

ریاضی: هفتم

فصل هفتم: توان و جذر

صفحه: ۸۳ تا ۹۶

تهیه کننده: احمد فرخ وند

در تهیه این فایل از اسلایدهای استاد یونس جمال پور و سایت زیر استفاده شده است. یونس جمال پور lali-riazi.blogfa.com



توان و جذر

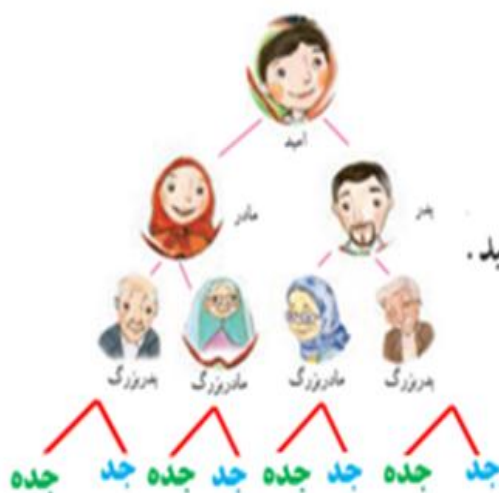
فصل ۷



۸۴

تعریف توان

۱- امید می‌داند که نوه چهار نفر است. این چهار نفر پدر بزرگ‌ها و مادر بزرگ‌های امیدند. او می‌خواهد بداند که نتیجه چند نفر است؟
(به فرزند نوه، نتیجه می‌گویند). امید برای پاسخ سؤال خود شکل مقابل را کشید.



الف) شکل را کامل کنید و با استفاده از آن بگویید که امید نتیجه چند نفر است؟ ۸ نفر

ب) به نظر شما تعداد افرادی که امید نبره آنها است، چند نفرند؟ ۱۶
(به فرزند نتیجه، نبره می‌گویند).

ج) جدول مقابل را کامل کنید. برای محاسبه تعداد، از ماشین حساب نیز می‌توانید کمک بگیرید.

تعداد	روش محاسبه	بستگان امید
۲	۲	پدر و مادر
۴	2×2	پدربزرگ و مادربزرگ
۸	$2 \times 2 \times 2$	نسل سوم قبل از امید
۱۶	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	نسل چهارم قبل از امید
۳۲	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	نسل هفتم قبل از امید

۲- یک کاغذ را چند بار تا می‌زنیم و هر بار تعداد قسمت‌هایی را که کاغذ تقسیم شده است، می‌شماریم. چه الگویی در تعداد

قسمت‌ها می‌بینید؟

۸۴



تعداد تا .
تعداد قسمت‌ها ۱ ۲ 2×2 $2 \times 2 \times 2$ $2 \times 2 \times 2 \times 2$

اگر تا زدن را به همین ترتیب ادامه دهیم، در تای هشتم چند قسمت خواهیم داشت؟

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$$

در تای دهم چند قسمت خواهیم داشت؟

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1024$$

در تای n چند قسمت خواهیم داشت؟

$$2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$$

چه راهی برای خلاصه کردن عبارت‌های بالا پیشنهاد می‌کنید؟

(با توجه به اینکه در عمل، تا کردن کاغذ تا چند مرحله بیشتر ممکن نخواهد بود، برای یافتن جواب‌ها از شکل‌های داده شده استفاده کنید.)

عبارتی مانند $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ را در ریاضیات برای ساده‌تر شدن به صورت 2^5 می‌نویسیم و آن را چنین می‌خوانیم: ۲ به توان ۵.

در عبارت 2^5 ، ۲ را **پایه** و ۵ را **توان** می‌نامیم. درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می‌دادیم.

$$(2+2+2+2+2 = 5 \times 2)$$

۸۵

عبارت	شکل ساده شده	خواننده می‌شود	حاصل
7×7	7^2	هفت به توان ۲	۴۹
$7 + 7$	2×7	۲ ضربدر ۷	۱۴
$2/5 \times 2/5 \times 2/5$	$2/5^3$	۲/۵ به توان ۳	۱۵/۶۲۵
$1 \times 1 \times 1$	1^3	۱ به توان ۳	۱
$1 + 1$	2×1	۲ ضربدر ۱	۲
$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3})^2$	۵/۳ به توان ۲	۲۵/۹

۱- جدول مقابل را کامل کنید.

پس از آن عبارت‌های زیر را به صورت ساده شده بنویسید.

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

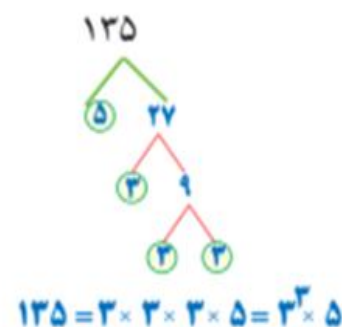
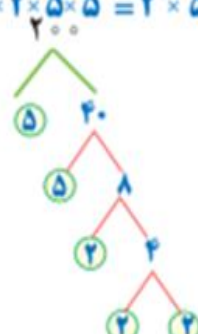
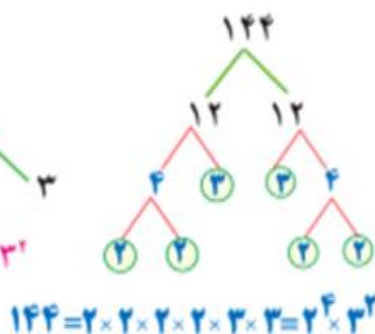
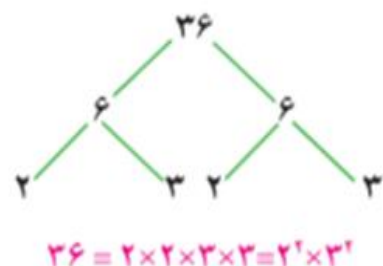
$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^6$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$$

$$a \times a \times a = a^3 \quad b \times b = b^2$$

۲- عددهای داده شده را مانند نمونه تجزیه کنید و به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 5^2$$



