فصل ۴ هندسه و استدلال

هدف کلی

آشنایی دانش آموزان با استدلال و نحوه بیان آن و اندازه گیری و یادآوری مطالب قبلی

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ پاره خط ها را نام گذاری کند و مقایسه کند

۲ روابط بین پاره خط ها را بشناسد

۳ با تبدیلات هندسی (انتقال، دوران و قرینه) شکل ها را جابجا کند

٤ شکل های هم نهشت را بشناسد و با توجه به تبدیلات، شکل های هم نهشت را رسم کند

hamgamdars.com | همگام درس دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

روابط بین پاره خطی

عناصر اصلی علم هندسه:

۱-نقطه ۲-خط ۳-زاویه ۴-سطح و حجم

نقطه: جزء مفاهیم تعریف نشده است.در اصطلاح اثر قلم بر روی کاغذ را نقطه می گویند و اندازه ندارد.

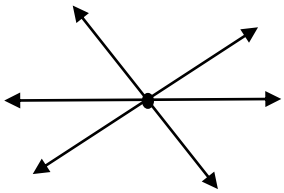
* **خط:** از کنار هم قرار گرفتن بی شمار نقطه، خط ایجاد می شود.

انواع خط:

۱-خط راست ۲-خط شکسته ۳-خط منحنی(خمیده)

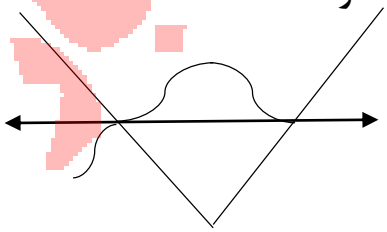
نکته: طبق قرارداد در کتابهای ریاضی منظور اگر خط راست باشد آن را خط می نامیم و انواع دیگر آن را با ذکر نوع خط مشخص می کنیم.

نکته: از یک نقطه بی شمار خط می گذرد.



نکته: از دو نقطه فقط یک خط راست (خط) می گذرد.

نکته: از دو نقطه بی شمار خط منحنی و بی شمار خط شکسته می گذرد.



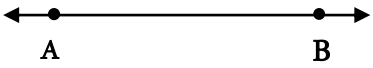
دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار
همگام درس | hamgamdars.com

* **نیم خط:** قسمتی از یک خط را که از یک طرف با یک نقطه محدود نماییم.یک نیم خط حاصل می شود.

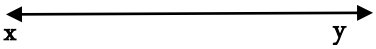
* **پاره خط:** هرگاه بخشی از یک خط را که بین دو نقطه از آن خط می باشد،محدود نماییم پاره خط ایجاد می شود.

نام گذاری در هندسه و ریاضیات

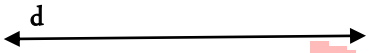
۱-در ریاضی و هندسه برای نام گذاری از حروف انگلیسی استفاده می کنیم.برای نام گذاری نقطه معمولا از شکل الفبای لاتین (حروف بزرگ) استفاده می کنیم مانند نقطه A یا نقطه B .



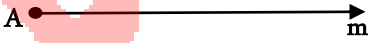
۲-برای نام گذاری خط از دو حرف کوچک استفاده می کنیم مانند خط xy یا yx



۳-گاهی خط با یک حرف کوچک نام گذاری می شود.

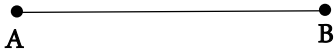


۴-برای نام گذاری نیم خط ابتدا طرف بسته آن را با حروف بزرگ سپس طرف باز آن را با حروف کوچک نام گذاری می کنیم مانند خط Am



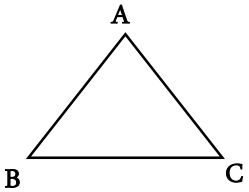
۵-برای نام گذاری پاره خط آن را با دو حرف ابتدا وانتها (حروف بزرگ) می نویسیم.

