قاعده) \div 2$$

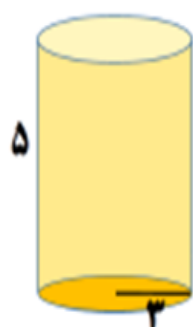
$$\text{مساحت مثلث عقب} = 1/7$$

$$\text{مساحت کل} = 24 + 1/7 + 1/7 = 27/4$$

۵- یک مخزن نفت به شکل استوانه‌ای است که شعاع قاعده آن ۳ متر و ارتفاعش ۵ متر است. می‌خواهیم بدنه خارجی و سقف آن را رنگ بزنیم. اگر هزینه رنگ کردن هر متر مربع ۳۰۰۰۰ تومان باشد، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

۷۸

ارتفاع استوانه × محیط دایره = مساحت بدنه خارجی دایره



$$\text{مساحت جانبی استوانه} = (6 \times 3/14) \times 5 = 90$$

$$\text{مساحت سقف استوانه} = 3 \times 3 \times 3/14 = 27$$

$$\text{مساحت جانبی و سقف استوانه} = 90 + 27 = 117$$

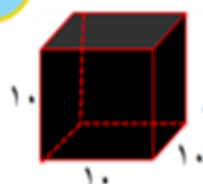
$$351000 = 117 \times 3000 = \text{هزینه رنگ کردن}$$

محیط دایره

بدنه خارجی دایره

۶- می‌خواهیم با مقوا مکعبی به ضلع ۱۰ cm بسازیم. چند سانتی متر مربع مقوا به کار می‌رود؟

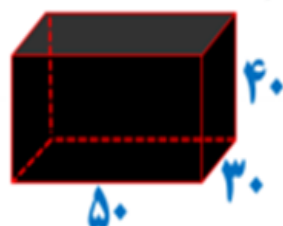
۷۸



مساحت

$$600 = 100 \times 6 = \text{مساحت کل} \quad 100 = 10 \times 10 = \text{مساحت یک وجه}$$

۷- یک جعبه به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۳۰ و ۵۰ و ۴۰ سانتی متر را با کاغذ کادو پوشانده‌ایم. برای پوشاندن این جعبه



حداقل چند سانتی متر مربع کاغذ کادو لازم داریم؟ چرا در این مسئله حداقل کاغذ لازم خواسته شده است؟

$$1500 = 30 \times 50 = \text{مساحت وجه پایین} \quad 1500 = 30 \times 50 = \text{مساحت وجه بالا}$$

$$9400 = 6400 + 1500 + 1500 = \text{مساحت کل} \quad 6400 = (50 + 30 + 50 + 30) \times 40 = \text{مساحت جانبی}$$

۸- با مکعب‌های به ضلع ۱ واحد حجم مقابل را ساخته‌ایم. اگر تمام سطح‌های این حجم را

رنگ کنیم، چند مکعب رنگ نمی‌شوند؟



$$56 = 24 + 8 + 24 = \text{چند مکعب رنگ می‌شود؟}$$

$$24 = \text{چند مکعب ۲ وجهشان رنگ می‌شود؟}$$

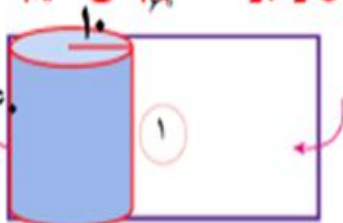
$$8 = \text{چند مکعب ۳ وجهشان رنگ شده است؟}$$

۱- یک مستطیل به طول و عرض داده شده را به دو صورت زیر لوله می‌کنیم تا استوانه به‌دست آید.

برای بدست آوردن شعاع دایره، محیط آن را بر عدد پی و حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم

$$60 \div 3 = 20$$

$$20 \div 2 = 10$$



$$40 \div 3 = 13/3$$

$$13/3 \div 2 = 6/6$$

در هر حالت حجم استوانه را به‌دست آورید. مانند نمونه از رابطه‌های جبری کمک بگیرید. برای ساده‌تر شدن محاسبات، عدد پی (π) را ۳ در نظر بگیرید. در هر حالت ابتدا شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را تشخیص دهید.