۸۵

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ در صورت امکان موارد نادرست را اصلاح کنید.

$4^2 = 64$ ✗

$4 \times 4 = 16$

$5^2 = 5 \times 2$ ✗

$5 \times 5 = 25$

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}$ ✓

$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$9^2 = 18$ ✗

$9 \times 9 = 81$

$(\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{81}$ ✗

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$

$\frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}$

$\frac{3^2}{5} = \frac{9}{25}$ ✗

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$5^2 = 2^5$ ✗

$5 \times 5 = 25$

$(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{4}$ ✗

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$a \times a \times a \times a = a^4$

$b^2 = b \times b \times b$

۴- تساوی‌ها را کامل کنید

$\frac{a \times a \times a}{b} = \frac{a^3}{b}$

$x \times x = x^2$

$(\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$

$(ab)^2 = ab \times ab$

$\frac{x \times x \times x}{y \times y \times y \times y \times y} = \frac{x^3}{y^5}$

$(y+x)(y+x) = (y+x)^2$

۵- در تکثیر سلول‌ها، هر سلول به ۲ سلول تقسیم می‌شود. دوباره هر کدام از آن سلول‌ها خودشان به ۲ سلول تقسیم می‌شوند و

۸۵

این کار ادامه پیدا می‌کند. جدول زیر را کامل کنید و حاصل را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

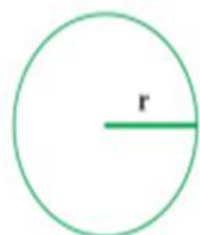
مرحله تکثیر	۱	۲	۳	۴		۷		n
تعداد سلول	۲	2×2	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	...		...	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots \times 2$
به صورت توان‌دار	2^1	2^2	2^3	2^4		2^7		2^n

۸۶

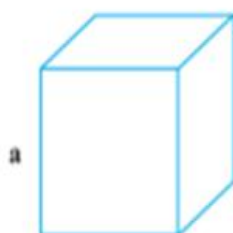
۱- با توجه به شکل‌های زیر مساحت و حجم‌های خواسته شده را با عبارت‌های توان‌دار جبری نمایش دهید.



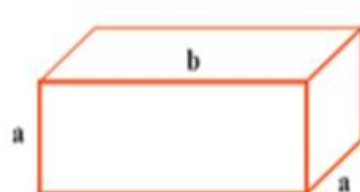
$S = a \times a = a^2$



$S = 2/1 \times r \times r = \pi r^2$



$V = a \times a \times a = a^3$



$V = a \times a \times b = a^2 b$



۲- جمله‌های کلامی زیر را به صورت عبارت جبری نشان دهید.

$$a^1 = a$$

□ هر عدد به توان یک برابر خودش می‌شود :

$$1^a = 1$$

□ یک به توان هر عدد برابر یک می‌شود :

$$a^2 = \text{مجدور } a$$

□ مجذور هر عدد؛ یعنی آن عدد به توان ۲ :

$$a^3 = \text{مکعب } a$$

□ مکعب یک عدد؛ یعنی آن عدد به توان ۳ :

$$0^a = 0$$

□ صفر به توان هر عدد به جز صفر برابر است با :

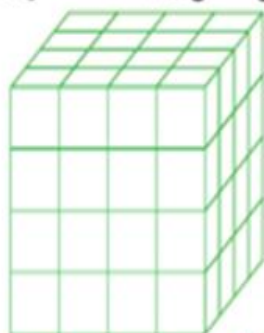
۳- تعداد مکعب‌های کوچک $1 \times 1 \times 1$ را در هر شکل با یک عدد توان‌دار نشان دهید.



$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$



$$3 \times 3 \times 3 = 3^3$$



$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

مکعب n تایی

$$n \times n \times n = n^3$$

۴- حاصل هر عبارت توان‌دار را به دست آورید.

