

فصل ۶
سطح و حجم



انتظارات از دانش آموزان در این درس

- ۱ دانش آموزان با حجم های هندسی منشوری و کروی و هرمی آشنا شوند.
- ۲ انواع حجم ها را از یکدیگر تشخیص دهند و آنها را در اطراف خود کشف کنند.
- ۳ شناخت چگونگی بدست آوردن حجم اشکال هندسی و نوشتن آن به صورت عبارت جبری .
- ۴ شناخت مساحت جانبی و کلی و چگونگی بدست آوردن و نوشتن آن
- ۵ اگر به اطراف خود نگاه کنید همه اشیایی که می بینید حجم دارند ولی همه ی آنها شکل هندسی ندارند.

حجم: مقدار فضایی که هر جسم اشغال می کند حجم آن نامیده می شود.

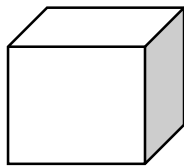
حجم ها به دو گروه تقسیم می شوند

- ۱- هندسی
- ۲- غیر هندسی

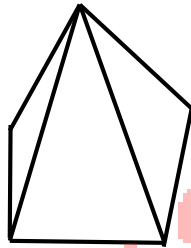
حجم های هندسی: دارای شکل ها و ویژگی های مشخص و تعریف شده هستند و به سه دسته تقسیم می شوند.

حجم های هندسی

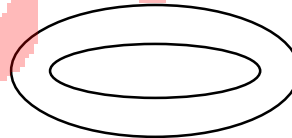
- ۱- منشوری
- ۲- هرمی یا مخروطی
- ۳- کروی



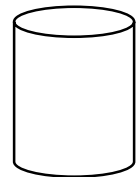
منشوری



هرمی



کروی



منشوری

حجم های غیر هندسی: دارای شکل های مشخص و تعریف شده ای نیستند. مثل عروسک و کوله

پشتی

مشخصات حجم های منشوری: دو قاعده مساوی و موازی دارند و بدنه ی آن ها از یک یا چند

مستطیل یا متوازی الاضلاع تشکیل شده است .

مشخصات حجم های هرمی: یک قاعده دارند و دور تا دور آن قاعده به رأسی در بالا یا پایین

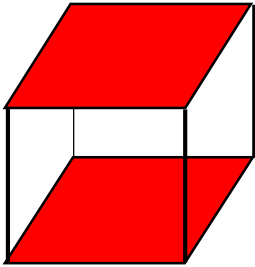
وصل می شود.

مشخصات حجم های کروی: گرد هستند و زاویه وقاعده هم ندارند و بر اثر دوران یک دایره یا

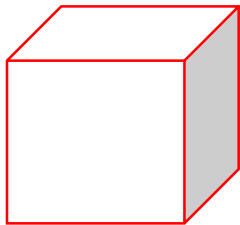
یک نیم دایره حول قطرش حجم های کروی بدست می آیند.

حجم های منشوری بدون هیچ گونه برجستگی یا فرورفتگی بین دو صفحه موازی قرار دارند.

قاعده: دو سطح بالا و پایین یک حجم منشوری را قاعده می گویند.



وجه جانبی: به هر سطح اطراف یک حجم منشوری یک وجه جانبی می گویند.



وجه جانبی

(مستطیل)

یال: به محل برخورد هر دو سطح از یک حجم منشوری **یال** می گویند.

راس: به نقطه برخورد یال ها و قاعده های یک حجم منشوری **راس** می گویند.

ارتفاع: فاصله بین دو قاعده را **ارتفاع** می نامند.

برای اینکه در نام بردن یال و راس چیزی جا نیفتد از راهبرد الگو سازی یا جدول نظام دار استفاده می کنیم .

یک منشور n پهلو دارای n وجه جانبی و $2n$ راس و $3n$ یال است مانند یک منشور ۷ پهلو که ۷

وجه جانبی و ۱۴ راس و ۲۱ یال دارد .

نکته: تعداد راس های منشور = تعداد وجه های جانبی $\times 2$

تعداد یال های منشور = تعداد وجه های جانبی $\times 3$

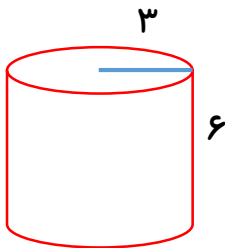
مثال: یک منشور ۸ پهلو چند راس و یال دارد .

