

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۶/۰۴

زمان برگزاری: ۴۰ دقیقه

آموزشگاه همکلاسی: کرج

کانال دکتر ریاضی: @Math_Dr

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: فصل نهم ریاضی هفتم آمادگی آزمون تکمیل

ظرفیت پایه هشتم مدارس تیزهوشان

فصل نهم ریاضی هفتم

۱ در کیسه‌ای شش مهره قرمز، چهار مهره آبی و پنج مهره سبز قرار داشت. دو مهره از کیسه خارج کردیم که یکی آبی و دیگری سبز بود. احتمال آن که مهره سوم که به تصادف از کیسه خارج می‌شود، مهره‌ای قرمز باشد، کدام است؟

$\frac{5}{13}$ ۴

$\frac{2}{5}$ ۳

$\frac{6}{13}$ ۲

$\frac{1}{2}$ ۱

۲ بناست در یک مسابقه فوتبال زنده پناستی با پرتاب یک سکه از بین ابراهیم و داریوش انتخاب شود. اگر احتمال گل شدن ضربه پناستی با احتمال گل نشدن آن یکسان باشد، احتمال آن که ابراهیم پناستی را گل کند کدام است؟

$\frac{1}{5}$ ۴

$\frac{2}{3}$ ۳

$\frac{1}{4}$ ۲

$\frac{1}{2}$ ۱

۳ در خانواده‌ای با سه فرزند، احتمال کدام پیشامد از بقیه کم‌تر است؟

۲ فقط یکی دختر باشد.

۱ هم پسر و هم دختر داشته باشند.

۴ فرزند سوم برادر داشته باشد.

۳ حداقل دو تا پسر باشند.

۴ اگر تاسی را دو بار پرتاب کنیم احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد چقدر است؟

$\frac{1}{4}$ ۴

$\frac{1}{3}$ ۳

$\frac{1}{5}$ ۲

$\frac{1}{6}$ ۱

۵ یک تاس و ۳ سکه را با هم می‌اندازیم. احتمال آنکه تعداد دفعاتی که «رو» ظاهر می‌شود با عدد روی تاس برابر باشد، کدام است؟

$\frac{7}{36}$ ۴

$\frac{5}{36}$ ۳

$\frac{5}{48}$ ۲

$\frac{7}{48}$ ۱

۶ اگر یک سال کیسه ۳۶۶ روز داشته باشد احتمال آنکه ۵۳ تا یکشنبه داشته باشد چقدر است؟ (المپیاد آفریقای جنوبی)

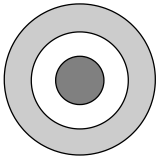
$\frac{2}{53}$ ۴

$\frac{2}{7}$ ۳

$\frac{1}{366}$ ۲

$\frac{53}{266}$ ۱

۷ یک تابلو خاص از ۳ تا دایره هم مرکز تشکیل شده است. و نسبت شعاع این ۳ دایره: ۱، ۲ و ۳ است. نقطه‌ای به دلخواه انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که نقطه در حلقه بیرونی قرار گیرد چند برابر آن است که نقطه در دایره مرکزی بیفتد؟ (المپیاد آفریقای جنوبی - ۱۳۹۱)



۲ ۴

۱ ۳

۴ ۶

۳ ۵

۸ یک تاس شش وجهی را طوری ساخته‌اند که احتمال ظاهر شدن عدد ۲ در آن $\frac{1}{5}$ است. احتمال ظاهر شدن عددی زوج در یک بار پرتاب این تاس چقدر است؟ (اعداد غیر از ۲ هم شانس هستند) (نمونه دولتی - آذربایجان غربی - اردبیل - ۹۶ - ۹۵)