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$6^2 = 6 \times 6 = 36$$

$$7^2 = 7 \times 7 = 49$$

$$8^2 = 8 \times 8 = 64$$

$$9^2 = 9 \times 9 = 81$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$11^2 = 11 \times 11 = 121$$

$$12^2 = 12 \times 12 = 144$$

$$2^2 = 4 \text{ مجذور دو}$$

$$1^2 = 1 \text{ مجذور یک}$$

$$2^3 = 8 \text{ مکعب دو}$$

$$1^3 = 1 \text{ مکعب یک}$$

$$\frac{2^3}{5^2} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5} = \frac{8}{25}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{2^4}{7} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{7} = \frac{16}{7}$$

$$0/2^2 = 0/2 \times 0/2 = 0/4$$

$$0/0/1^2 = 0/0/1 \times 0/0/1 = 0/0001$$

$$1/1^2 = 1/1 \times 1/1 = 1/1$$

$$2/1^2 = 2/1 \times 2/1 = 4/1$$

$$0/5^2 = 0/5 \times 0/5 = 0/25$$

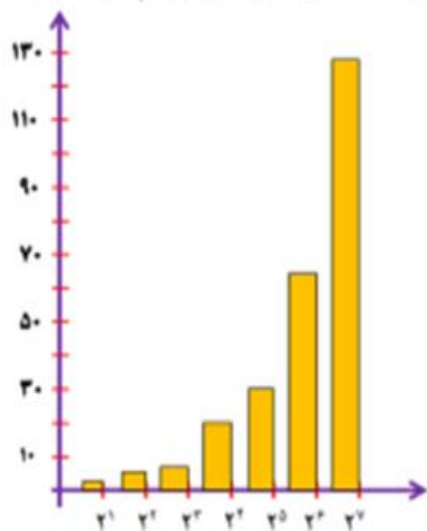
۵- مقدار عبارت 3^n را به ازای عددهای داده شده به دست آورید.

۸۶

n	۱	۲	۳	۴
3^n	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$

۶- حاصل عددهای $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ را به دست آورید و به صورت نمودار ستونی در دفتر خود رسم کنید (باید واحد مناسبی

برای محور عمودی رسم کنید). در مورد شیوه رسم هر ستون توضیح دهید، آیا می‌توانید 2^6 یا 2^7 را در دفتر خود رسم کنید؟ چرا؟



$$\begin{aligned} 2^1 &= 2 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^4 &= 16 \\ 2^5 &= 32 \\ 2^6 &= 64 \\ 2^7 &= 128 \end{aligned}$$

۷- عدد 10^{12} به طور تقریبی چند رقمی است؟ چرا؟ **۱۳ رقمی**

$$10^{12} = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10}_{12 \text{ بار}} = 10 \dots \dots \dots$$

۸۷

محاسبه عبارت توان دار

فعالیت

ترتیب انجام عملیات را در دوره دبستان آموخته‌اید. با توجه به درس توان، ترتیب انجام دادن عملیات مختلف ریاضی به صورت

(۱) برانتز (۲) توان (۳) ضرب و تقسیم (۴) جمع و تفریق انجام می‌شود.

با کامل کردن مراحل محاسبه عبارت و همچنین ترتیب انجام عملیات و نحوه نوشتن راه حل توجه کنید.

$$\frac{2^3 \times 4 + 10}{9^2 - 5^2} = \frac{8 \times 4 + 10}{81 - 25} = \frac{32 + 10}{56} = \frac{42}{56} = \frac{3}{4}$$

محاسبه توان‌ها محاسبه ضرب محاسبه جمع و تفریق ساده کردن

$$2 \times 3^2 - (2^2 + 2) = 2 \times 9 - (4 + 2) = 18 - 6 = 12$$

$$\frac{10 \div (8 - 6) + 9 \times 4}{25 + 35} = \frac{10 \div 2 + 9 \times 4}{32 + 243} = \frac{5 + 36}{275} = \frac{41}{275}$$

۱- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

۸۷

$2^5 + 3^2 = 32 + 9 = 41$

$2^5 \times 3^2 = 32 \times 9 = 288$

$2^5 - 3^2 = 32 - 9 = 23$

$2^5 \div 8 = 32 \div 8 = 4$

$(\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$5^2 - 5 \times 2 = 25 - 10 = 15$

$(\frac{5}{2})^2 - (\frac{2}{5})^2 = \frac{25}{4} - \frac{4}{25} = \frac{609}{100}$

$\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$2^2 - 3^2 + 1^5 = 4 - 9 + 1 = -4$

$5^1 + 1^5 + 0^5 = 5 + 1 + 0 = 6$

$5^2 = 25$

$4 + 9 = 13$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$(3+2)^2 = 2^2 + 3^2$ ✗

$12^2 = 144$

$(4 \times 3)^2 = 3^2 \times 4^2$ ✓

$9 \times 16 = 144$

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{22}{32}$ ✗

$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$5 \times 36 = 180$

$5 \times 6^2 = (6 \times 5)^2$ ✗

$3^2 = 30 \times 30 = 900$

$4 \times 25 = 100$

$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

$8 \times 16 = 128$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$

$2^2 \times 5^2 = 10^2$ ✗

$2^2 \times 2^2 = 2^4$ ✓

۸۷

۲۵۶

۶۴

۳- روش محاسبه را توضیح دهید.

$2^8 + 8^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 8 \times 8 = 320$

۸۸

۱- مانند نمونه عبارت‌های توان‌دار را حساب کنید.

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$

$(-2)^3 =$

$(-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$

$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$

$(-2)^6 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +64$

با توجه به توان‌ها و حاصل عبارت‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر یک عدد منفی به توان فرد برسد حاصل آن منفی خواهد شد

اگر یک عدد منفی به توان زوج برسد حاصل آن مثبت خواهد شد

۲- عبارت‌های زیر را حساب کنید.