$$V_1 = h_1 \times S_1 = h_1 \times r_1 \times r_1 \times \pi = (10 \times 10 \times \pi) \times 40 = 4000 \pi$$

$$V_2 = h_2 \times S_2 = (6/6 \times 6/6 \times \pi) \times 60 = 2613/6 \pi$$

با مقایسه حجم‌ها و با توجه به اینکه هر دو حجم با یک مستطیل ساخته شده است، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
هر چه شعاع دهانه یک استوانه بزرگتر باشد حجمش بیشتر است

۲- یک کارخانه تولید جای دو نوع بسته‌بندی به شکل‌های زیر ارائه می‌کند. هر دو نوع قوطی با ورق گالوانیزه درست شده‌اند.



حجم دو قوطی را بدست می‌آوریم

عدد پی را ۳ در نظر می‌گیریم

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم قوطی مکعب شکل}$$

$$750 = (5 \times 5 \times \pi) \times 10 = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره} = \text{حجم قوطی استوانه شکل}$$

در کدام یک جای بیشتری جا می‌گیرد؟

در کدام یک ورق گالوانیزه بیشتری برای ساخت قوطی به کار رفته است؟ در محاسبات خود عدد π را ۳ در نظر بگیرید.

با توجه به عددهای بالا اگر شما مدیر کارخانه باشید، کدام نوع بسته‌بندی را انتخاب می‌کنید؟ چرا؟

باید مساحت کل دو قوطی را بدست آوریم

کدام نوع بسته‌بندی در حمل و نقل بهتر است و جای کمتری می‌گیرد؟ چرا؟ بسته‌بندی استوانه شکل

$$600 = 6 \times (10 \times 10) = \text{مساحت یک وجه} \times \text{مساحت کل قوطی مکعب شکل}$$

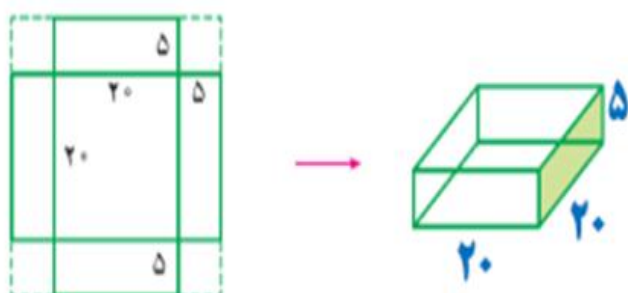
$$\text{مساحت دایره پایین} + \text{مساحت دایره بالا} + \text{مساحت جانبی} = \text{مساحت کل قوطی استوانه شکل}$$

در ساخت قوطی مکعب شکل ورق گالوانیزه بیشتری مصرف شده است

$$450 \pi = 150 \pi = 25 \pi + 25 \pi + 100 \pi = (5 \times 5 \times \pi) + (5 \times 5 \times \pi) + (10 \times \pi) \times 10$$

برای بسته بندی شیرینی، جعبه هایی را درست می کنند. شکل گسترده این جعبه ها به صورت زیر است و پس از تا کردن مربع های کوچک گوشه ها روی هم قرار می گیرند و جعبه درست می شود.

۷۹



با توجه به اندازه های داده شده، حجم (گنجایش) جعبه را پیدا کنید.

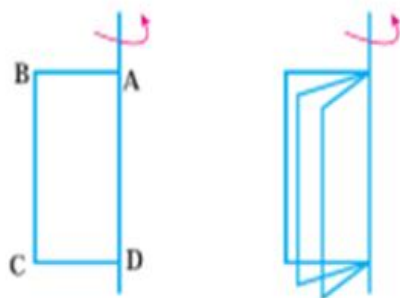
اگر به جای ۵ سانتی متر لبه ها را ۶ سانتی متر در نظر بگیریم، جعبه ای که با همین مقوا ساخته می شود، حجم بیشتری دارد یا کمتر؟

$$\text{حجم جعبه شیرینی} = 20 \times 20 \times 5 = 2000$$

$$\text{حجم جعبه شیرینی با لبه ۶ سانت} = 18 \times 18 \times 6 = 1944$$

مستطیل ABCD را حول محوری که از AD می گذرد، دوران می دهیم. شکل زیر نشان می دهد که مستطیل ها چگونه حرکت

می کنند.



