

ریاضی : هشتم

فصل سوم : چندضلعی‌ها

صفحه: ۲۹ تا ۵۰

تهیه کننده: احمد فرخ وند



طرز هزاران سال گذشته در آثار هنری گونه و کنار کنسور بر اختصار مان، نقش مؤثر استفاده از هندسه و شکل‌های هندسی و نیز مفاهیم مهم آن همچون انتقال، تقارن و دوران به وضوح قابل مشاهده است.

۳۰

چندضلعی‌ها و تقارن

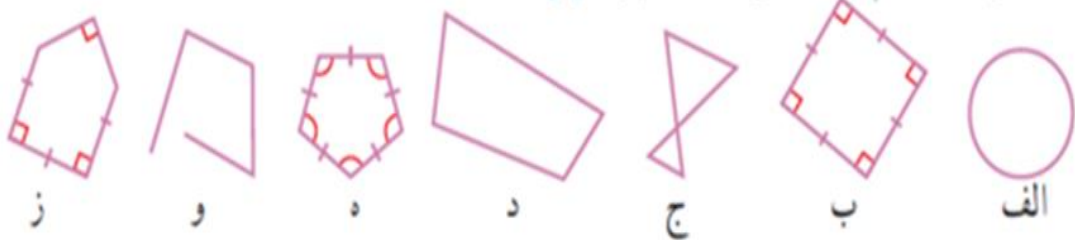


۱- در صفحه به هر خط شکسته بسته، چندضلعی گفته می‌شود به شرط آنکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند.

شکل «ج» چندضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شکل «و» چندضلعی نیست. چرا؟ چون خط شکسته نیست.

شکل «الف» هم چندضلعی نیست. چرا؟ چون خط بسته نیست.




۲- اگر در یک چندضلعی همه ضلع‌ها با هم و همه زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منظم است.

از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چندضلعی منظم‌اند؟ ب - ه

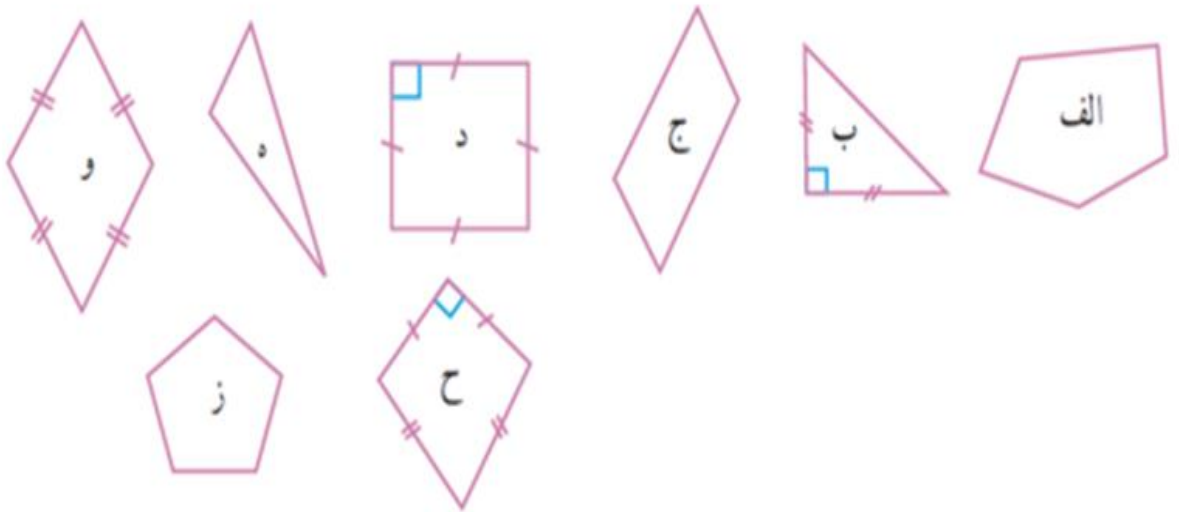
۳- یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید. سپس، درباره تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها و... توضیح دهید تا دوستان شکلی را که انتخاب کرده‌اید، پیدا کند.

۳۰

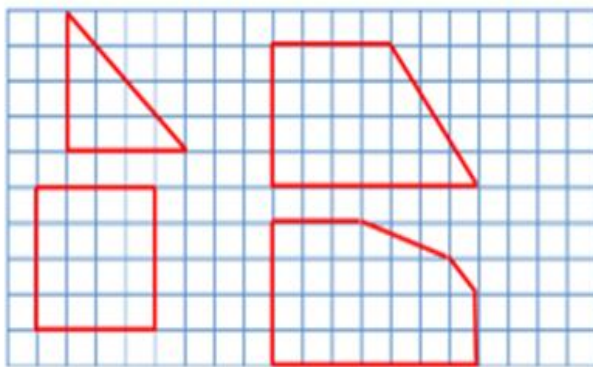
سپس به توضیحات دوستان گوش کنید و شکلی را که او انتخاب کرده است، پیدا کنید.

کار در کلاس  ۱- هر یک از عبارات‌های زیر مربوط به کدام چند ضلعی است؟

- یک لوزی با زاویه قائمه د
- پنج ضلعی غیرمنتظم الف
- یک مثلث با زاویه باز ه
- چند ضلعی منتظم د، ز



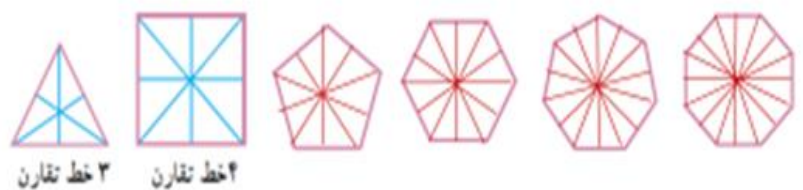
۲- چند ضلعی‌های زیر را در صفحه شطرنجی رسم کنید.



- الف) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین
- ب) مستطیلی با ضلع‌های مساوی
- ج) یک دوزنقه قائم الزاویه
- د) یک شش ضلعی با دقیقاً سه زاویه قائمه

۳- در سال گذشته با خط تقارن یک شکل آشنا شدید.

الف) تعداد خط‌های تقارن هر یک از چند ضلعی‌های منتظم زیر را پیدا کنید.



ب) به نظر شما نه ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ده ضلعی منتظم چگونه؟ ۱۰

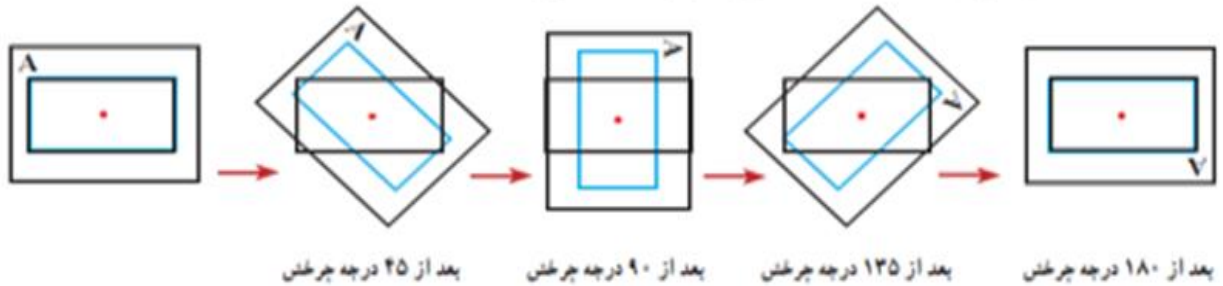


۳۱



۱- یک ورق کاغذ پوستی روی مستطیل روبه‌رو قرار دهید و تصویر مستطیل را روی آن رسم کنید.

نوک مدادتان را روی مرکز دوران بگذارید و مانند شکل‌های زیر، کاغذ پوستی را 180° درجه حول مرکز دوران بچرخانید.