$\overline{AB}$ یا $\overline{BA}$

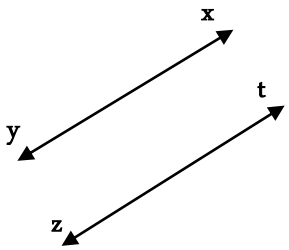


hamgamdars.com | همگام درس دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

۶-برای نام گذاری مثلث نام سه رأس آن را می نویسیم مثلا مثلث ABC و آن را به صورت $\triangle ABC$ یا $\triangle ABC$ نشان می دهیم.

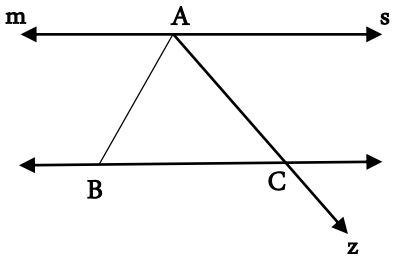


۷-درهندسه از علامت ($\parallel$) که نشان دهنده دو خط موازی است برای نشان دادن موازی بودن دو خط استفاده می شود.مثلا برای نوشتن موازی بودن دو خط xy و zt می نویسیم: خط xy موازی خط zt است



$xy \parallel zt$

مثال: با توجه به شکل مقابل و به کمک راهبرد الگوسازی پاسخ دهید



الف) تمام پاره خط ها را نام ببرید.

ب) تمام نیم خط ها را نام ببرید.

پ) تمام خط ها را بنویسید.

ت) موازی بودن دو خط را بنویسید.

اندازه گیری طول پاره خط

بین انواع خط فقط پاره خط را می توان اندازه گرفت و برای آن یک عدد به عنوان طول نوشت.

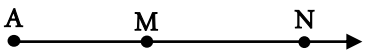
برای نشان دادن طول پاره AB از علامت $\overline{AB}$ استفاده می کنیم.

مثلاً $\overline{AB} = ۲$ cm و می خوانیم :طول پاره خط AB برابر با ۲ سانتی متر می باشد.

نکته: اندازه پاره خط AB برابر است با اندازه پاره خط BA یعنی $\overline{AB} = \overline{BA}$

hamgamdars.com | همگام درس
دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

مثال: در شکل مقابل:



الف) پاره خط ها را اندازه بگیرید و طول آن ها را به سانتی متر بنویسید.

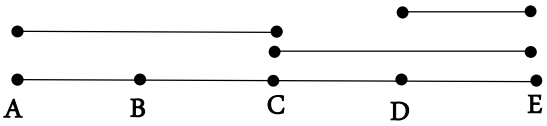
ب) با نوشتن اندازه ها درستی رابطه مقابل را بررسی کنید. $\overline{AM} + \overline{MN} = \overline{AN}$

پ) با توجه به طول پاره خط ها آن ها را با هم مقایسه کنید.

جمع و تفریق پاره خط ها

* برای جمع دو پاره خط آن ها را به دنبال هم قرار می دهیم و برای تفریق پاره خط ها، آن ها را روی هم قرار می دهیم تا حاصل مشخص شود.

مثال: حاصل هریک از تساوی های زیر را بدست آورید.



$AB + BC = AC$ و $CE - DE = CD$

نکته: اگر روی یک خط به تعداد n نقطه در نظر بگیریم تعداد پاره خط ها و نیم خط ها از روابط زیر بدست می آید.

تعداد پاره خط های تشکیل شده از n نقطه $= \frac{n\times(n-1)}{2}$

تعداد نیم خط های تشکیل شده از n نقطه $= 2\times n$

مثال: روی یک خط ۶ نقطه داریم، چند پاره خط و چند نیم خط می توانیم بنویسیم؟

تعداد پاره خط ها $= \frac{6\times(6-1)}{2} = \frac{6\times5}{2} = 15$

تعداد نیم خط ها $= 2 \times 6 = 12$

---

hamgamdars.com | همگام درس دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

آشنایی با نحوه استدلال در ریاضی

استدلال به معنی دلیل آوردن برای اثبات درستی یک مطلب می باشد و برای استدلال از مطالب که قبلاً خواندیم استفاده می کنیم و به نتیجه می رسیم.