فعالیت

$$-2^2 = -(2 \times 2 \times 2) = -8$$

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

۳- الگوی عددی زیر را کامل کنید.

$$2^6 \longrightarrow 2^5 \longrightarrow 2^4 \longrightarrow 2^3 \longrightarrow 2^2 \longrightarrow 2^1 \longrightarrow 2^0$$

$$64 \longrightarrow 32 \longrightarrow 16 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

ارتباط بین عددهای توان‌دار و حاصل آنها را توضیح دهید. $2^0 = 1$

به نظر شما در جای خالی چه عددی باید نوشت؟ اگر از توانها یکی یکی کم کنیم مثل آن است که آن عدد بر ۲ تقسیم می شود



$$-3^2 = -(3 \times 3) = -9$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = +25$$

$$7^0 = 1$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$-1^5 = -(1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1) = -1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

$$(-2)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

$$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

$$(-9)^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

$$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$$

$$0^5 + 1/1^0 = 0 + 1 = 1$$

$$-1^2 = -(1 \times 1 \times 1 \times 1) = -1$$

$$4 + 2^0 = 4 + 1 = 5$$

۲- در جای خالی علامت < یا = یا > بگذارید.

$$1^0 < 2^1$$

$$1^0 < 7^1$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 < 2^1$$

$$(-2)^0 = (-2)^1$$

۱- کدام درست و کدام نادرست اند؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

$$(3+2)^0 = 2^0 + 3^0 \quad \times$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^0 > \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \quad \checkmark$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 > 1$$

$$4 + 2^0 = 6 \quad \times \quad 4+1=5$$

$$2^0 + 3^0 + 5^0 = 1 \quad \times \quad 1+1+1=3$$

$$4^0 < (-2)^2 \quad \checkmark \quad (-2) \times (-2) = +4$$

۲- الف) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$2 \times 10^2 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0 = 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 7 \times 10 + 2 \times 1 = 2471$$

$$5 \times 10^2 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 5 \times 1000 + 0 \times 100 + 1 \times 10 + 9 \times 1 = 5019$$

ب) با توجه به تمرین‌های بالا عددهای زیر را به صورت گسترده و سپس به صورت توانی نمایش دهید.

$$4235 = 4000 + 200 + 30 + 5 = 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$9207 = 9 \times 1000 + 2 \times 100 + 0 \times 10 + 7 \times 1 = 9 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

۳- به جای n عددهای ۱ تا ۵ را قرار دهید و در عبارت 4^n و n^4 را با هم مقایسه کنید. برای محاسبات از ماشین حساب استفاده کنید.

n	۱	۲	۳	۴	۵
4^n	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$
n^4	$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$

برای $n=10$ کدام یک بزرگ‌تر از دیگری است؟ 4^{11} بزرگ‌تر می‌شود

۴- در بعضی از ماشین حساب‌ها کلید توان به صورت زیر استفاده می‌شود. عددهای توان‌دار را محاسبه می‌کنند. برای مثال

2^3 به صورت زیر محاسبه می‌شود. حالا شما عددهای مختلف را در ماشین حساب وارد و حاصل آنها را ملاحظه کنید. چه راه دیگری

برای پیدا کردن جواب 2^3 وجود دارد؟ $2 \times = =$



در ماشین حساب‌های ساده که کلید توان ندارند.

$$a^2 - b^2 + ab \quad a = -2 \quad b = 2$$

$$(-2)^2 - 2^2 + (-2 \times 2) =$$

$$4 - 4 + (-4) = -4$$

$$a^2 - 2b^2 + a^2b \quad a = 1 \quad b = -2$$

$$1^2 - 2 \times (-2)^2 + (1)^2 \times (-2) =$$

$$1 - 2 \times 4 + 1 \times -2 = 1 - 8 - 2 = -9$$

ساده کردن عبارت‌های توان دار

۱- زهره می‌خواست مسئله‌هایی را که معلم برای تمرین تعیین کرده بود، حل کند. معلم ریاضی خواسته بود که دانش‌آموزان مساحت مستطیل به طول 2^4 و عرض 2^3 را به دست آورند. زهره به صورت زیر عمل کرد و عبارت‌ها را به صورت ضرب نوشت.

$$S = a \times b = 2^4 \times 2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{مرتبۀ ۴}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{مرتبۀ ۳}}$$

سیما با مشاهده عبارت زهره به او گفت: هفت تا ۲ ضرب شده است. پس عبارت تو با 2^7 برابر است. نتیجه‌گیری سیما را با یک

$$2^4 \times 2^3 = 2^7$$

تساوی نشان دهید.

$$5^2 \times 5^2 = \underbrace{5 \times 5}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{5 \times 5}_{\text{مرتبۀ ۲}} = 5^4$$

۲- مانند نمونه عمل کنید.

$$4^2 \times 4^3 = 4^5$$

$$7^2 \times 7^2 = 7^4$$

$$x^2 \times x^2 = x^4$$

$$a^2 \times a^2 = a^4$$

با توجه به تساوی‌های بالا یک رابطه برای ساده کردن ضرب عبارت‌های توان دار با پایه‌های مساوی بنویسید.