۳۲

آیا تصویر روی شکل منطبق می‌شود؟ **بله**

اگر نتیجه دوران 180° درجه‌ای یک شکل حول یک نقطه روی آن منطبق شود، می‌گوییم شکل **مرکز تقارن** دارد و نقطه مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.

۳۳



۲- شکل روبه‌رو مثلثی متساوی‌الاضلاع است. یک ورق کاغذ پوستی روی

آن قرار دهید و مراحل فعالیت (۱) را تکرار کنید. نشان دهید که نقطه مشخص شده مرکز تقارن شکل نیست.



بعد از 45° درجه چرخش



بعد از 90° درجه چرخش



بعد از 135° درجه چرخش

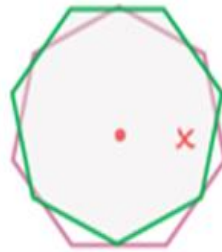


بعد از 180° درجه چرخش



۳- در کدام یک از چندضلعی‌های منتظم زیر، نقطه مشخص شده مرکز تقارن است؟

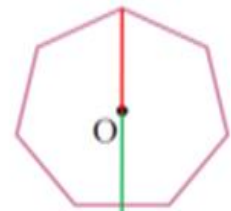
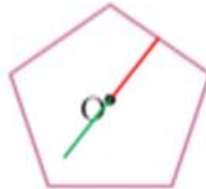
۳۲



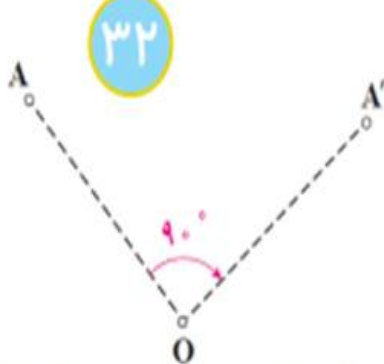
چند ضلعی‌های منتظم با اضلاع زوج، مرکز تقارن دارند.

به نظر شما نه ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد؟ خیر
ده ضلعی منتظم چگونه؟ از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴- یکی از راه‌های تشخیص اینکه نقطه O در مثلث متساوی‌الاضلاع مرکز تقارن نیست، این است که می‌توان روی شکل نقطه‌ای پیدا کرد که قرینه آن نسبت به نقطه O روی خود شکل قرار نگرفته باشد. مانند نمونه، نشان دهید که نقطه O در دو شکل دیگر هم، مرکز تقارن نیست.



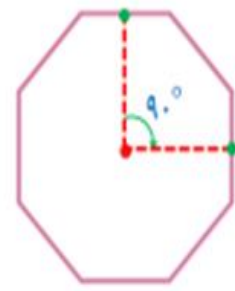
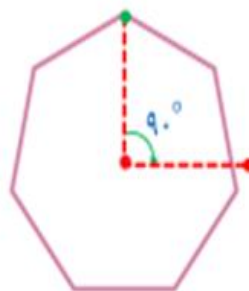
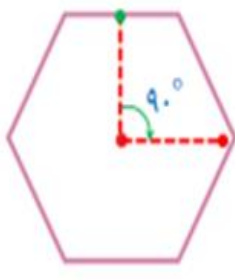
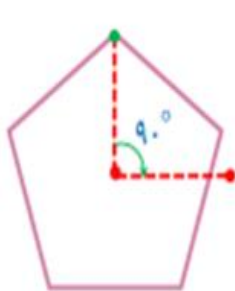
۳۳



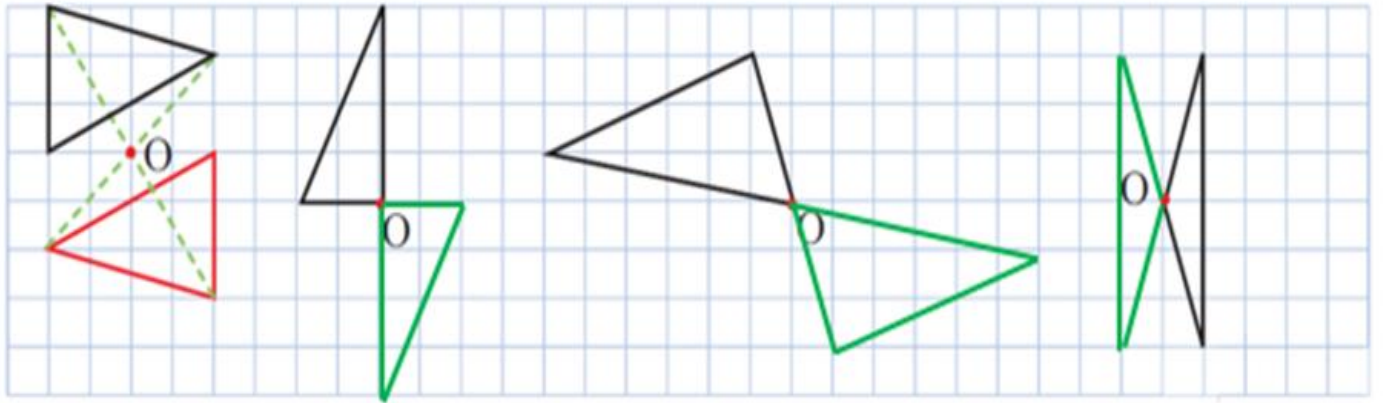
۵- شکل‌های مقابل چگونه پیدا کردن دوران یافته نقاط A و B حول مرکز O به اندازه 90° و 35° در جهت عقربه‌های ساعت را نشان می‌دهد.

کدام یک از شکل‌های فعالیت (۳) با دوران 90° حول نقطه مشخص شده، در جهت عقربه‌های

ساعت روی خودش می‌افتد؟



مانند نمونه هر شکل را طوری کامل کنید که نقطه O مرکز تقارن باشد.

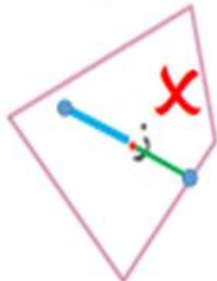


نمونه های که مرکز تقارن خارج از شکل باشد داده شود

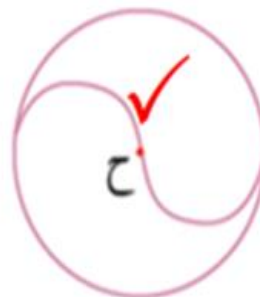
تمرین



در هر شکل، بررسی کنید که نقطه مشخص شده مرکز تقارن شکل هست یا نه.

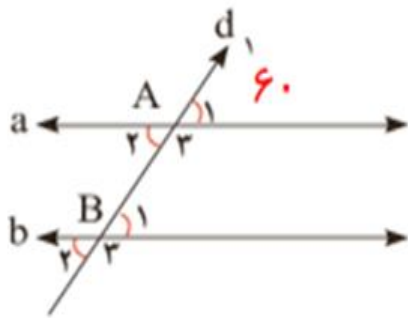


X قرینه هر نقطه از شکل روی خود شکل قرار نمی گیرد.





اگر خطی مانند d_1 ، خطوط a و b را مانند شکل با زاویه‌های مساوی قطع کرده باشد، خط‌های a و b با هم موازیند.



به خط d_1 ، خط **مورب** می‌گویند.

موازی بودن خط‌های a و b را به صورت $a \parallel b$ نمایش می‌دهند. هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها زاویه‌های مساوی می‌سازد.