$\frac{3}{4}$ ۴

$\frac{13}{25}$ ۳

$\frac{12}{25}$ ۲

$\frac{3}{5}$ ۱



فصل نهم ریاضی هفتم

۹ سکهٔ سالمی را سه بار انداخته‌ایم و هر بار «رو» آمده است. احتمال این که سکه در پرتاب چهارم هم رو بیاید کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{16}$ ۳ $\frac{1}{8}$ ۴ $\frac{1}{12}$

۱۰ روی ۶ کارت اعداد ۱ تا ۶ را نوشتیم و کارت‌ها را داخل کیسه‌ای ریختیم. دو کارت را به طور هم‌زمان به دلخواه بر می‌داریم، احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو کارت بزرگ‌تر یا مساوی ۹ باشد، چند است؟

- ۱ $\frac{5}{18}$ ۲ $\frac{1}{5}$ ۳ $\frac{2}{15}$ ۴ $\frac{4}{15}$

۱۱ اگر تمام زیرمجموعه‌های $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ را بنویسیم و یکی از این زیرمجموعه‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه در مجموعهٔ انتخاب شده حاصلضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۷ باشد، چقدر است؟

- ۱ $\frac{1}{8}$ ۲ $\frac{1}{16}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{2}$

۱۲ در حومهٔ شهر در ساعات اوج مصرف به طور متوسط هر ۷ روز یک بار منبع انرژی قطع می‌شود. در زمانی غیر از آن به طور متوسط هر ۱۷ روز قطع می‌شود. بعضی روزها منبع انرژی هم در زمان اوج مصرف و هم غیر آن قطع می‌گردد. ساعات اوج مصرف بین ۶ تا ۹ صبح و ۵ تا ۹ عصر است. احتمال آن که منبع انرژی این منطقه در یک روز خاص قطع نشود چه قدر است؟ (المپید آفریقای جنوبی - ۱۳۸۷)

- ۱ $\frac{1}{119}$ ۲ $\frac{11}{288}$ ۳ $\frac{23}{119}$ ۴ $\frac{24}{119}$

۱۳ نوید در یک مهمانی شرکت کرده بود. او متوجه شد که ۳ نفر از میهمانان در یک روز هفته و یک ماه از سالی که او به دنیا آمده بود متولد شده‌اند. همچنین او متوجه شد همگی میهمانان در ۶ ماه نخست سال متولد شده‌اند. در این مهمانی حداقل چند نفر شرکت کرده باشند (با نوید) که مطمئن باشیم چنین اتفاقی می‌افتد؟ (المپید آفریقای جنوبی - ۱۳۸۶)

- ۱ 70 ۲ 80 ۳ 85 ۴ 196

۱۴ در یک قرعه‌کشی هفتگی ۶ عدد به طور تصادفی از مجموعه اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... و ۴۸، ۴۹ انتخاب می‌شوند. خانواده فاضلی یک بلیط قرعه‌کشی خریده است با اعداد: ۴۳، ۳۰، ۲۹، ۲۶، ۱۷، ۲۰. پنج عدد اول قرعه‌کشی ۴۳، ۳۰، ۲۹، ۲۶، ۱۷ بودند. شانس این که عدد بعدی ۲۹ باشد چقدر است؟ (المپید آفریقای جنوبی - ۱۳۸۰)

- ۱ $\frac{1}{6}$ ۲ $\frac{1}{30}$ ۳ $\frac{1}{44}$ ۴ $\frac{1}{49}$

۱۵ اگر $A \cup B = \{1, 2, \dots, 10\}$ و $B \cup C = \{6, 7, \dots, 14\}$ باشد، مجموعهٔ $(A \cup B) \cup C$ چند عضو دارد؟

- ۱ نوزده ۲ چهارده ۳ دوازده ۴ شانزده

۱۶ از بین اعداد دورقمی فرد عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخاب شده مضرب ۵ باشد ولی مضرب ۳ نباشد، کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{15}$ ۲ $\frac{11}{45}$ ۳ $\frac{7}{9}$ ۴ $\frac{1}{9}$