در ضرب اعداد تواندار با پایه‌های مساوی یکی از پایه‌ها را نوشته و توانها را با هم جمع می‌کنیم

۳- با توجه به رابطه بالا، مانند نمونه عبارت توان دار را به صورت ضرب ۲ یا چند عبارت توان دار بنویسید.

$$2^7 = 2^5 \times 2^2$$

$$2^7 = 2^4 \times 2^3$$

$$2^7 = 2^3 \times 2^1 \times 2^3$$

$$5^1 = 5^2 \times 5^2$$

$$5^1 = 5^3 \times 5^4$$

$$5^1 = 5^2 \times 5^4 \times 5^3$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$$5^2 \times 5^2 = 5^4$$

$$(-2)^2 \times (-2)^2 = (-2)^4$$

$$(-4)^1 \times (-4)^5 = (-4)^6$$

$$7^2 \times 7^1 = 7^3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{10}\right)^5$$

$$\frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{20}\right)^4$$

۲- با باز کردن عبارت توان‌دار، جواب را ساده‌تر کنید و محاسبات را مانند نمونه پاسخ دهید.

$$3^2 = 3^2 \times 3^2 = 9 \times 9 = 9^2 \quad 2^6 = 2^2 \times 2^2 = 8 \times 8 = 8^2 \quad 4^2 = 4^2 \times 4^2 = 16 \times 16 = 16^2 \quad 5^2 = 5^2 \times 5^2 = 25 \times 25 = 25^2$$

$$2^{12} = 2^{10} \times 2^2$$

۳- اگر $2^{10} = 1024$ باشد حاصل 2^{12} را به دست آورید.

$$1024 \times 4 = 4096$$

۱- مانند نمونه عبارت‌ها را باز کنید و دوباره به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$2^2 \times 5^2 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 10 \times 10 = 10^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 5^2 = \left(\frac{10}{9}\right)^3$$

$$3^2 \times 4^2 = 12^2$$

$$a^2 \times b^2 = (ab)^2$$

$$x^2 \times y^2 = (xy)^2$$

با مقایسه تساوی‌ها یک قانون کلامی برای ساده کردن عبارت‌های توان‌دار با توان‌های مساوی به دست آورید.

در ضرب اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی یکی از توانها را نوشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم

۲- با قانونی که به دست آوردید، عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$2^2 \times 3^2 = 6^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \left(\frac{6}{12}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 3^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$(-2)^5 \times (-1)^5 = (+2)^5$$

$$(-2)^5 \times 3^5 = (-6)^5$$

$$x^2 \times y^2 = (xy)^2$$

۹۱

$$(ab)^r = a^r \times b^r$$

$$6^5 = (2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$$

۳- به تساوی های روبه رو توجه کنید.

مانند نمونه های بالا عددهای توان دار زیر را باز کنید.

$$15^7 = 3^7 \times 5^7$$

$$10^4 = 2^4 \times 5^4$$

$$12^8 = 3^8 \times 4^8$$

$$(xv)^{10} = x^{10} \times v^{10}$$

$$(xvz)^8 = x^8 \times v^8 \times z^8$$

$$30^5 = 3^5 \times 10^5$$

۱- مانند نمونه عبارت های توان دار را تا جایی که ممکن است ساده کنید.

$$5^7 \times 5^7 \times 7^6 = 5^6 \times 7^6 = 35^6$$

$$7^2 \times 7^2 \times 9^5 = 7^4 \times 9^5 = 63^5$$

ضرب با توان های مساوی ضرب با پایه های مساوی

$$2^2 \times 6^2 \times 3^2 \times 4^2 = 12^2 \times 12^2 = 12^{10}$$

$$(2^5 \times 3^2 \times 5) \times (2^2 \times 3^5 \times 5^2) = 2^7 \times 3^7 \times 5^3 = 30^7$$

$$2^a \times 2^b = 2^{a+b}$$

۲- عبارت توان دار مقابل را تا جایی که ممکن است، ساده کنید.

به جای a و b عددهای ۳ و ۵ و یک بار ۴ و ۷ قرار دهید و تساوی ها را به صورت عددی بنویسید.

$$2^3 \times 2^5 = 2^8$$

$$2^4 \times 2^7 = 2^{11}$$

۹۲

$$a^b \times a^c = a^{b+c}$$

$$2^3 \times 2^4 = 2^7$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 3 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

$$a^c \times b^c = (a \times b)^c$$

$$5^3 \times 2^3 = 10^3$$

$$\begin{aligned} a &= 5 \\ b &= 2 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

۱- در تساوی های زیر به جای a و b و c عددهای مختلفی قرار دهید و تساوی های عددی بسازید.

۲- با استفاده از تجزیه به عددهای اول، هر عدد را به صورت توان دار بنویسید.

$$121 = 11^2$$

$$256 = 2^8$$

$$441 = 3^2 \times 7^2$$

$$10000 = 2^4 \times 5^4$$

۹۲

(ج) 5^2 باشد.