۱- اگر $\hat{A}_1 = 60^\circ$ باشد، زاویه‌های خواسته شده را

پیدا کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

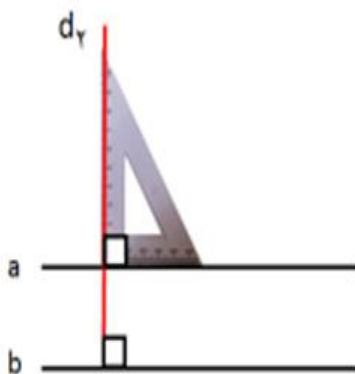
چون **مکمل زاویه** \hat{A}_1 است. $\hat{A}_2 = 120^\circ$

چون خطوط a و b موازی اند و خط d مورب است. $\hat{B}_1 = 60^\circ$

چون **زاویه** \hat{B}_1 متقابل به راس است. $\hat{B}_2 = 60^\circ$

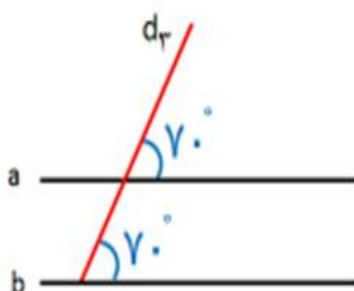
چون **مکمل** \hat{B}_2 است $\hat{B}_3 = 120^\circ$

۲- خط d_2 را بر a عمود کنید و ادامه دهید تا خط b را قطع کند. چرا d_2 بر b هم عمود است؟



چون با یکی از دو خط موازی زاویه 90° درجه می‌سازد، با دیگری هم زاویه 90° درجه می‌سازد.

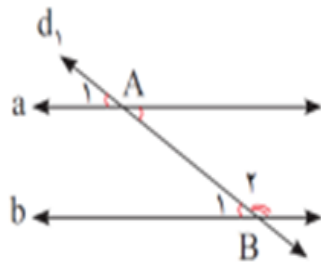
۳- خط d_3 با خط b زاویه 70° ساخته است. خط d_3 با خط a چه زاویه‌ای می‌سازد؟



۷۰ درجه

۴- دو خط a و b با هم موازی اند و خط d مورب است. پس زاویه های A_1 و B_1 با هم مساوی اند. این مطلب را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$(a \parallel b \text{ و } d \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$



چرا A_1 و B_1 مکمل اند؟ چون دو زاویه A_1 و B_1 مساویند و می توان A_1 را جایگزین B_1 کرد اگر خط a را روی صفحه انتقال دهیم تا روی خط b قرار گیرد و نقطه A روی B بیفتد، زاویه A_1 روی کدام زاویه قرار می گیرد؟ B_1 چگونه از این طریق می توان توجیه کرد که زاویه A_1 و زاویه B_1 مکمل بکدیگرند؟ توضیح دهید. چون تشکیل یک زاویه نیم صفحه می دهند پس با هم مکملند

۳۵

۱- در هر شکل یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کرده است. اندازه زاویه های

کار در کلاس



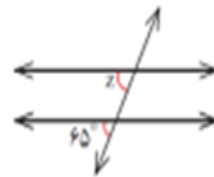
مجهول را به دست آورید.



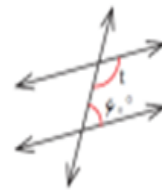
$$x = 144^\circ$$



$$y = 45^\circ$$



$$z = 65^\circ$$

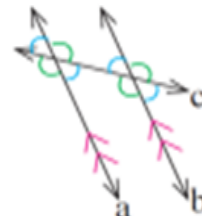
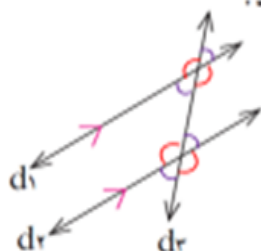


$$t = 120^\circ$$

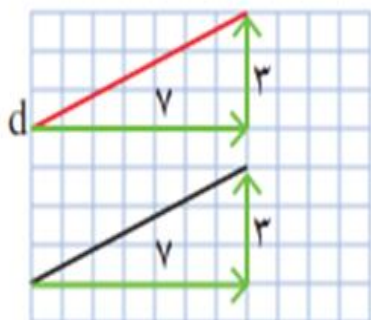
۲- موازی بودن دو خط را مانند شکل، با علامت گذاری آنها مشخص می کنیم. عبارت «خط d_1 با خط d_2 موازی نیست» را به صورت $d_1 \not\parallel d_2$ می نویسیم.

الف) عبارت های $a \parallel b$ و $a \parallel c$ را بخوانید. خط a با خط b موازی است
خط a با خط c موازی نیست

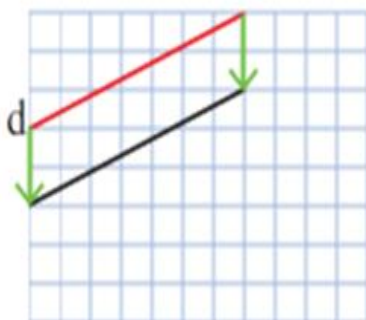
ب) زاویه های مساوی را در شکل ها با علامت گذاری مشخص کنید.



۱- می خواهیم در صفحه شطرنجی خطی موازی خط d رسم کنیم. راه حل سه دانش آموز را مشاهده کنید و توضیح دهید هر کدام از آنها چگونه خط موازی را رسم کرده است.



با استفاده از طول بردار



با انتقال



با ابزار

۳۶

۲- عمود بودن دو خط را با علامت گذاری آنها مشخص می کنیم و عبارت «خط l_1 بر خط l_2 عمود است» را به صورت $l_1 \perp l_2$ می نویسیم.



الف

$$\left. \begin{matrix} a \perp b \\ a \perp c \end{matrix} \right\} \Rightarrow b \parallel c$$

دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند

مانند نمونه، برای هر کدام شکل بکشید و جاهای خالی را پر کنید.

ج

$$\left. \begin{matrix} d \parallel e \\ d \parallel f \end{matrix} \right\} \Rightarrow e \parallel f$$

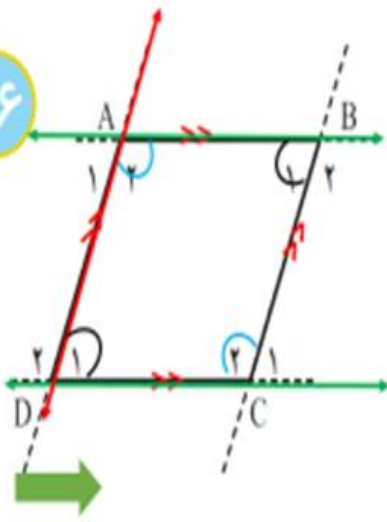
دو خط موازی با یک خط با هم موازیند

ب

$$\left. \begin{matrix} g \parallel h \\ k \perp h \end{matrix} \right\} \Rightarrow k \perp g$$

اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود بر دیگری هم عمود است

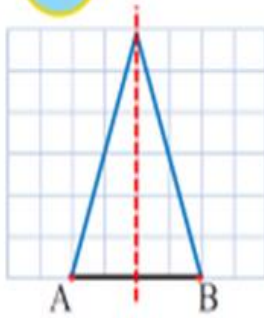
۳۶



۳- در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی‌اند. چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است. الف) ضلع‌های موازی را با علامت گذاری مشخص کنید. ب) در رابطه‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید.