فصل نهم ریاضی هفتم

۱۷ دو رأس متمایز یک شش ضلعی را هم زمان با هم، بدون ترتیب و اتفاقی انتخاب می کنیم. احتمال این که این دو رأس مجاور یکدیگر باشند، چقدر است؟

$$\frac{1}{30} \quad \text{۴}$$

$$\frac{2}{5} \quad \text{۳}$$

$$\frac{31}{32} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۱}$$

۱۸ در یک کیسه ۲۰ مهره قرمز و ۳۰ مهره آبی و تعدادی مهره سفید وجود دارد، به نحوی که اگر بخواهیم از میان این مهره‌ها، یک مهره به تصادف برداریم، احتمال سفید بودن آن $\frac{9}{11}$ است. احتمال این که این مهره قرمز باشد کدام است؟

$$\frac{4}{55} \quad \text{۴}$$

$$\frac{2}{33} \quad \text{۳}$$

$$\frac{2}{11} \quad \text{۲}$$

$$\frac{3}{11} \quad \text{۱}$$

۱۹ اگر مجموعه A دارای ۳ عضو و مجموعه B دارای ۵ عضو باشد و اشتراک این دو مجموعه دارای ۴ زیرمجموعه باشد، $B - A$ دارای چند زیرمجموعه است؟

$$16 \quad \text{۴}$$

$$8 \quad \text{۳}$$

$$4 \quad \text{۲}$$

$$2 \quad \text{۱}$$

۲۰ علی می خواهد برای مجموعه کل حالت‌های $S = \{1, 2, 3\}$ ، پیشامدهای مختلفی را بنویسد. او حداکثر برای چند مقدار مختلف احتمال، می تواند پیشامد بنویسد؟

$$8 \quad \text{۴}$$

$$4 \quad \text{۳}$$

$$3 \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$



پاسخنامه تشریحی

گزینه ۲ بعد از خروج به مهره آبی و یک مهره سبز:

$$n(S) = 6 + 3 + 4 = 13$$

$$n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{13}$$

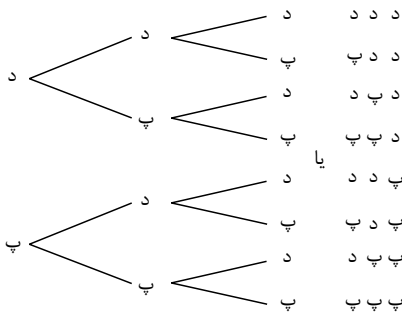
۱

گزینه ۲ برای این ضربه، ۴ حالت وجود دارد:

یک: ابراهیم انتخاب شود و گل بزند. دو: ابراهیم انتخاب شود و گل نزند.
سه: داریوش انتخاب شود و گل بزند. چهار: داریوش انتخاب شود و گل نزند.
یکی از چهار حالت بالا مطلوب است، پس احتمال $\frac{1}{4}$ است.

۲

گزینه ۲ ابتدا به کمک راهبرد تفکر نظام‌دار کلیه حالت‌ها را در نظر می‌گیریم:



۳

سپس احتمال هر گزینه را حساب می‌کنیم:

$$\frac{6}{8} \text{ گزینه ۱: } \frac{4}{8} \text{ گزینه ۲: } \frac{3}{8} \text{ گزینه ۳: } \frac{6}{8} \text{ گزینه ۴:}$$

گزینه ۱ اگر تاس را دو بار پرتاب کنیم، کل حالت‌ها برابر $n(S) = 6 \times 6 = 36$ می‌شود. حال حالت‌هایی را که مجموع دو تاس ۷ می‌شود، بررسی می‌کنیم.

$$A = \left\{ (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) \right\}$$

پس کل حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر با ۷ می‌شود، یعنی $n(A) = 6$ حال:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

۴

گزینه ۱ ابتدا تعداد کل حالت‌های پرتاب یک تاس و سه سکه را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = 6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