مثال: مسئله زیر را با رابطه های ریاضی بنویسید و نتیجه را به فارسی بیان کنید.ا

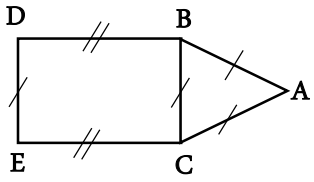
o

سن حسین (a) از سن محمد (b) بیشتر است و علی (c) هم سن حسین می باشد. بنابراین سن محمد از سن علی ____ است.

$$\left.\begin{matrix} a > b \\ c = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow c > b$$

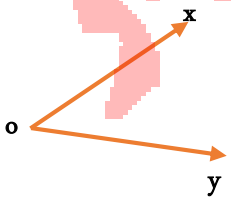
محمد — علی

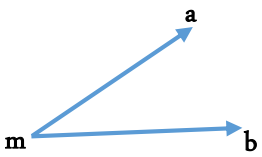
مثال: در شکل مقابل یک مستطیل و یک مثلث متساوی الاضلاع وجود دارد چرا $\overline{BD} > \overline{AB}$ است.



$$\left.\begin{matrix} \overline{BD} > \overline{BC} \\ \overline{BC} = \overline{AB} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{BD} > \overline{AB}$$

روابط بین زاویه ها: در دوره ابتدایی با شکل زاویه ،اندازه گیری و انواع زاویه (از نظر اندازه) همچنین با زاویه های متمم و مکمل آشنا شده اید.امسال بعد از یادآوری آن ها با روابط بین زاویه ها هم آشنا می شوید که عبارتند از: جمع و تفریق زاویه ها،رابطه های کوچک تری و بزرگ تری بین زاویه ها و نسبت زاویه ها





مقایسه دو زاویه:

با توجه به شکل مقابل زاویه $a\hat{m}b$ از زاویه $x\hat{o}y$ کوچکتر است.

$$x\hat{o}y > a\hat{m}b$$

دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار
همگام درس | hamgamdars.com

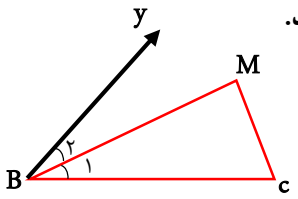
نام گذاری زاویه ها:

۱-با سه حرف $(x\hat{o}y)$ یا $(y\hat{o}x)$ طوریکه رأس وسط بیان شود.

۲-با نام رأس آن $\hat{o}$ یا $\hat{o}_1$

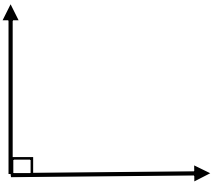
۳-با شماره آن

مثال: در شکل مقابل نام زاویه های خواسته شده را با سه حرف بنویسید.

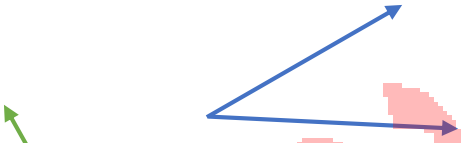


$\hat{B}_1$ = $\hat{B}_2$ = $\hat{M}$ =

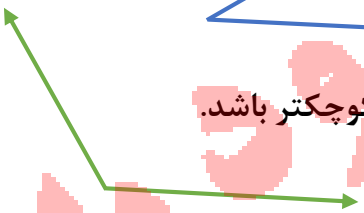
انواع زاویه:



الف) زاویه راست (قائمه): هر زاویه که اندازه آن ۹۰ درجه باشد.



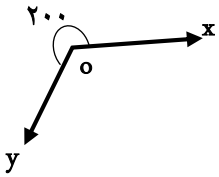
ب) زاویه تند (حاده): هر زاویه که از ۹۰ درجه کوچکتر باشد.



ج) زاویه باز (منفرجه): هر زاویه که از ۹۰ درجه بزرگتر و از ۱۸۰ درجه کوچکتر باشد.

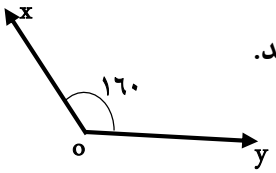
د) زاویه نیم صفحه تخت: هر زاویه که اندازه آن ۱۸۰ درجه باشد.