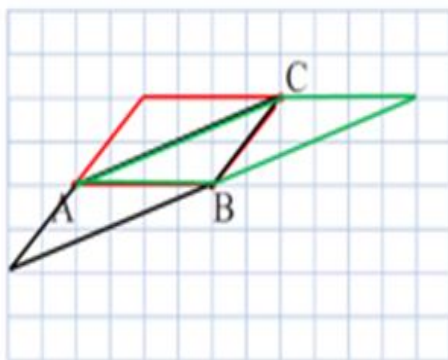
$(AB \parallel DC \text{ و } AD \parallel BC) \Rightarrow A_1 = D_1 \text{ و } A_2 = D_2$
 $(AB \parallel DC \text{ و } BC \parallel AD) \Rightarrow B_1 = C_1 \text{ و } B_2 = C_2$
 $(AD \parallel BC \text{ و } AB \parallel DC) \Rightarrow D_1 = C_1 \text{ و } D_2 = C_2$
 $(AD \parallel BC \text{ و } AB \parallel DC) \Rightarrow A_1 = B_1 \text{ و } A_2 = B_2$

۳۷



کار در کلاس

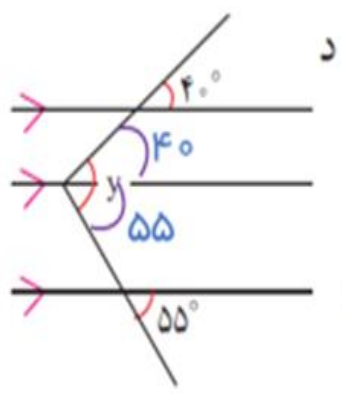
۱- الف) یک مثلث متساوی الساقین بکشید؛ طوری که پایه خط AB قاعده آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانان مقایسه کنید. ب) خط تقارن مثلث را رسم کنید. ج) آیا دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند؟ **بله** د) آیا خط تقارن، عمود منصف قاعده و نیمساز زاویه مقابل آن است؟ **بله**



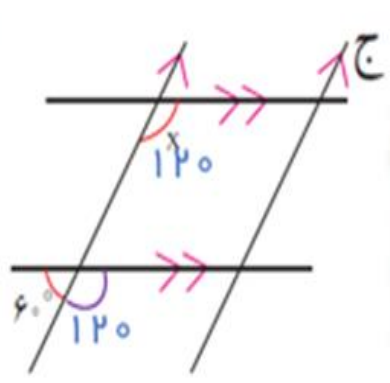
۲- متوازی الاضلاعی رسم کنید که نقاط A، B و C سه تا از رأس‌های آن باشند. پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانان مقایسه کنید. برای این سؤال چند پاسخ مختلف می‌توانید پیدا کنید؟ **سه تا**



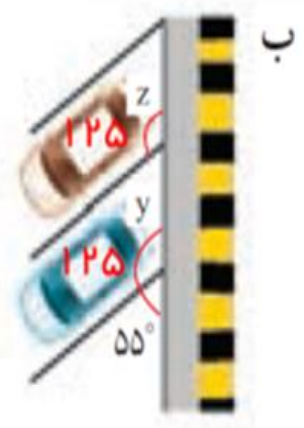
۱- در هر قسمت، اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



$$y = 95^\circ$$

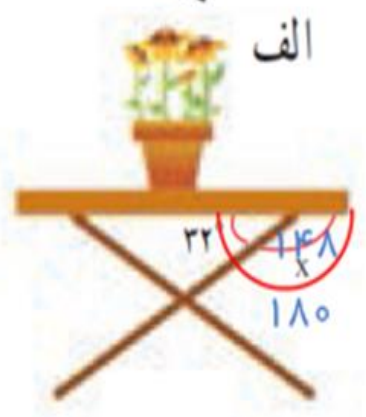


$$x = 120^\circ$$



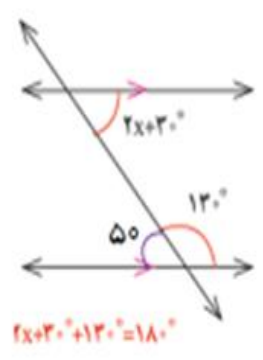
$$y = 125^\circ$$

$$x = 125^\circ$$



$$x = 148^\circ$$

۲- مانند نمونه، با تشکیل معادله، مقدار x را پیدا کنید.

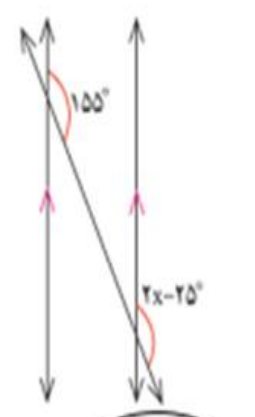


$$2x + 30 = 50$$

$$2x = 50 - 30$$

$$2x = 20$$

$$x = \frac{20}{2} = 10$$

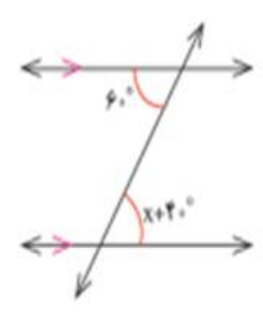


$$2x - 25 = 155$$

$$2x = 155 + 25$$

$$2x = 180$$

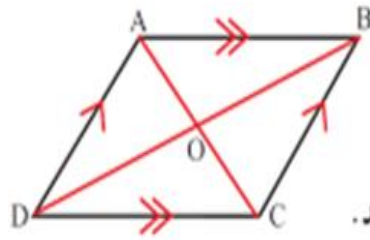
$$x = \frac{180}{2} = 90$$



$$x + 40 = 60$$

$$x = 60 - 40$$

$$x = 20$$



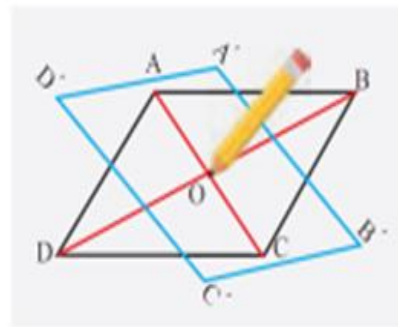
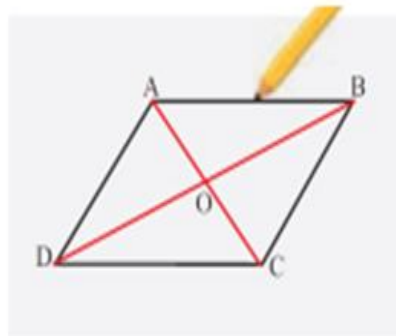
چهارضلعی‌ای که ضلع‌های روبه‌روی آن دو به دو با هم موازی‌اند، متوازی‌الاضلاع نام دارد.

۱- متوازی‌الاضلاعی را رسم و مانند شکل نام‌گذاری کنید.

یک ورق کاغذ پوستی روی آن بگذارید و تصویر متوازی‌الاضلاع را رسم کنید. فیلم ورق کاغذ پوستی در اسلاید بعد ببینید.

نوک مدادتان را روی نقطه O (محل برخورد قطر‌ها و مرکز تقارن شکل) قرار دهید و مانند

شکل‌های زیر تصویر را 180° درجه حول این نقطه بچرخانید تا بر شکل منطبق شود.



۲- با توجه به انطباق شکل و تصویر، تساوی‌ها را کامل کنید.

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \hat{B} = \hat{D} \quad \overline{AB} = \overline{CD} \quad \overline{BC} = \overline{AD}$$

هر یک از عبارات‌های زیر، یکی از خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع را بیان می‌کند. با توجه به

تساوی‌های بالا، این دو عبارت را کامل کنید.

- در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو **مساویند**
- در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو **مساویند**
- در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور **مکملند**

۳- پاره خط OA بر کدام پاره خط منطبق شده است؟ OD

پاره خط OB چگونه؟ OC

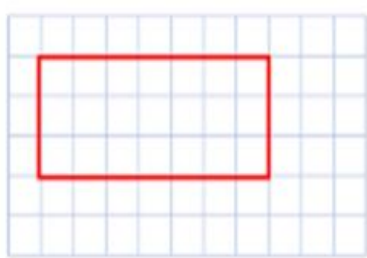
با توجه به پاسخ این دو پرسش، یک خاصیت دیگر متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید و بنویسید.

در هر متوازی‌الاضلاع، **قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند**.

۱- شکل های زیر متوازی الاضلاع اند. با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید.

زاویه های روبرو با هم برابرند

$x + 10 = 140$	$2x - 3 = 7$	$2x + 10 = 50$	$3x - 1 = 17$
$x = 140 - 10$	$2x = 7 + 3$	$2x = 50 - 10$	$3x = 17 + 1$
$x = 130$	$2x = 10$	$2x = 40$	$3x = 18$
	$x = \frac{10}{2} = 5$	$x = \frac{40}{2} = 20$	$x = \frac{18}{3} = 6$



۲- در صفحه شطرنجی متوازی الاضلاعی رسم کنید که یکی از زاویه هایش قائمه (۹۰ درجه) باشد. چرا زاویه های دیگر آن هم حتماً قائمه اند؟ توضیح دهید.