حال مجموعه A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (شماره تاس برابر تعداد دفعات رو آمدن سکه‌ها):

$$A = \{ (1, پ, پ, ر), (1, پ, ر, پ), (1, ر, پ, پ) \}$$

۵

(r, r, p, p) و (r, p, p, r) و (p, r, r, r) و (p, p, r, r) و (r, r, r, r) و (p, p, p, p)

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{48}$$

گزینه ۳ باقی مانده ۳۶۶ بر ۷ عدد ۲ است یعنی در هر سال کبیسه ۲ روز در هفته ۵۳ بار تکرار می شود و آن دو روز آغاز سال است پس اگر سال با شنبه یا یکشنبه شروع شود ۵۳ تا یکشنبه داریم یعنی به احتمال $\frac{2}{7}$

گزینه ۳ شعاع دایره ها را r ، $2r$ ، $3r$ در نظر می گیریم.

مساحت حلقه بیرونی برابر است با:

$$\pi(3r)^2 - \pi(2r)^2 = 5\pi r^2$$

مساحت دایره مرکزی برابر است با:

$$\pi r^2$$

نسبت احتمال ها $= \frac{5\pi r^2}{\pi r^2} = 5$

گزینه ۳ احتمال آمدن عدد ۲ برابر $\frac{1}{5}$ است پس احتمال اینکه عددی غیر از ۲ بیاید برابر $\frac{4}{5}$ است $\left(1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\right)$. احتمال اعداد به غیر از ۲) ۱ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ برابر $\frac{4}{5}$ شده است و چون احتمال این اعداد هم شانسی است پس:

$$\frac{4}{5} \div 5 = \frac{4}{25}$$

احتمال زوج آمدن عدد تاس

$$2 \text{ احتمال عدد } + 4 \text{ احتمال عدد } + 6 \text{ احتمال عدد} = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$$

گزینه ۱ دقت کنید احتمال رو یا پشت آمدن سکه سالم در پرتاب چهارم، از احتمال پرتاب های قبلی جدا است، یعنی همان $\frac{1}{2}$ است.

گزینه ۴ کارت داریم (مانند پرتاب دو تاس)، تعداد کل حالت ها برابر $6 \times 6 = 36$ است چون دو کارت را همزمان برداشته ایم حالت هایی که دو عدد یکسان هستند را حذف می کنیم. $36 - 6 = 30$

حال حالت هایی را که مجموع دو کارت بزرگتر مساوی ۹ است، بررسی می کنیم.

- مجموع ۹ = $\{(3, 6)(4, 5)(5, 4)(6, 3)\}$
- مجموع ۱۰ = $\{(4, 6)(6, 4)\}$
- مجموع ۱۱ = $\{(5, 6)(6, 5)\}$

تعداد این حالت ها برابر ۸ است، پس داریم:

$$\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

گزینه ۲ مجموعه $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ و $n(A) = 6$. تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ۶ عضوی برابر $n(S) = 2^6 = 64$ است.

حال برای انتخاب مجموعه ای که حاصل ضرب بزرگترین و کوچکترین عضو آن برابر ۷ باشد، ۱ و ۷ را به عنوان کوچکترین و بزرگترین عضو مجموعه در نظر می گیریم (چون حاصل ضرب هیچ کدام از اعداد دیگر در هم برابر ۷ نمی شود).

$$B = \{1, \square, \square, 7\}$$

و برای اینکه ۱ و ۷ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو این مجموعه‌ها باشند، عضوهای ۳ یا ۵ می‌توانند در مجموعه قرار بگیرند یا قرار نگیرند، پس برای هر کدام دو حالت وجود دارد: $2 \times 2 = 4$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

گزینه ۳ احتمال آنکه برق قطع بشود برابر است با:

$$\left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{17}\right) = \frac{96}{119}$$

۱۲ احتمال آنکه برق قطع نشود برابر است با:

$$1 - \frac{96}{119} = \frac{23}{119}$$

گزینه ۳

۷ روز هفته داریم و ۶ ماه، بنابراین $6 \times 7 = 42$ انتخاب وجود دارد. در این صورت برای اینکه ۳ نفر در روز و ماه مشترک باشند باید حداقل $42 \times 2 + 1 = 85$ مهمان وجود داشته باشد.