(ب) 2×3

(الف) 2^2

۳- مسئله‌هایی طرح کنید که پاسخ آنها:

حجم مکعبی با ضلع ۲ سانتی متر را بدست آورید؟

مساحت مستطیلی به طول ۳ و عرض ۲ را بدست آورید؟

مساحت مربعی به ضلع ۵ را بدست آورید؟

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

$$1 \quad 8 \quad 9 \times 9 = 81$$

۴- عددهای توان دار را از کوچک به بزرگ مرتب کنید. 9^2 و 8^1 و 6^0 و 4^{10} و 3^5

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1048576$$

$$6^0, 8^1, 9^2, 3^5, 4^{10}$$

۵- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ توضیح دهید.

$$4^2 \times 4^2 = 4^{12} \quad \times$$

$$3^2 \times 2^2 = 6^5 \quad \times$$

$$4^2 + 2^2 = 6^2 \quad \times$$

$$4^2 \times 4^2 = 4^4 \quad \checkmark$$

$$3^2 \times 2^2 = 6^2 \quad \checkmark$$

$$4^1 + 3^1 = 7^1 \quad \checkmark$$

$$(-2^2) \times 7^2 = (-14)^2 \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^7 \quad \checkmark$$

۹۲

۶- کدام یک از عبارت‌های زیر $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ را نشان می‌دهد؟

$$\checkmark \quad \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{2+2+2}{3}$$

$$\frac{3 \times 2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \times 3$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} + 3$$

۷- به جدول زیر توجه کنید و با توجه به آن سؤال‌ها را جواب دهید.

4^0	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6	4^7	4^8	4^9	4^{10}	4^{11}	4^{12}
۱	۴	۱۶	۶۴	۲۵۶	۱۰۲۴	۴۰۹۶	۱۶۳۸۴	۶۵۵۳۶				

۱ تعداد رقم ۱ ۲ ۲ ۳ ۴ ۴ ۵ ۵ ۶ ۷ ۷ ۸

$$4^6 \times 4^1 = 4^7$$

حاصل عبارت $4^9 \times 65536$ را به صورت توان دار بنویسید.

۱۳ رقمی

۷ رقمی

تعداد رقم‌های 4^{10} را پیش‌بینی کنید. فکر می‌کنید 4^{12} چند رقمی می‌شود؟ چرا؟

با توجه به الگویی که در زیر جدول نوشته شده است.

۸- جاهای خالی را کامل کنید. چه الگویی مشاهده می کنید؟ یک تساوی دیگر بنویسید.

$$3^2 - 1^2 = (2)^2 \quad 6^2 - 3^2 = (3)^2 \quad 10^2 - 6^2 = (4)^2 \quad 15^2 - 10^2 = (5)^2 \quad 21^2 - 15^2 = (6)^2$$

$$15^2 - 10^2 = 5^2$$

آیا این الگو برای $3^2 - 1^2 = 2^2$ درست است؟ **خیر**

۹- در جای خالی یکی از عمل های + یا - یا $\times$ یا $\div$ را قرار دهید تا تساوی برقرار باشد.

$$2^5 \div 8 = 4$$

$$3^2 + 7^2 = 58$$

$$(-7)^0 + 8^1 = 3^2$$

$$2^6 \div 16 = 2^0 \times 2^2$$

جذر و ریشه

۲- مساحت یک زمین بازی کودکان که به شکل مربع است، برابر ۱۴۴ متر مربع است. طول ضلع این مربع چند متر است؟ **۱۲**

چه عددی ضربدر خودش می شود ۱۴۴؟

۱- یک شرکت برای محوطه سازی، سنگ های مرمر در اندازه های 25×50 سانتی متر خریده است. این شرکت در مجموع ۸۱

متر مربع سنگ برای این کار خریده است. ضلع بزرگ ترین مربعی که می توان با این سنگ ها ساخت چند متر است؟ **۹ متر**

۳- جدول زیر طول ضلع تعدادی مربع و مساحت آنها داده شده است. جاهای خالی را کامل کنید.

طول ضلع	۳	۴	$1/5$	$2/5$	۹	$7/4$	$11/6$	۲۰	$0/9$
مساحت مربع	۹	۱۶	$2/25$	$4/25$	۸۱	$54/76$	$121/36$	۴۰۰	$0/81$

۴- در الگوی عددی زیر آیا عدد ۱۵ قرار می‌گیرد؟ چرا؟

خیر، با توجه به پاسخ‌ها عدد ۱۵ متعلق به این مجموعه نیست

با کمک ماشین حساب و راهبرد حدس و آزمایش، عددی پیدا کنید که بتوان به جای x قرار داد.

$$x^2 = 15$$

باید عددی را پیدا کنیم که اگر در خودش ضرب گردد مساوی ۱۵ شود و آن عدد مسلماً یک عدد اعشاری است

در تساوی $3^2 = 9$ ، عدد ۹ را توان دوم یا مجذور عدد ۳ و عدد ۳ را نیز **ریشه دوم** یا **جذر** ۹ می‌نامند. آیا ۳- نیز ریشه دوم ۹ است؟ چرا؟

جدول زیر را کامل کنید.

عدد	۹	۲۵	$\frac{1}{4}$	۴۹
ریشه دوم	۳ و ۳-	۵ ، -۵	$\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$	۷ و ۷-
رابطه ریاضی	$(-3)^2 = 9$ $3^2 = 9$	$5^2 = 25$ $(-5)^2 = 25$	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ $(-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$	$7^2 = 49$ $(-7)^2 = 49$

توان دوم یا مجذور عدد ۳ را با 3^2 و توان دوم یا مجذور عدد ۳- را با $(-3)^2$ نمایش می‌دهیم. برای نمایش ریشه دوم مثبت از نماد $\sqrt{\quad}$ (بخوانید **رادیکال**) استفاده می‌کنیم.