چون در متوازی الاضلاع زاویه های روبه رو مساوی و زاویه های مجاور مکملند.



۱- با توجه به تعریف متوازی الاضلاع، کدام یک از شکل های زیر متوازی الاضلاع

است؟

ه	د	ج	ب	الف
ط	ح	ز	و	

۲- در اینجا چند چهارضلعی دیگر هم تعریف شده‌اند. هر تعریف را بخوانید و از میان چهارضلعی‌های فعالیت قبل، مثال‌هایی برای هر یک پیدا کنید.

○ **مستطیل** متوازی الاضلاعی است که زاویه‌های قائمه دارد. ج-○

○ **لوزی** متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند.

○ **مربع** متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زاویه‌های قائمه دارد. الف-○

۳- می‌دانیم که «در هر متوازی الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.»

آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که «در هر لوزی هم قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند»؟ چرا؟

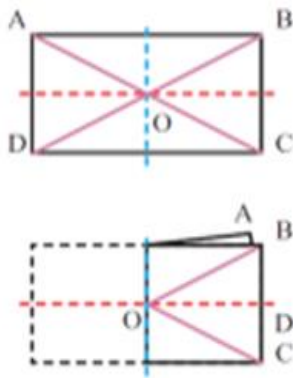
بله؛ چون هر لوزی، متوازی الاضلاع است.



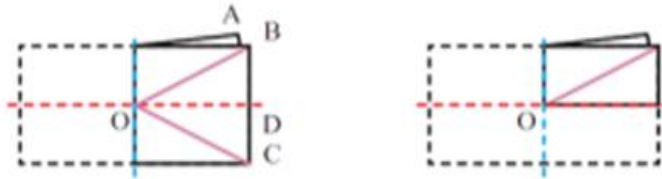
۱- با توجه به نمودار رو به‌رو، در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.



۴۰



۲- روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور آن را ببرید. مستطیل را مانند شکل نام گذاری کنید. سپس آن را ابتدا روی یکی از خط‌های تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر تا کنید.



مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به دست آمده چگونه هر یک از خاصیت‌های مستطیل را نشان

می‌دهد.

● در مستطیل قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون OA روی OC و OB روی OD قرار گرفته

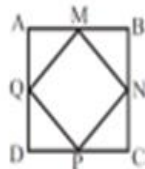
است.

الف) در مستطیل همه زاویه‌ها با هم برابرند؛ چون روی هم قرار می‌گیرند.

ب) در مستطیل ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، چون هر ضلع برضلع مقابلش منطبق می‌شود

ج) در مستطیل قطرهای با هم برابرند؛ چون نصف هر قطر بر نصف قطر دیگر منطبق می‌شود

۴۱



۳- در یک طرح کاشی کاری، مربع ABCD دیده می‌شود. چهارضلعی MNPQ هم با وصل شدن وسط ضلع‌های این مربع تشکیل شده است.

دو دانش‌آموز توضیح داده‌اند که MNPQ چه نوع چهارضلعی‌ای است. نظر این دو دانش‌آموز

در اینجا آمده است.

هادی

ABCD مربع است. این مربع را روی دو قطر آن، که محور تقارن نیز هستند، تا می‌کنیم. همه زاویه‌های چهارضلعی MNPQ روی هم می‌افتند. پس با هم برابرند. چون مجموع آنها 360° است، پس هر کدام 90° می‌شوند. در نتیجه این چهارضلعی مستطیل است.

مبین

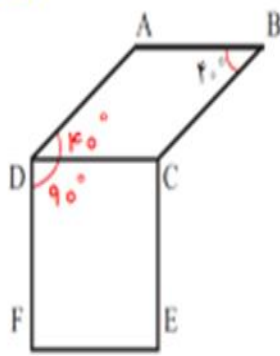
ABCD مربع است. این مربع را روی دو خط تقارنی، که موازی ضلع‌های آن هستند، تا می‌کنیم. همه ضلع‌های چهارضلعی MNPQ روی هم می‌افتند. پس، این چهارضلعی لوزی است.

دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می‌توانیم نتیجه بگیریم که MNPQ مربع است.

چهارضلعی که ضلع‌های مساوی و زاویه‌های 90° درجه دارد، مربع است.



تمرین ۱- چهار ضلعی ABCD لوزی و چهار ضلعی DCEF مربع است.



$$\left. \begin{array}{l} AD=DC \\ DC=CE \end{array} \right\} \rightarrow AD=CE \quad \text{الف) چرا } \overline{AD} = \overline{CE} ?$$

$$\left. \begin{array}{l} AB\parallel DC \\ DC\parallel EF \end{array} \right\} \rightarrow AB\parallel EF \quad \text{ب) چرا } AB\parallel EF ?$$

ج) زاویه ADF چند درجه است؟ $90 + 40 = 130$

۲- روی کاغذ، لوزی دلخواهی رسم کنید و دور آن را ببرید.

این لوزی کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به دست آمده چه نتایجی در مورد قطرهای لوزی به دست می آید.

قطرهای لوزی بر هم عمودند چون 4 زاویه که جمعشان 360 درجه است، روی هم قرار می گیرند.

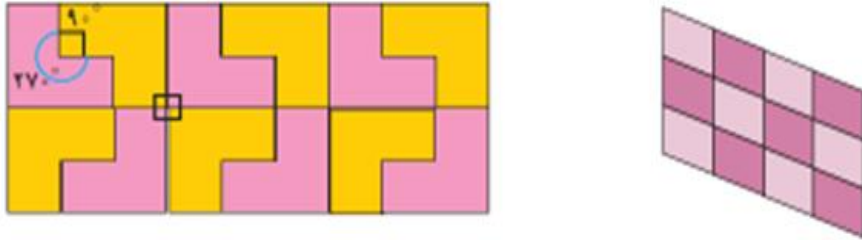
۳- وسط ضلع های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می کنیم. چهار ضلعی به دست آمده چه نوع چهار ضلعی ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

لوزی، چون اگر مستطیل را روی خطهای تقارنش تا کنیم ضلع های این چهار ضلعی روی هم منطبق می شوند.

۴- درستی یا نادرستی هر یک از جمله های زیر را بررسی کنید.

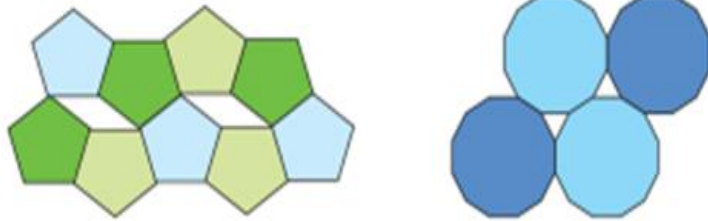
- الف) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی اند. ✓
- ب) قطرهای هر لوزی با هم مساوی اند. ✗
- ج) قطرهای هر مستطیل بر هم عمودند. ✗
- د) قطرهای هر لوزی بر هم عمودند. ✓

۱- در کاشی کاری، کاشی‌ها را طوری کنار هم قرار می‌دهند که روی هم نیفتند و جای خالی هم بین آنها نباشد. در اینجا چند نمونه کاشی کاری را مشاهده می‌کنید که هر کدام تنها با یک نوع کاشی انجام شده است.



حالا به شکل‌های زیر توجه کنید. در هر مورد توضیح دهید، چرا کاشی کاری با یک نوع کاشی

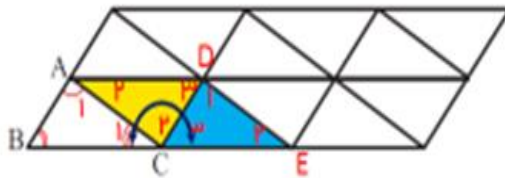
انجام نمی‌شود؟



چون ۳۶۰ درجه بر اندازه یک زاویه این کاشی‌ها بخش پذیر نیست.