گزینه ۳

از مجموعه‌ی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴۹، ۴۹۰۰۰۳، ۲، ۱، ۴۹ عدد وجود دارد که پنج تای از آن‌ها انتخاب شده است پس ۴۴ عدد می‌ماند. شانس این که عدد ششم ۲۹ باشد، برابر است با: $\frac{1}{44}$

گزینه ۲

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, \dots, 14\} \Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 14$$

گزینه ۱

تعداد اعداد دورقمی که فرد ۴۵ تاست:

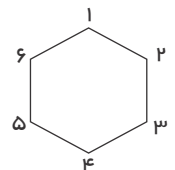
$$S = \{11, 13, \dots, 97, 99\} \Rightarrow n(S) = \frac{99 - 11}{2} + 1 = 45$$

۱۶ اعداد دورقمی فرد مضرب ۳ نیستند:

$$A = \{25, 35, 55, 65, 85, 95\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

گزینه ۳

از آن‌جا که رأس‌های متمایز، بی‌ترتیب و کاملاً تصادفی با هم انتخاب شده‌اند، می‌توانیم دو رأس انتخاب شده را در کنار هم نشان دهیم. کل حالات ممکن و حالات مطلوب:



$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\} \\ \Rightarrow n(S) = 15$$

$$A = \{(1, 2), (1, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

گزینه ۴ تعداد مهره‌های سفید موجود در کیسه را x در نظر می‌گیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{احتمال سفید بودن مهره} = \frac{x}{20 + 30 + x} = \frac{9}{11} \Rightarrow 9x + 450 = 11x \Rightarrow 2x = 450 \Rightarrow x = 225$$

بنابراین تعداد کل مهره‌های این کیسه برابر است با:

$$20 + 30 + 225 = 275$$

پس احتمال قرمز بودن مهره‌ای که به تصادف از کیسه خارج می‌شود برابر است با:

$$\frac{20}{275} = \frac{4}{55}$$

گزینه ۳ مجموعه‌ای که ۴ زیرمجموعه داشته باشد دارای ۲ عضو است، پس A و B دارای ۲ عضو مشترک هستند. بنابراین مجموعه $B - A$ دارای

$5 - 2 = 3$ عضو است. یک مجموعه ۳ عضوی دارای ۸ زیرمجموعه است، بنابراین گزینه ۳ درست است.

گزینه ۳ نکته: همواره مجموعه حالت‌های مطلوب زیرمجموعه‌ای از کل حالت‌ها است.

مطابق نکته: تعداد کل مجموعه پیشامدهایی که می‌توان روی مجموعه $S = \{1, 2, 3\}$ نوشت، برابر تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه یعنی ۸ عدد است.

زیرمجموعه‌های S : $\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

عضو ۰

عضو ۱

عضو ۲

عضو ۳

بنابراین احتمال‌های پیشامدهای علی می‌تواند $\frac{0}{3}$ یا $\frac{1}{3}$ یا $\frac{2}{3}$ یا $\frac{3}{3}$ باشد. یعنی او حداکثر برای ۴ مقدار احتمال می‌تواند پیشامدهای مختلف بنویسد.

پاسخنامه کلیدی

۱ ۲
۲ ۲
۳ ۲
۴ ۱

۵ ۱
۶ ۳
۷ ۳
۸ ۳

۹ ۱
۱۰ ۴
۱۱ ۲
۱۲ ۳

۱۳ ۳
۱۴ ۳
۱۵ ۲
۱۶ ۱

۱۷ ۳
۱۸ ۴
۱۹ ۳
۲۰ ۳