شما هم مانند شکل مقابل کاغذی را روی مدادی بچسبانید و آن را بچرخانید و حرکت مستطیل را تماشا کنید.

با چرخاندن این مستطیل چه حجمی به وجود می آید؟

مشخصات آن حجم را بنویسید.



ارتفاع استوانه طول مستطیل است و شعاع دایره استوانه عرض مستطیل است

با حرکت یک سطح در فضا، حجم ساخته می شود. همین کار را برای شکل های دیگر نیز می توان انجام داد تا حجم های

دیگری ساخته شوند. در سال های بعد در این مورد بیشتر توضیح داده خواهد شد.

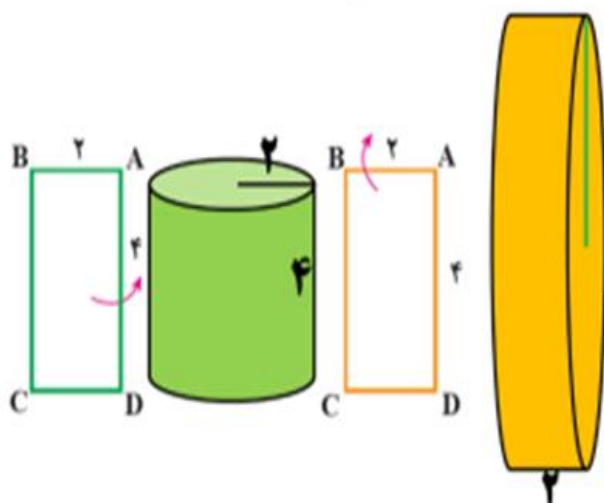
۱- سطحی مثل شکل مقابل را حول محور d دوران می دهیم.

۸۰



حجم چه شکلی ساخته می شود؟ می توانید با یک فرفره و چرخاندن آن حجم ایجاد شده را ببینید.
از این خاصیت در خراطی، تراشکاری و سفالگری برای ساختن حجم های مختلف استفاده می کنند.

۲- یک مستطیل را یک بار حول محور AD و یک بار حول محور AB دوران دهید. حجم حاصل از این دوران را حساب کنید.



ارتفاع $\times$ مساحت دایره = حجم استوانه

$$= (4 \times 4 \times \pi) \times 2 = 32\pi$$

ارتفاع $\times$ مساحت دایره = حجم استوانه

$$= (2 \times 2 \times \pi) \times 4 = 16\pi$$

۱- یک مقوا به طول و عرض 20×5 را به شکل استوانه به ارتفاع ۵ در آورده ایم. یک مقوای دیگر را نیز به ابعاد 10×10 را



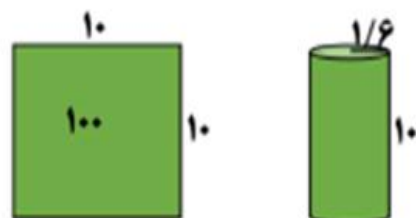
به شکل یک استوانه در آورده ایم. با توجه به اینکه مساحت مقواها در دو حالت برابر است، کدام استوانه حجم بیشتری دارد؟

۸۱



ارتفاع $\times$ مساحت دایره = حجم استوانه

$$= (3/3 \times 3/3 \times \pi) \times 5 = 54/45\pi$$

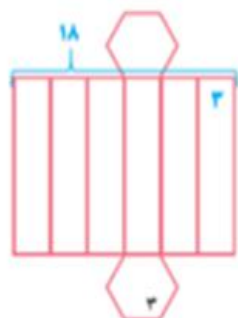


ارتفاع $\times$ مساحت دایره = حجم استوانه

$$= (1/6 \times 1/6 \times \pi) \times 10 = 25/6\pi$$

هرچه شعاع دهانه استوانه بزرگتر باشد حجم آن بیشتر می شود.