۲- سطح زیر با مثلث‌هایی هم‌نهشت با مثلث ABC کاشی کاری شده است.

مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است.
مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.



$$B = D_{\mu} = C_{\nu}$$

$$A_1 = C_{\mu} = D_1$$

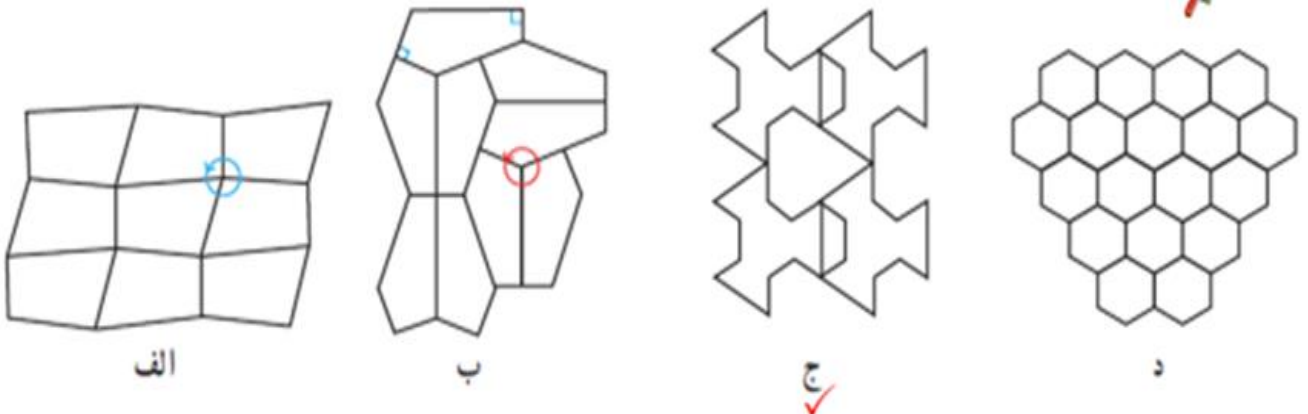
$$C_1 = A_{\nu} = E_{\nu}$$

زاویه‌های متناظر با هریک از زاویه‌های مثلث ABC را در این دو مثلث مشخص کنید.

در کاشی کاری بالا، قسمتی را که نشان می‌دهد $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ پیدا کنید.

$$C_1 + C_{\mu} + C_{\nu} = 180^\circ$$





در کدام شکل کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است؟ کار در کلاس





زایویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، زایویه‌های داخلی آن چندضلعی نامیده می‌شوند. مجموع زایویه‌های داخلی یک مثلث 180° درجه است.

۴۳

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶
شکل				
تعداد مثلث‌ها	۱	۲	۳	۴
مجموع زایویه‌های داخلی	$1 \times 180^\circ = 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$3 \times 180^\circ = 540^\circ$	$4 \times 180^\circ = 720^\circ$

جدول بالا نشان می‌دهد که مجموع زایویه‌های داخلی یک چهارضلعی با مجموع زایویه‌های داخلی دو تا مثلث برابر است؛ پس مجموع زایویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° می‌شود.

۴۳

الف) با کامل کردن جدول، مجموع زایویه‌های داخلی چندضلعی‌های دیگر را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زایویه‌های داخلی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ 900

یک هشت ضلعی چطور؟ چرا؟ $6 \times 180 = 1080$

ج) عبارت جبری زیر را طوری کامل کنید که نشان‌دهنده مجموع زایویه‌های داخلی یک n ضلعی باشد.

$$\text{مجموع زایویه‌های داخلی یک } n \text{ ضلعی} = (\underline{n} - \underline{2}) \times 180^\circ$$

اکنون با کامل کردن جدول زیر اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنید.

اندازه هر زاویه	مجموع زاویه‌های داخلی	تعداد ضلع‌ها
$\frac{180}{3} = 60^\circ$	180°	۳
$360 \div 4 = 90$	360°	۴
$540 \div 5 = 108$	540°	۵
$\frac{720}{6} = 120^\circ$	720°	۶

یک عبارت جبری بنویسید که نشان‌دهنده اندازه هر یک از زاویه‌های یک n ضلعی منتظم باشد.

$$\frac{(n-2) \times 180}{n}$$

۱- مجموع زاویه‌های هر یک از چندضلعی‌های زیر را محاسبه کنید. 

الف) هفت ضلعی منتظم

$$(7-2) \times 180 = 900$$

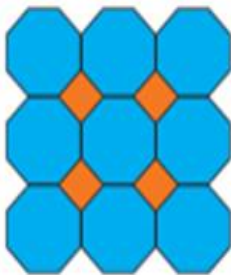
ب) دوازده ضلعی منتظم

$$(12-2) \times 180 = 1800$$

۲- به کمک جواب قسمت (ب) سؤال قبل، اندازه هر یک از زاویه‌های دوازده ضلعی منتظم

را حساب کنید.

$$1800 \div 12 = 150$$



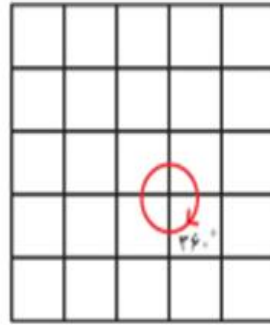
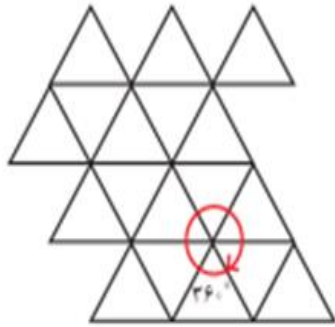
۳- سطح روبه‌رو با دو نوع کاشی منتظم کاشی کاری شده است.

اندازه زاویه‌های هر دو نوع کاشی را محاسبه کنید.

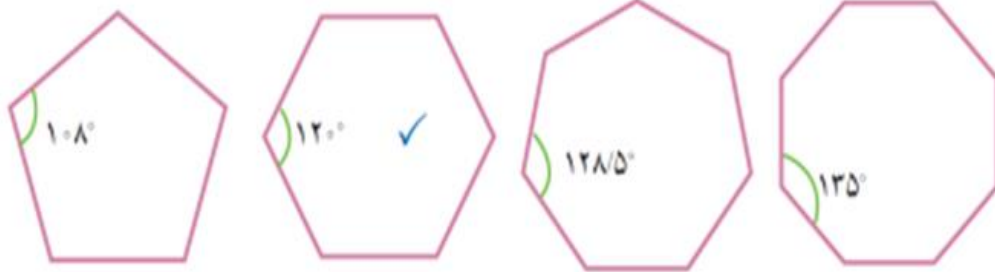
$$\text{اندازه ی هر زاویه داخلی ۸ ضلعی منتظم} = \frac{(8-2) \times 180}{8} = \frac{1080}{8} = 135^\circ$$

$$\text{اندازه ی هر زاویه داخلی ۴ ضلعی منتظم} = \frac{(4-2) \times 180}{4} = \frac{360}{4} = 90^\circ$$

۴- کاشی‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم داریم و می‌خواهیم سطحی را فقط با یک نوع از آنها کاشی‌کاری کنیم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که با سه ضلعی و چهارضلعی منتظم (یعنی مثلث متساوی الاضلاع و مربع) می‌توان کاشی‌کاری کرد.



یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی‌کاری کرد. زیرا 360° فقط بر 120° بخش پذیر است



تمرین ۱- اندازه هر یک از زاویه‌های یک بیست ضلعی منتظم را پیدا کنید.



$$\frac{18 \times 180}{20} = \frac{3240}{20} = 162^\circ$$

۲- در کاشی‌کاری روبه‌رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است.



الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ لوزی

ب) اندازه هر یک از زاویه‌های آن چقدر است؟ 120° و 60° درجه



۳- شکل روبه‌رو قسمتی از یک بشقاب قدیمی است.

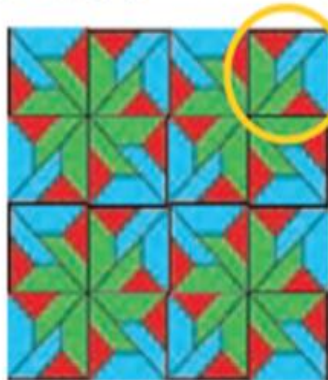
حدس می‌زنید این بشقاب چندضلعی بوده است؟ چرا؟

هشت ضلعی

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{(8-2) \times 180}{8} = \frac{1080}{8} = 135^\circ$$

اگر به جای n عدد ۸ را قرار دهیم 135° به دست می‌آید.

۴- به کاشی کاری زیر توجه کنید. این کاشی کاری با سه نوع کاشی مختلف انجام شده است. شکل سمت راست قسمتی از این طرح را به صورت بزرگ تر نمایش داده است. اندازه زاویه های



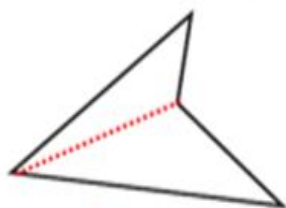
مشخص شده را به دست آورید.

شکل سمت راست مربع است و کاشی ها متساوی الساقین هستند.

قطر مربع نیم ساز زاویه های آن است. $x = 45^\circ$

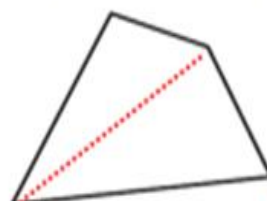
$$y = 90^\circ \quad 180 - (45 + 45) = 90$$

۵- مجموع زاویه های داخلی هر شکل را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.



(ب) مقعر

$$2 \times 180 = 360$$



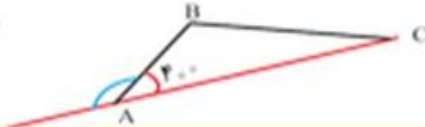
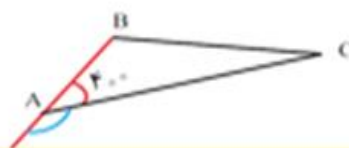
(الف) محدب

$$2 \times 180 = 360$$

زاویه های خارجی

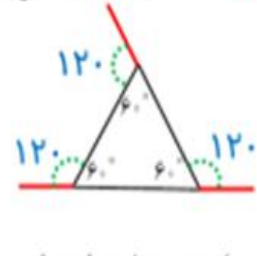
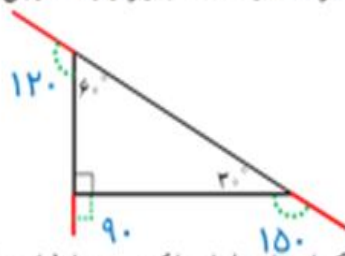
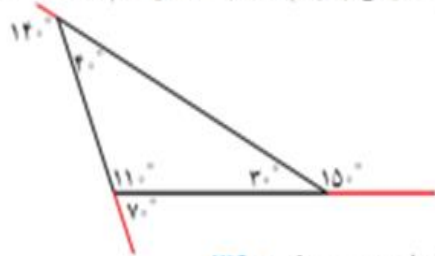


در شکل سمت چپ، زاویه خارجی رأس A از مثلث ABC از امتداد یافتن ضلع AB تشکیل شده است. در شکل سمت راست، زاویه خارجی رأس A از امتداد یافتن ضلع AC تشکیل شده است. چرا این دو زاویه مساوی اند؟



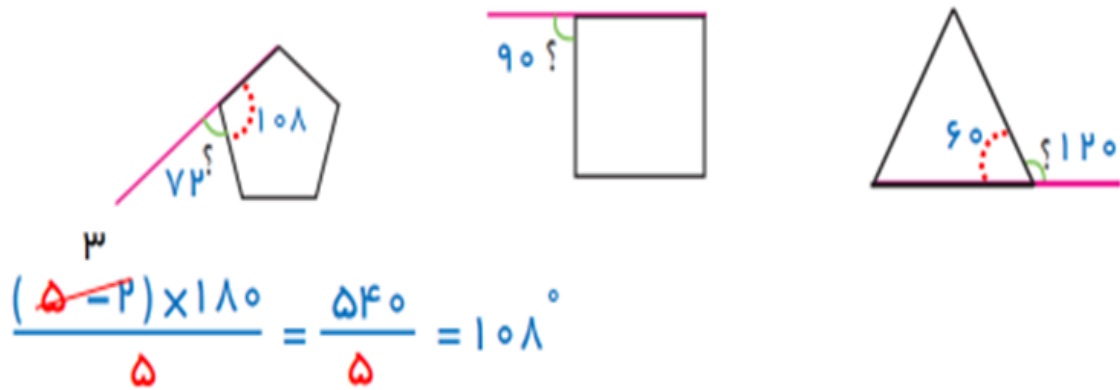
زاویه ای که در هر رأس یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می شود، زاویه خارجی آن رأس نامیده می شود.

۱- الف) مانند نمونه، در هر یک از مثلث های زیر زاویه خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه هر کدام را بنویسید.

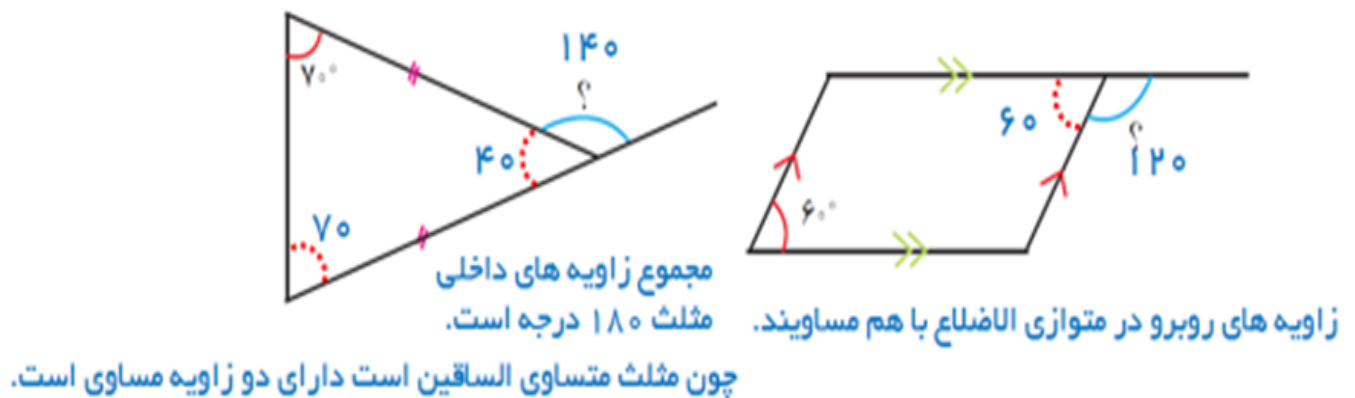


ب) مجموع زاویه های خارجی هر یک از مثلث ها را پیدا کنید. چه رابطه ای میان آنها دیده می شود؟
مجموع زاویه های خارجی مثلث ۳۶۰ درجه است.