ریشه‌های دوم عدد ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر $\sqrt{9} = 3$ و $-\sqrt{9} = -3$.

۱- تساوی‌ها را کامل کنید.

$$\sqrt{16} = 4$$

$$-\sqrt{16} = -4$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$-\sqrt{81} = -9$$

$$\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$$

$$-\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست اند؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

۹۴

$$\sqrt{25} > 5 \quad \times$$

$$\sqrt{25} = 25 \quad \times$$

$$\sqrt{25} = 5 \quad \checkmark$$

$$\sqrt{25} = -5 \quad \times$$

$$5 = 10$$

$$\sqrt{25} = 5 \times 2 \quad \times$$

$$-\sqrt{25} = -5 \quad \checkmark$$

$$5 = 32$$

$$\sqrt{25} = 25 \quad \times$$

$$\sqrt{25} < 5 \quad \times$$

۱- در شکل زیر، مربع‌هایی با مساحت ۸۰۴ و ۹ نمایش داده شده‌اند. طول ضلع‌های مربع‌ها نیز مشخص شده است. با کمک شکل



عبارت را کامل کنید. $\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$

به نظر شما عدد $\sqrt{8}$ به کدام یک از این دو عدد نزدیک‌تر است؟ $\sqrt{9}$

۲- به کمک روش بالا و با توجه به سطر اول جدول زیر، جذر تقریبی عددهای داده شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

جذر تقریبی	مربع کامل بعدی	عدد	مربع کامل قبلی
$\sqrt{5}$ بین عددهای ۲ و ۳ است	۹	۵	۴
$\sqrt{17}$ بین عددهای ۴ و ۵ است	۲۵	۱۷	۱۶
$\sqrt{61}$ بین عددهای ۴ و ۵ است	۶۴	۶۱	۴۹
$\sqrt{30}$ بین عددهای ۵ و ۶ است	۳۶	۳۰	۲۵

۹۵

۱- می‌خواهیم مقدار تقریبی $\sqrt{28}$ را به دست آوریم.

الف) $\sqrt{28}$ بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد؟ چرا؟

$$\sqrt{25} < \sqrt{28} < \sqrt{36}$$

$$5 < \sqrt{28} < 6$$

ب) به کدام یک نزدیک‌تر است؟ چرا؟ **زیرا اختلاف کمتری با آن دارد**

$$\sqrt{28} \approx 5/3$$

ج) با توجه به جدول زیر جای خالی را کامل کنید:

هر مجذوری که به عدد ۲۸ نزدیکتر باشد پاسخ مورد نظر ماست

عدد	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
مجذور	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶

۲- به همین روش مقدار تقریبی عددهای زیر را به دست آورید.

۹۵

$$\sqrt{20} \approx 4/5 \quad \sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$$

پس عددهای مود نظر ما بین ۴ تا ۴/۵ باشد

عدد	۴/۱	۴/۲	۴/۳	۴/۴	۴/۵
مجدور	۱۶/۸۱	۱۷/۶۴	۱۸/۴۹	۱۹/۳۶	۲۰/۲۵

$$\sqrt{14} \approx 3/7 \quad \sqrt{9} < \sqrt{14} < \sqrt{16}$$

پس عددهای مود نظر ما بین ۳/۵ تا ۴ باشد

عدد	۳/۵	۳/۶	۳/۷	۳/۸	۳/۹
مجدور	۱۲/۲۵	۱۲/۹۶	۱۳/۶۹	۱۴/۴۴	۱۵/۲۱

$$\sqrt{8} \approx 2/8 \quad \sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$$

پس عددهای مود نظر ما بین ۲/۵ تا ۳ باشد

عدد	۲/۵	۲/۶	۲/۷	۲/۸	۲/۹
مجدور	۶/۲۵	۶/۷۶	۷/۲۹	۷/۸۴	۸/۴۱

۹۵

۱- چرا عددهای منفی جذر ندارند؟ یعنی عبارت مقابل بی معناست؟ $\sqrt{-25} = ?$

زیرا هیچ عدد صحیحی را نمی توان یافت که اگر در خودش ضرب شود مساوی عددی منفی شود

تقریب

به عنوان مثال:

$$-2 \times -2 = +4$$

$$+4 \times +4 = +4$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست اند؟

$$\sqrt{5} > 4 \quad \times$$

$$\sqrt{6} \text{ بین } 5 \text{ و } 7 \text{ است} \quad \times$$

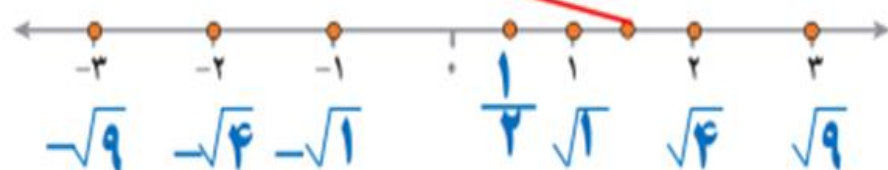
$$\sqrt{15} < \sqrt{21} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{12} < 4 \quad \checkmark$$

$$\sqrt{40} \text{ بین } 5 \text{ و } 7 \text{ است} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{3} > 2 \quad \times$$

۳- به جای در محور اعداد زیر یکی از عددهای $\sqrt{9}$ ، $-\sqrt{4}$ ، $\sqrt{1}$ ، $-\sqrt{1}$ ، $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ، $\sqrt{\frac{9}{4}}$ و $-\sqrt{9}$ را قرار دهید.