راس: $2 \times 8 = 16$ → یال: $3 \times 8 = 24$ → ۸ وجه جانبی دارد

رابطه حجم منشوری: برای بدست آوردن حجم منشوری از رابطه ی زیر استفاده می کنیم.

$$\text{حجم} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 V S h



مثال: حجم استوانه ی زیر را بدست آورید؟

مساحت قاعده: $3 \times 3 \times \frac{3}{14} = 28/26$

حجم: $28/26 \times 6 = 169/56$

در فرمول حجم وقتی می گوئیم مساحت قاعده \times ارتفاع منظور از مساحت قاعده یعنی مساحت قاعده شکلی که به ما داده شده یعنی اگر شکل استوانه باشد پس قاعده آن دایره است پس ما مساحت دایره را بدست می آوریم اگر شکل ما مکعب مستطیل باشد قاعده شکل ما مستطیل است پس برای مساحت قاعده مساحت مستطیل را بدست می آوریم .

نکته: حجم مکعبی که طول هر یال آن a باشد از رابطه ی $V = a \times a \times a$ بدست می آید.

مثال: حجم مکعبی به طول ۵ سانتی متر چقدر است؟

$V = 5 \times 5 \times 5 = 125$ → سانتی متر مکعب

نکته: اگر ابعاد مکعب مستطیلی به صورت a, b, c باشد حجم آن برابر است با $v = a \times b \times c$

مثال: حجم مکعب مستطیلی را که طول آن 10cm ، عرض آن 8cm و ارتفاع آن 5cm است بیابید

$$V = 10 \times 8 \times 5 = 400 \text{ سانتی متر مکعب}$$

برای محاسبه حجم یک استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع h از رابطه مقابل استفاده می کنیم.

$$v = \pi \times r \times r \times h$$

مثال: حجم استوانه ای را بیابید که شعاع قاعده آن 10cm و ارتفاع آن 4cm است.

$$v = \pi \times r \times r \times h \longrightarrow v = 3/14 \times 10 \times 10 \times 4 = 1256$$

مساحت جانبی منشور: از جمع مساحت های اطراف مساحت جانبی بدست می آید.

ارتفاع \times محیط قاعده = مساحت جانبی

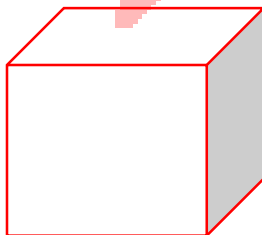
$$\begin{array}{c} \downarrow \\ S \text{ جانبی} \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ P \end{array} \times \begin{array}{c} \downarrow \\ h \end{array}$$

نکته ۱: مساحت جانبی یک مکعب همواره از رابطه (یک وجه $S \times 4 = S$) یعنی $4 \times$ مساحت

یک وجه بدست می آید زیرا وجه های جانبی هر مکعب هم اندازه و مربع شکل می باشند.

نکته ۲: اگر اندازه هر یال یک مربع a باشد مساحت جانبی آن برابر است با $S = 4 \times a \times a$

مثال: مساحت جانبی مکعب زیر را بدست آورید؟



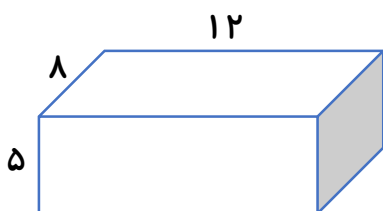
۲۰

$$s = 4 \times 20 \times 20 = 1600$$

یعنی مساحت یک وجه را بدست آورده و بعد در ۴ ضرب می کنیم چون تعداد وجه های جانبی این شکل ۴ تا می باشد.

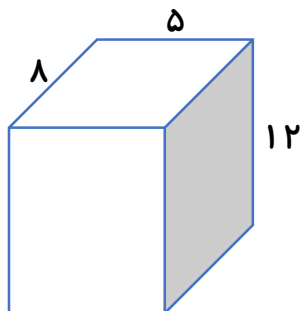
برای بدست آوردن مساحت جانبی یک مکعب مستطیل نمی توان یک رابطه ی کلی ارائه کرد زیرا بسته به این که مکعب مستطیل از چه وجهی روی زمین قرار گرفته است مساحت جانبی آن متفاوت است.