ث) زاویه مقعر (کاو): هر زاویه که اندازه آن بیشتر از ۱۸۰ درجه و کمتر از ۳۶۰ درجه باشد.

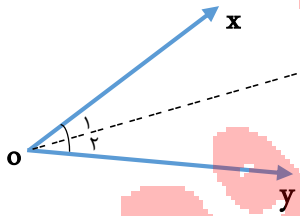


hamgamdars.com | همگام درس دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

ت) **زاویه محدب (کوژ):** هر زاویه که کمتر از ۱۸۰ درجه باشد.

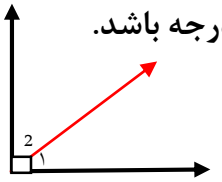


نکته: نیم ساز زاویه: نیم خطی است که از رأس رسم می شود و آن زاویه را به دو زاویه مساوی تقسیم می کند



$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

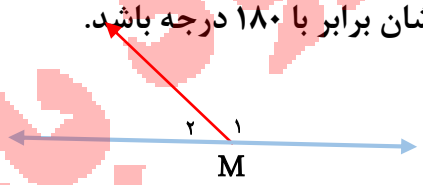
نکته: دو زاویه متمم: دو زاویه را متمم گویند هرگاه مجموعشان برابر با ۹۰ درجه باشد.



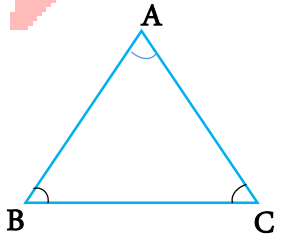
$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = ۹۰$

نکته: دو زاویه مکمل: دو زاویه را مکمل گویند هرگاه مجموعشان برابر با ۱۸۰ درجه باشد.

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = ۱۸۰$



نکته: مجموع زاویه های داخلی مثلث برابر با ۱۸۰ درجه می باشد.



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰$

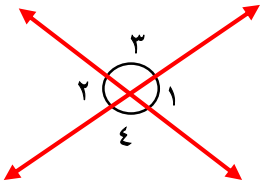
دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار
hamgamdars.com | همگام درس

نکته: در متوازی الاضلاع زاویه های مجاور کنار هم مکمل یکدیگرند.

$\hat{٤}+\hat{١}=١٨٠$ $\hat{٤}+\hat{٣}=١٨٠$ $\hat{٣}+\hat{٢}=١٨٠$ $\hat{٢}+\hat{١}=١٨٠$

دو زاویه متقابل به رأس:

دو زاویه که اضلاع آنها در امتداد یکدیگر و در رأس مشترک باشند را متقابل به رأس می نامیم، زاویه $\hat{١}$ و $\hat{٢}$ و زاویه $\hat{٣}$ و $\hat{٤}$ متقابل به رأس می باشند.

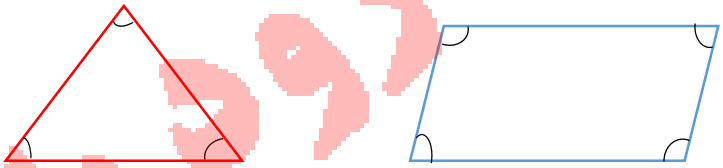


نکته: دو زاویه متقابل به رأس همیشه با هم برابرند.

$\hat{٤}=\hat{٣}$ $\hat{٢}=\hat{١}$

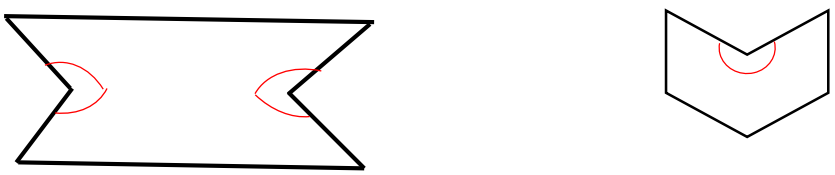
چند ضلعی های محدب:

یک چند ضلعی که هیچ کدام اززاویه های آن بزرگتر از ۱۸۰ نباشد، چند ضلعی محدب یا کوژ نام دارد.