۴- جاهای خالی را کامل کنید.

الف) ۷ و -۷ ریشه‌های ۴۹ هستند. ب) مجذور عدد صفر همان صفر است.

ج) اگر عددی صفر نباشد، توان دوم آن همیشه مثبت است.

د) هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه دوم است که یکی از آنها قرینه‌ی دیگری است.

۵- مقدار تقریبی عددهای زیر را به دست آورید.

عدد	$\frac{31}{5}$	$\frac{31}{6}$	$\frac{31}{7}$	$\frac{31}{8}$	$\frac{31}{9}$
مجذور	$\frac{992}{25}$	$\frac{998}{56}$	$\frac{1069}{29}$	$\frac{1075}{84}$	$\frac{1082}{41}$

عدد	$\frac{22}{1}$	$\frac{22}{2}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{22}{4}$	$\frac{22}{5}$
مجذور	$\frac{488}{41}$	$\frac{492}{84}$	$\frac{497}{29}$	$\frac{501}{76}$	$\frac{506}{25}$

عدد	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$
مجذور	$\frac{26}{01}$	$\frac{27}{04}$	$\frac{28}{09}$	$\frac{29}{16}$	$\frac{30}{25}$

عدد	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$
مجذور	$\frac{37}{21}$	$\frac{38}{44}$	$\frac{39}{69}$	$\frac{40}{96}$	$\frac{42}{25}$

$$\sqrt{1000} \approx \frac{31}{6} \quad \sqrt{\frac{961}{36}} < \sqrt{1000} < \sqrt{\frac{1024}{49}}$$

پس عدد مورد نظر ما بین $\frac{31}{6}$ تا $\frac{32}{7}$ باشد

$$\sqrt{500} \approx \frac{22}{4} \quad \sqrt{\frac{484}{16}} < \sqrt{500} < \sqrt{\frac{529}{25}}$$

پس عدد مورد نظر ما بین $\frac{22}{4}$ تا $\frac{23}{5}$ باشد

$$\sqrt{30} \approx \frac{5}{5} \quad \sqrt{\frac{25}{25}} < \sqrt{30} < \sqrt{\frac{36}{36}}$$

پس عدد مورد نظر ما بین $\frac{5}{5}$ تا $\frac{6}{6}$ باشد

$$\sqrt{40} \approx \frac{6}{3} \quad \sqrt{\frac{36}{9}} < \sqrt{40} < \sqrt{\frac{49}{49}}$$

پس عدد مورد نظر ما بین $\frac{6}{3}$ تا $\frac{7}{7}$ باشد

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید و برای هر کدام یک مثال بزنید.

● توان ● پایه ● مجذور ● مکعب ● جذر ● جذر تقریبی

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

● محاسبه عدد توان‌دار

● محاسبه یک عبارت توان‌دار با رعایت ترتیب

● محاسبه عبارت توان‌دار با پایه‌های منفی

● قانون ضرب با پایه‌های مساوی

● استفاده از قانون ضرب با پایه‌های مساوی در محاسبه

● قانون ضرب با توان‌های مساوی

● استفاده از قانون ضرب با پایه‌های مساوی در تجزیه عددها

● ساده کردن یک عبارت توان‌دار

● مفهوم جذر و ریشه

● پیدا کردن جذر یا ریشه عددهای مربع کامل و جذر تقریبی

از این درس در ساده کردن عبارت‌های جبری و نوشتن رابطه‌های ریاضی در محاسبه سطح و حجم استفاده می‌کنیم.

کاربرد

در صورتی که تمرین‌های ترکیبی زیر را بتوانید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

تمرین‌های ترکیبی

۱- عبارت توان‌دار زیر را محاسبه کنید.

$$36 \\ (2^2 + 0^2)^1 + 2^2 \times 3^2 - 1^2 = 8 + 0 + 4 \times 9 - 1 = 43$$

۲- عبارت توان‌دار را تا جایی که ممکن است، ساده کنید.

$$(0.25)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{45} = (0.25)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^6 \quad 4^2 \times 8^2 \times 6^2 \times 3^2 = 24^2 \times 24^2 = 24^4$$

۳- مقدار تقریبی عدد $\sqrt{32}$ را بنویسید.

$$5 \sqrt{25} < \sqrt{32} < 6 \sqrt{36}$$

$$\sqrt{32} \approx 5/7$$

پس عدد مورد نظر ما بین ۵/۵ تا ۶ باشد

عدد	۵/۵	۵/۶	۵/۷	۵/۸	۵/۹
مجذور	۳۰/۲۵	۳۱/۳۶	۳۲/۴۹	۳۳/۶۴	۳۴/۸۱

۴- ریشه‌های عدد ۱۲۱ را بنویسید و تساوی‌های زیر را کامل کنید. ۱۱ و ۱۱ -

$$\sqrt{121} = 11$$

$$-\sqrt{25} = -5$$

$$-\sqrt{121} = -11$$

$$\sqrt{49} = 7$$