مثال: مکعب مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۸ و ۵ را در دو حالت مقابل قرار داده ایم در هر حالت مساحت جانبی آن را بدست آوریم.



$$s = P \times h$$

$$s = 2 \times (12 + 8) \times 5 \longrightarrow s = 200$$



$$s = P \times h$$

$$s = 2 \times (5 + 8) \times 12 \longrightarrow s = 312$$

برای بدست آوردن مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده r می توان از رابطه مقابل استفاده کرد.

$$s = 2 \pi r h \text{ جانبی}$$

مثال: مساحت جانبی یک استوانه ۳۱۴ سانتی متر مکعب است اگر ارتفاع این استوانه ۱۰ سانتی متر باشد شعاع قاعده این استوانه را بدست آورید. ($\pi = 3/14$)

$$s = 2 \pi r h \text{ جانبی} \longrightarrow 314$$

$$314 = (2 \times 3/14) \times r \times 10 \longrightarrow r = 5$$

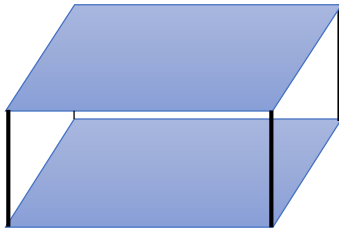
بنابراین برای مساحت جانبی استوانه هم می توان از رابطه ی زیراستفاده کرده (همان رابطه مساحت جانبی منشور ها)

$$s = p \times h$$

ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی

مساحت کل منشور : از جمع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده هر شکل مساحت کل منشور بدست می آید.

مثال: برای ساخت مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۵ و ۷ چند سانتی متر مقوا لازم داریم؟



ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی

$$S_{\text{جانبی}} = (7 + 7 + 5 + 5) \times 3 = 72$$

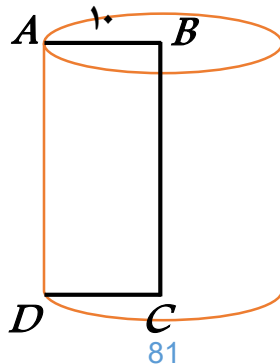
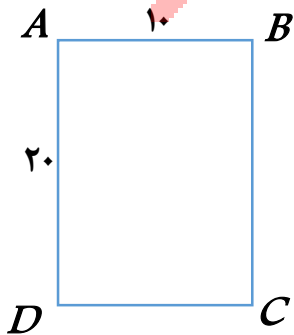
$$S_{\text{دو قاعده}} = 2 \times (7 \times 5) = 70 \text{ سانتی متر مربع}$$

$$S_{\text{کل}} = 72 + 70 = 142 \text{ سانتی متر مربع}$$

نکته: از دوران مستطیل حول طول یا عرض آن استوانه بدست می آید.

نکته: از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائمه ی آن مخروط بدست می آید.

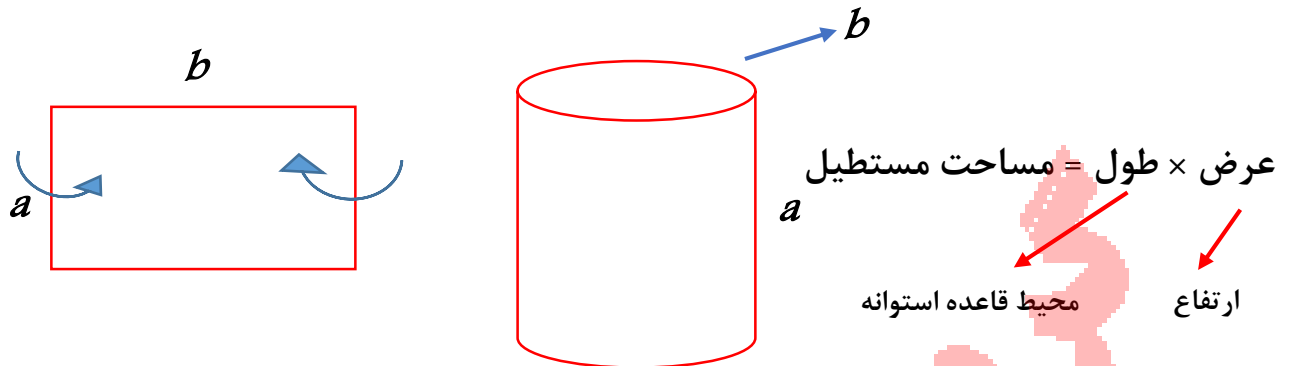
از دوران یک سطح مستطیل شکل حول یک ضلع آن یک استوانه ایجاد می شود ضلعی از مستطیل که دوران را حول آن انجام می دهیم ارتفاع و ضلع دیگر مستطیل شعاع قاعده استوانه خواهد بود.