چند ضلعی های مقعر:

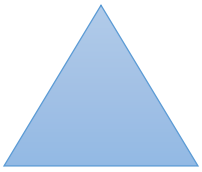
یک چند ضلعی که حداقل یک زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه داشته باشد، چند ضلعی مقعر یا کاو نام دارد.

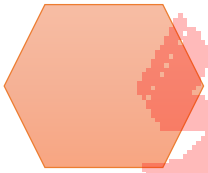


hamgamdars.com | همگام درس دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

چند ضلعی های منتظم:

به چند ضلعی محدبی که اندازه تمام زاویه های آن با هم و اندازه تمام ضلع های آن با هم برابر باشند، چند ضلعی منتظم می گوییم





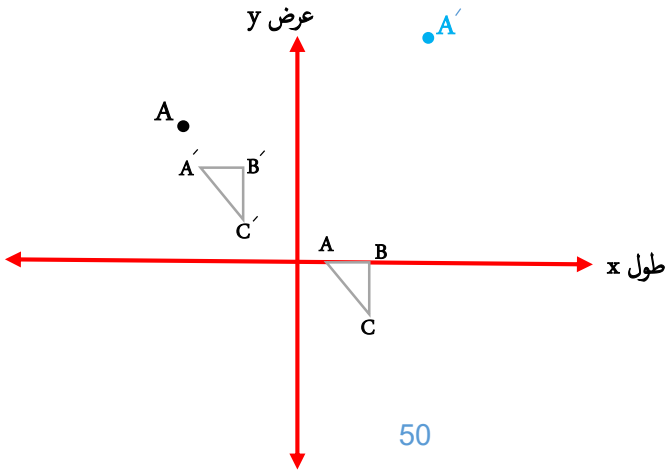
نکته:

در چند ضلعی منتظم هر چه تعداد ضلع ها بیشتر شود اندازه زاویه ها بزرگتر می شود و هرچه تعداد ضلع ها بیشتر شود شکل به دایره نزدیکتر می شود.

تبدیلات هندسی

۱-**انتقال:** نقطه A' را انتقال یافته نقطه A با مختصات $\begin{bmatrix}+۷\\+٤\end{bmatrix}$ می گوییم چون مکان نقطه A، ۷ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت بالا در صفحه مختصات جابجا شده و نقطه A' را ایجاد کرده است.به عبارت دیگر می توان گفت نقطه A تحت انتقال $\begin{bmatrix}+۷\\+٤\end{bmatrix}$ بر روی نقطه A' تصویر می شود.

۲-مثلث $A'B'C'$ را انتقال یافته مثلث A B C می گوییم چون همه نقاط به یک مختصات جابجا شده اند یعنی همه نقاط ۶ واحد به چپ و ۵ واحد به بالا انتقال پیدا کرده است و در نتیجه هرگاه انتقالی تحت $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ مختصات تمام نقاط شکل تحت یک مختصات انتقال پیدا کنند ۱ شکل انتقال یافته و در انتقال اندازه شکل و جهت شکل حفظ می شود.۲ پس می توان نتیجه گرفت محیط و مساحت آن ها نیز مساوی و برابر است.



دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار
همگام درس | hamgamdars.com

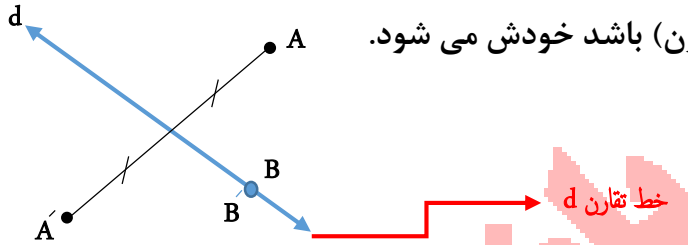
تقارن (بازتاب یا قرینه):

تقارن یا بازتاب به دو صورت است:

۱-تقارن نسبت به یک خط (تقارن محوری)

۲-تقارن نسبت به یک نقطه (تقارن مرکزی)

تقارن محوری تبدیلی است که به وسیله آن تصویر نقطه A(هر نقطه ای که روی خط تقارن نباشد) نسبت به خط d (خط تقارن) نقطه A' است به طوریکه خط d عمود منصف AA' می باشد.تصویر هر نقطه مانند Bکه روی محور تقارن (خط تقارن) باشد خودش می شود.