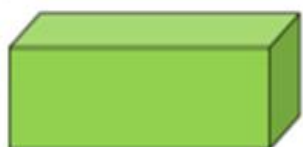
۲- با شکل مقابل یک منشور درست کرده ایم. مساحت جانبی آن را پیدا کنید.



$$180 = 18 \times 10 = \text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت مستطیل}$$

۳- یک صابون مکعب مستطیل شکل به حجم ۳۲ سانتی متر مکعب پس از چند بار مصرف، کوچک شده و به ابعاد $2\frac{1}{4}$ و ۴ و $1\frac{1}{4}$ سانتی متر تبدیل شده است. چند درصد این صابون استفاده شده است؟

۸۱



حجم صابون بزرگ = ۳۲

$$\text{حجم صابون کوچک} = 2\frac{1}{4} \times \frac{4}{1} \times 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

$$15 = \frac{x}{100} \times 32 \Rightarrow x = \frac{15 \times 100}{32} = 46.875$$

۴- یک استوانه که با یک مقوا به طول ۲۰ سانتی متر و عرض ۱۰ سانتی متر ساخته شده به طور تقریبی چه حجمی دارد؟ (ارتفاع استوانه ۲۰ است.) ابتدا محیط را بر عدد پی و سپس بر ۲ تقسیم می کنیم تا شعاع بدست آید.



$$10 \div 3.14 = 3.18 \quad 3.18 \div 2 = 1.59$$

ارتفاع × مساحت دایره = حجم استوانه

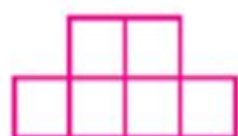
$$(1/6 \times 1/6 \times 3) \times 10 = 76/8$$

چون می خواهیم پاسخ تقریبی به دست بیاوریم

می توانیم شعاع را $1/6 \approx 1/59$ و عدد ۱۱ را ۳ در نظر بگیریم

۵- اگر یک حجم از بالا و سمت راست و روبه رو به صورت زیر دیده شود، آن حجم را رسم کنید.

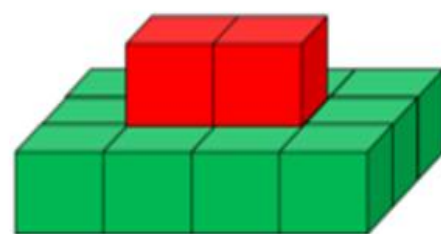
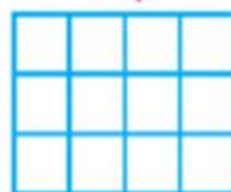
روبه رو



راست



بالا

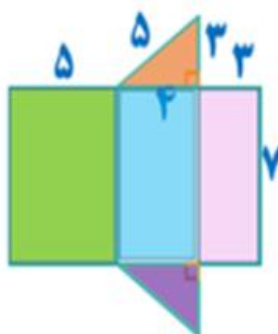
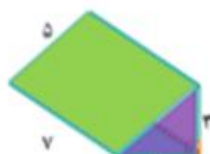


۶- شکل مقابل گسترده یک منشور را نشان می دهد.

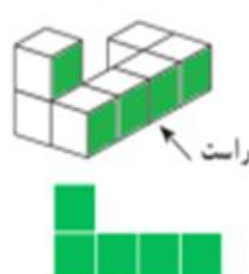
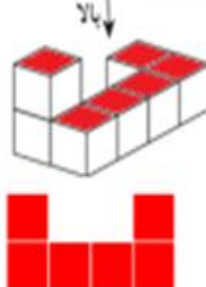
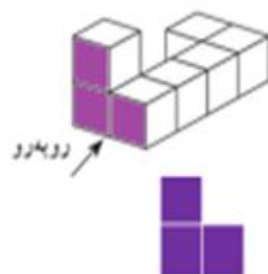
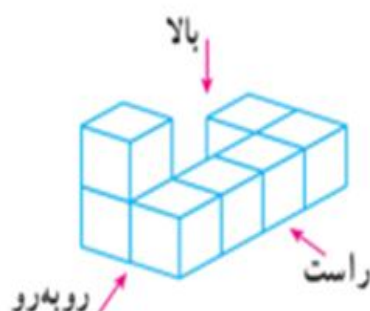
مساحت جانبی منشور را پیدا کنید.

$$60 = 3 \times 20 = \text{مساحت جانبی} \quad 20 = 2 \times 10 = \text{مساحت یک وجه}$$

۷- با توجه به حجم منشور و ابعاد آن، اندازه ضلع های گسترده آن را بنویسید.



۸- حجم مقابل از راست، بالا و روبه رو چگونه دیده می شود؟



مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید. برای هر کدام مثال بزنید.