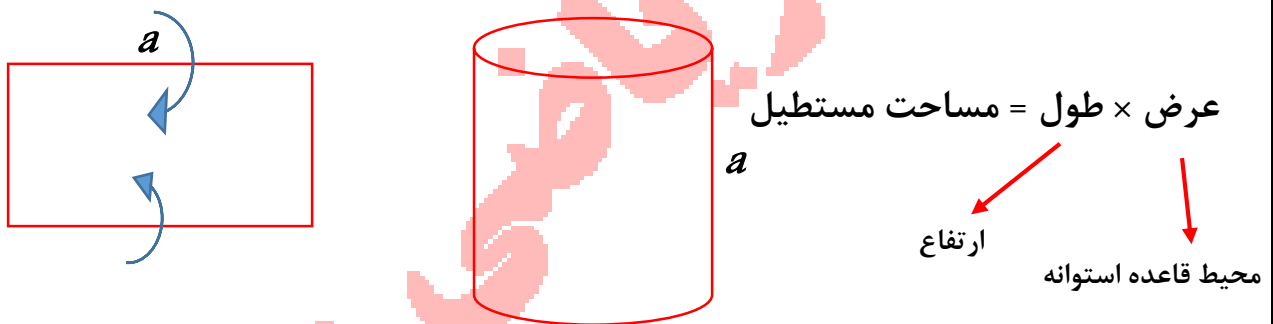
$$\text{مساحت قاعده} = 10 \times 10 \times 3/14 = 314$$

$$\text{حجم} = 314 \times 20 = 6280$$

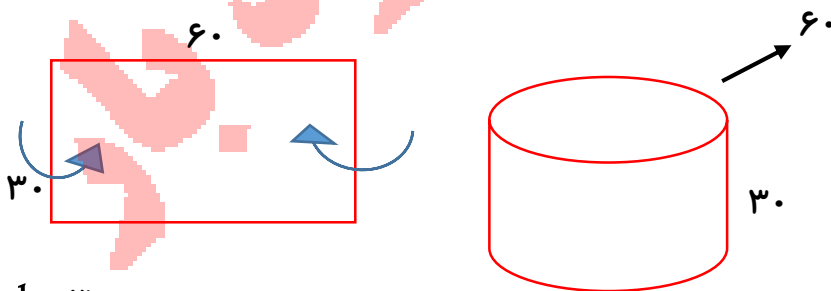
اگر مستطیل را از طول لوله کنیم محیط قاعده استوانه (دایره) برابر با طول مستطیلی است که در گسترده استوانه می بینید و عرض مستطیل همان ارتفاع استوانه است.



اگر مستطیل را از عرض لوله کنیم محیط قاعده استوانه (دایره) برابر با عرض مستطیلی است که در گسترده استوانه می بینید و طول مستطیل همان ارتفاع استوانه است.



مستطیلی به ابعاد ۶۰ و ۳۰ سانتی متر را یک بار از طول آن و بار دیگر از عرض آن لوله کرده ایم حجم شکل حاصل را در هر دو حالت بدست ۳ آورید. ($\pi = 3$)



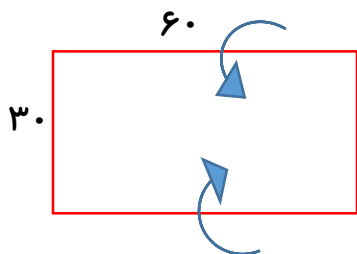
$h = 30$

در شکل مقابل ما مستطیل را از طول آن لوله کردیم
 $2\pi r = 60 \rightarrow 2 \times 3 \times r = 60 \rightarrow r = 10$ سانتی متر

$v = \pi \times r \times r \times h \rightarrow v = 3 \times 10 \times 10 \times 30 = 9000$ سانتی متر مکعب

$$\begin{cases} 2 \times 3 \times r = 60 \\ r = \frac{60}{6} = 10 \end{cases} \rightarrow \text{به دست آوردن شعاع}$$

این بار می خواهیم مستطیل را از عرض آن لوله کنیم و حجم آنرا بدست آوریم



$$h = 30$$

$$2\pi r = 60 \rightarrow 2 \times 3 \times r = 60 \rightarrow r = 5 \text{ سانتی متر}$$

$$V = \pi \times r \times r \times h \rightarrow V = 3 \times 5 \times 5 \times 60 = 4500 \text{ سانتی متر مکعب}$$

با محاسبه حجم تشکیل شده در هر یک از دو حالت و با اینکه هر دو حجم با یک مستطیل ساخته شده است می بینیم که مقدار دو حجم یکسان نیست.