خط تقارن:

خطی که قرینه کردن (تقارن یا بازتاب) نسبت به آن انجام می شود را **خط تقارن** می گویند.

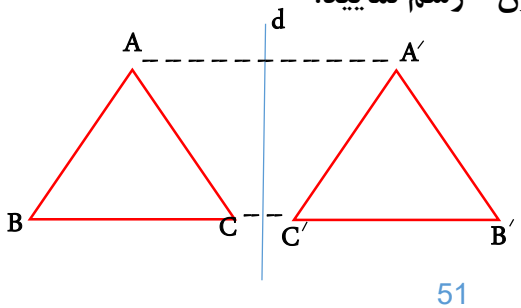
ویژگی های تقارن محوری:

۱-تقارن محوری طول پاره خط و ضلع را حفظ می کند.یعنی اندازه شکل اولیه با اندازه شکل قرینه شده برابر است (پس می توان نتیجه گرفت محیط و مساحت آن ها نیز باهم برابر است)

۲-تقارن جهت شکل را حفظ نمی کند(جهت شکل اولیه و شکل قرینه معمولا با هم متفاوت است)

۳-تقارن زاویه بین دو خط را حفظ می کند و ثابت نگه می دارد

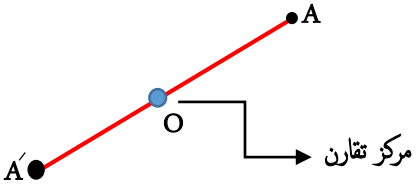
مثال: قرینه مثلث ABC را نسبت به محور تقارن d رسم نمایید.



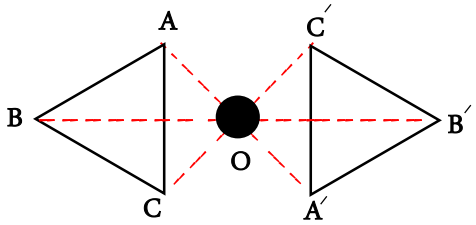
hamgamdars.com | همگام درس دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

تقارن مرکزی

تقارن مرکزی تبدیلی است که بوسیله آن تصویر نقطه A در صفحه به نقطه ی O (مرکز تقارن) نقطه A' می باشد به طوریکه A' و O و A روی یک خط راست قرار دارد و $\overline{OA} = \overline{OA'}$ است



مثال: شکل ABC را نسبت به نقطه O قرینه کنید.



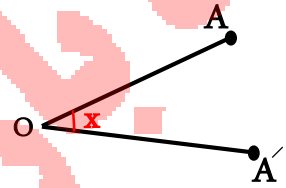
ویژگی های تقارن مرکزی:

۱-طول اضلاع و پاره خط را حفظ می کند پس محیط و مساحت را نیز حفظ می کند یعنی اندازه ی اضلاع شکل اولیه با اندازه اضلاع شکل قرینه شده برابر است

۲-جهت شکل را حفظ نمی کند

۳-زاویه های بین خطوط را حفظ می کند

دوران: دوران به مرکز O و زاویه x تبدیلی است که در آن نقطه ای مثل A را در صفحه به اندازه ی x درجه به نقطه A' در آن صفحه تصویر می کند.



مرکز دوران: یعنی نقطه O ثابت است و برای دوران یک شکل تغییر نمی کند.

اگر A نقطه ای غیر از مرکز دوران O باشد،همیشه $\overline{OA} = \overline{OA'}$ است.

زاویه ای که A و O و A' با هم می سازند با زاویه دوران برابر است $AOA' = x^\circ$

hamgamdars.com | همگام درس
دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

نکته: دوران شکل تحت یک زاویه و مرکز دوران مشخص :کافی است که چند نقطه از شکل اولیه (رئوس چند ضلعی) را نسبت به مرکز دوران و با توجه به اندازه و جهت زاویه دوران داده و سپس نقاط جدید را بهم وصل کنیم.