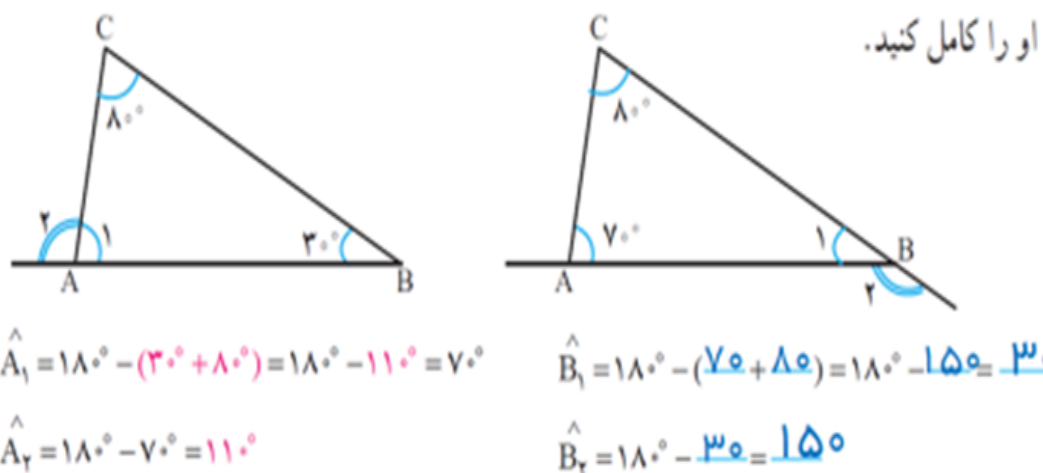
۲- چندضلعی‌های زیر منتظم‌اند. اندازه زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید.



۳- با توجه به شکل، اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



هدی برای یافتن زاویه خارجی یکی از رأس‌های مثلث به ترتیب زیر عمل کرد. راه حل



او رابطه جالبی را مشاهده کرد. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای؟

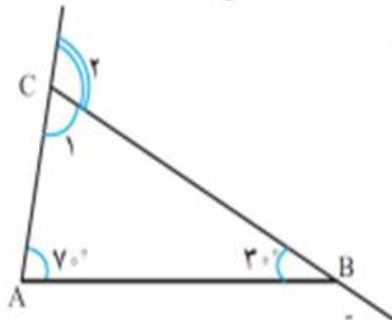
اندازه هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن مثلث

هدی با خودش فکر کرد: «آیا هر زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن

مثلث است؟» با یک مثال دیگر حدس خود را بررسی کرد.

$$\hat{C}_1 = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{C}_2 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

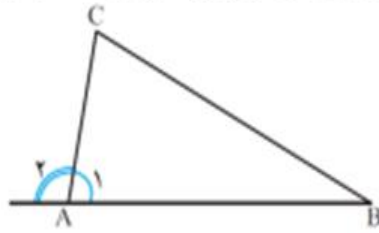


این آزمایش نیز حدس او را تأیید کرد. آیا حدس زدن و آزمایش کردن کافی است؟ چرا؟

خیر، چون همه حالت ها را در بر نمی گیرد.

یکی از دوستان هدی راه حل او را به صورت کلی و بدون در نظر گرفتن مثال نوشت تا به این

ترتیب درستی حدس او را اثبات کند.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

بنابراین در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است.



۱- مثالی بیاورید که نشان دهد جمله زیر نادرست است.

«هر زاویه خارجی یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر آن است.»

$$90 + 90 + 90 \neq 90$$

۲- اندازه دو زاویه یک مثلث را می دانیم، پس می توانیم اندازه زاویه سوم آن را پیدا کنیم.

(چگونه؟) **مجموع دو زاویه** - ۱۸۰

برای اینکه بتوانیم اندازه همه زاویه های هر یک از شکل های زیر را پیدا کنیم، دست کم چندتا

از آنها باید معلوم باشند؟ الف) لوزی ب) چهارضلعی با ضلع های نامساوی

سه زاویه

یک زاویه



سفر اول جدول زیر نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر 360° است.

تعداد ضلع‌ها	شکل	مجموع زاویه‌های داخلی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های خارجی
۳		$1 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۴		$2 \times 180^\circ$	$4 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۵		$3 \times 180^\circ$	$5 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۶		$4 \times 180^\circ$	$6 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
n		$(n-2) \times 180^\circ$	$n \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$

الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به دست آورید.
 ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ 360°
 یک هشت ضلعی چطور؟ 360°

مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی، 360° درجه است.



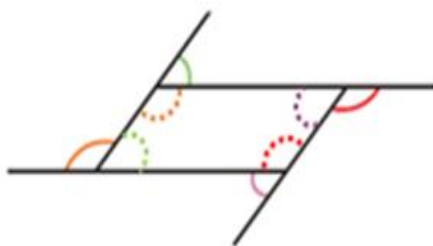
۱- مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی‌های زیر را حساب کنید.

الف) هشت ضلعی 360° درجه ب) ده ضلعی منتظم 360° درجه

۲- به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل،

الف) اندازه هر زاویه خارجی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید. $360^\circ \div 10 = 36$

ب) اندازه هر زاویه داخلی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید. $180^\circ - 36 = 144$



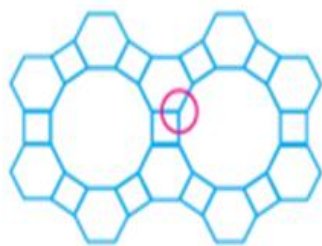
۱- زاویه‌های خارجی یک متوازی الاضلاع



در شکل نشان داده شده‌اند.

زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

۲- هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه مشخص شده در هر شکل 360° درجه است.



$$150^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 360^\circ$$



$$120^\circ + 90^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی ۱۲ ضلعی منتظم} = \frac{(12-2) \times 180^\circ}{12} = \frac{1800}{12} = 150^\circ$$

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی ۶ ضلعی منتظم} = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = \frac{720}{6} = 120^\circ$$

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی ۳ ضلعی منتظم} = 90^\circ$$

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی ۳ ضلعی منتظم} = 60^\circ$$

۳- لاک پشتی روی لبه باغچه‌ای حرکت می‌کند. او در هر گوشه می‌چرخد و روی لبه بعدی

قرار می‌گیرد.



(الف) این لاک پشت در هر گوشه به اندازه زاویه داخلی می‌چرخد یا زاویه خارجی؟

(ب) او حرکتش را از نقطه A شروع کرده است.

تا وقتی دوباره به A برگردد، روی هم چند درجه می‌چرخد؟ 360°

(ج) این لاک پشت برای پیمودن محیط هر یک از باغچه‌های منتظم زیر با شروع از نقطه مشخص شده چند

درجه می‌چرخد؟ 360°



(د) در پاسخ قسمت قبل چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید.

هر دور چند ضلعی 360° درجه است، پس مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی 360° درجه است.

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- چندضلعی محدب
- چندضلعی مقعر
- مرکز تقارن
- چندضلعی منتظم
- زاویه داخلی
- زاویه خارجی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- بررسی مرکز تقارن یک شکل
- پیدا کردن زاویه‌های مساوی در خط‌های موازی و مورب
- تعریف متوازی‌الاضلاع
- تعریف مستطیل
- تعریف لوزی
- تعریف مربع
- رابطه چهارضلعی‌ها
- خاصیت‌های چهارضلعی‌ها
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه خارجی یک رأس مثلث

کاربرد

این درس به شما در درک بهتر شکل‌های هندسی و رابطه بین آنها کمک می‌کند. ما در انواع صنایع دستی و آثار معماری کشور خود شکل‌های مختلف هندسی را می‌توانیم ببینیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- هر خانه جدول زیر را با علامت × یا ✓ کامل کنید.

ضلع‌های روبه‌رو برابر	ضلع‌های روبه‌رو موازی	زاویه‌های روبه‌رو برابر	قطرها متضاف	قطرها برابر	
✓	✓	✓	✓	×	متوازی‌الاضلاع
✓	✓	✓	✓	✓	مستطیل
✓	✓	✓	✓	×	لوزی
✓	✓	✓	✓	✓	مربع

۲- اندازه زاویه‌های داخلی و خارجی یک هشت ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$n \times 180 = 1440$$