- حجم هندسی ● حجم منشوری ● مساحت جانبی ● مساحت کل ● گسترده

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه تهیه کنید.

- انواع حجم‌های هندسی
- قاعده، وجه، پال و رأس حجم‌های منشوری
- رابطه پیدا کردن حجم‌های منشوری
- رابطه پیدا کردن مساحت کل حجم‌های منشوری
- دوران سطح حول یک محور و ساختن حجم
- مقایسه حجم‌هایی که با یک سطح مشخص درست شده‌اند.
- حجم مخروطی و حجم منشوری
- مقطع زدن یک حجم منشوری
- رابطه پیدا کردن مساحت جانبی حجم‌های هندسی
- ساختن یک حجم به کمک گسترده آن

کاربرد

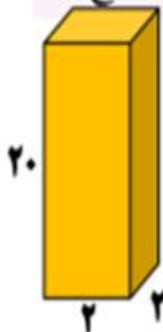
کاربرد این فصل در زندگی روزمره فراوان است. در دنیایی از اجسام زندگی می‌کنیم و نیاز داریم حجم‌های مختلف را اندازه بگیریم و برای ساختن حجم‌ها نیز از سطح‌ها (کاغذ، مقوا، ورق و ...) استفاده می‌کنیم.

تمرین‌های ترکیبی

در صورتی که تمرین‌های ترکیبی زیر را توانستید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱- حجم، مساحت جانبی و مساحت کل شکل‌های زیر را به دست آورید.

منشور چهار پهلوی با قاعده مربع به ضلع ۲ و ارتفاع ۲۰



$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم منشور ۴ پهلوی}$$

$$= 2 \times 2 \times 20 = 80$$

استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲



$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت دایره} = \text{حجم استوانه}$$

$$= (2 \times 2 \times \pi) \times 2 = 8\pi$$

$$20 \times 2 = 40 = \text{مساحت یک وجه مکعب}$$

$$40 \times 4 = 160 = \text{مساحت جانبی مکعب}$$

$$\text{ارتفاع استوانه} \times \text{محیط دایره} = \text{مساحت جانبی استوانه}$$

$$2 \times (4 \times \pi) = 8\pi = \text{مساحت جانبی استوانه}$$

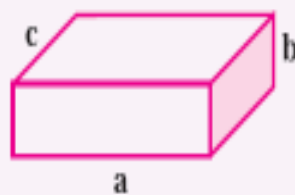
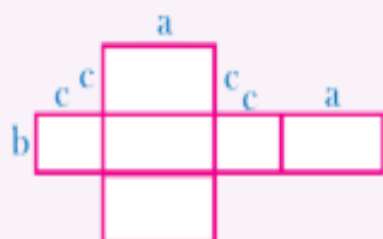
$$\text{مساحت قاعده پایین} + \text{مساحت قاعده بالا} + \text{مساحت جانبی} = \text{مساحت کل}$$

مساحت کل

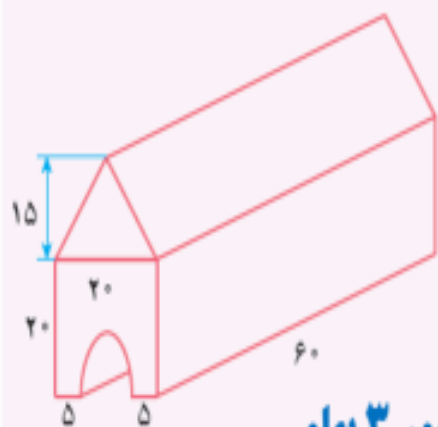
$$160 + 40 + 40 = 168 = \text{مساحت کل مکعب}$$

$$8\pi + 4\pi + 4\pi = 16\pi = \text{مساحت کل استوانه}$$

۲- الف) با توجه به شکل مکعب مستطیل اندازه ضلع های خواسته شده روی گسترده آن را مشخص کنید.



ب) حجم شکل مقابل را به دست آورید.



$$\text{حجم مکعب} = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = 20 \times 20 \times 60 = 24000$$

$$\text{حجم منشور ۳ پهلو} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت مثلث} = (20 \times 15 \div 2) \times 60 = 9000$$

$$\text{حجم کل} = 9000 + 24000 = 33000$$