مقطع زدن

اگر یک منشور را با یک قیچی یا چاقو برش بزنیم و سطح برش خورده را رنگ کرده و روی یک کاغذ بزنیم اثر آن به شکل های هندسی مانند: مربع و مستطیل و بیضی و دیده می شود به این کار مقطع زدن می گویند.

اگر یک حجم هندسی را از ابعاد مختلف (روبرو ، بالا ، سمت راست ، پایین) نگاه کنیم شکل های هندسی متفاوتی دیده می شود.

یادآوری

- متر مکعب و سانتی متر مکعب از واحد های حجم هستند.

- هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است.

- هر لیتر ۱۰۰۰ سی سی است .

- هر متر مکعب ۱۰۰۰۰۰۰ سانتی متر مکعب است.

- سی سی همان سانتی متر مکعب است.

تمرینات

تمرین ۱ عبارات درست را با نماد \checkmark و نادرست را با \times مشخص کنید .

الف) یک منشور ۷ پهلو دارای ۱۴ یال است

ب) تمام وجه های یک مکعب به صورت مربع است .

پ) اگر یک مستطیل را حول عرض آن دوران دهیم مکعب مستطیل ساخته می شود.

ت) حجم مکعب به ضلع ۲ سانتی متر برابر ۸ سانتی متر مکعب است

تمرین ۲ در جای خالی عدد یا کلمه مناسب بنویسید. در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) یک منشور ۹ پهلو دارای راس و یال می باشد

ب) اگر منشوری دارای ۲۴ رأس باشد دارای یال است.

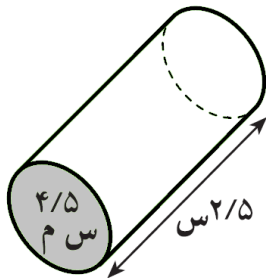
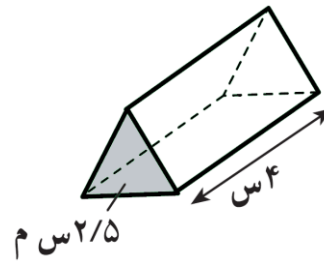
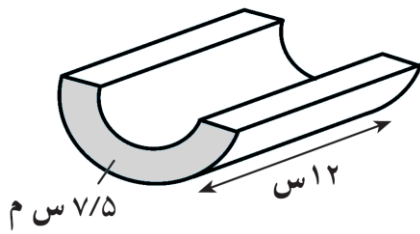
پ) حجم هر منشور برابر با ضربدر است.

ت) مساحت جانبی هر منشور برابر با ضربدر است

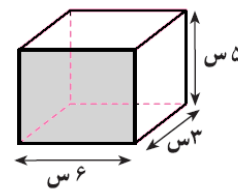
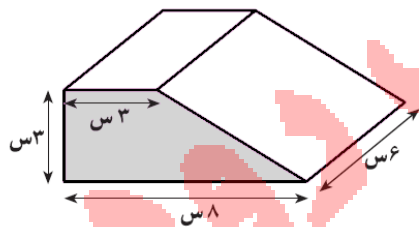
ج) ازدوران یک مستطیل حول یکی از ضلع ها پدید می آید .

د) منشور چهار پهلو دارای یال است .

تمرین ۳ با توجه به ارتفاع و مساحت قاعده ی داده شده، حجم هر شکل را محاسبه کنید.



تمرین ۴ ابتدا مساحت قاعده و سپس حجم هر یک از اجسام زیر را حساب کنید.



تمرین ۵ یک پارچ به شکل استوانه است که ارتفاع آن ۳۰ سانتی متر و شعاع قاعده ی آن ۸ سانتی

متر است . آب داخل این پارچ را در لیوان هایی به شکل استوانه که ارتفاع آنها ۱۰ سانتی متر و

شعاع قاعده ی آن ۴ سانتی متر است ، می ریزیم . این آب چند لیوان را پر می کند ؟

تمرین ۶ می خواهیم جعبه ای به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۱۰ و ۲۰ و ۱۵ سانتی متر را با کاغذ کادو بپوشانیم برای کادو کردن این جعبه چه مقدار کاغذ کادو احتیاج داریم؟



تمرین ۷ مستطیل شکل زیر را حول طول آن دوران می دهیم حجم حاصل از دوران را حساب کنید؟

تمرین ۸ حجم، مساحت جانبی و مساحت کل منشور ۴ پهلو با قاعده ی مربع به ضلع ۲ سانتی متر و ارتفاع ۱۳ سانتی متر را بدست آورید؟