ویژگی های دوران:

۱ طول اضلاع و پاره خط را حفظ می کند یعنی اندازه اضلاع شکل اولیه با اندازه اضلاع شکل دوران یافته برابر است (پس محیط و مساحت را حفظ می کند)

۲ دوران جهت شکل را حفظ نمی کند.

۳ دوران زاویه بین خطوط را حفظ می کند.

شکل های مساوی:

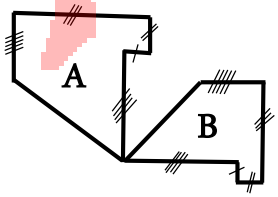
شکل های هم نهشت: اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال، تقارن یادوران) در صفحه بر شکل دیگر منطبق کنیم می گوییم این دو شکل با هم ،هم نهشت یا مساوی هستند.

قرارداد: اگر دو شکل A و B هم نهشت باشند به زبان ریاضی می نویسیم $A \cong B$

$\cong$ نماد هم نهشتی

نکته: در دو شکل هندسی هم نهشت اجزای متناظر (زاویه ها و ضلع ها)دو به دو با هم برابرند تساوی اجزای متناظر (زاویه ها و اضلاع) را هم می توان روی شکل مشخص کرد و هم می توان علامت = تساوی به زبان ریاضی نوشت.

مثال: با توجه به تصویر به سئولات زیر پاسخ دهید.



الف) چرا شکل Aو B هم نهشت هستند

ب)هم نهشتی اشکال A و B را به زبان ریاضی نمایش دهید.

hamgamdars.com | همگام درس دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

کاربرد تبدیلات هندسی:

۱ انجام تبدیلات متوالی و مختلفی از برخی از چند ضلعی ها،می توان قسمتی و یا کل یک صفحه را پوشاند

۲ از زمان های بسیار دور با استفاده از تبدیلات هندسی در کاشی کاری، آثار زیبایی را ایجاد می کردند

تبدیلات هندسی: انتقال–تقارن–دوران

انتقال: در انتقال فقط جای شکل در صفحه تغییر می کند ،اندازه شکل و جهت آن هیچ تغییری نمی کند

تقارن: ۱ محوری ۲ مرکزی

۱ تقارن محوری: تقارن نسبت به یک خط است که به آن محور تقارن می گوییم

چگونگی انجام تقارن محوری: برای این کار از هر نقطه بر خط تقارن عمود می کنیم و سپس به همان اندازه ادامه می دهیم نقطه بدست آمده قرینه نقطه اولیه است.

۲ تقارن مرکزی: تقارن نسبت به یک نقطه است که به آن نقطه تقارن می گوییم.

چگونگی انجام تقارن مرکزی: برای این کار از هر نقطه به مرکز تقارن وصل می کنیم و سپس به همان اندازه ادامه می دهیم نقطه بدست آمده قرینه نقطه اولیه است.

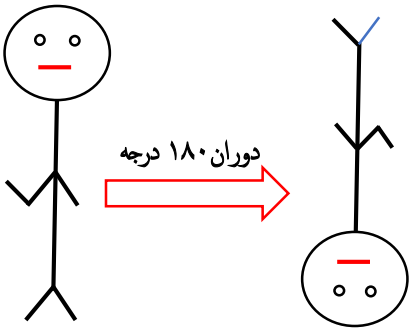
دوران: ۱ دوران ۱۸۰ درجه ۲ دوران ۹۰ درجه

۱ دوران ۱۸۰ درجه: همان تقارن مرکزی است.

نکته: در دوران ۱۸۰ درجه شکل از بالا به پایین و از چپ به راست تغییر وضعیت می دهد.

چرخش فرمان ماشین شبیه این دوران است و حول مرکز می چرخد.

دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار
همگام درس | hamgamdars.com



گروه ریاضی رودبار

hamgamdars.com | همگام درس
دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار