

ریاضی: هشتم

فصل ششم: مثلث

صفحه: ۸۳ تا ۱۰۰

احمد فرخ وند

تهیه کننده:

در تهیه این فایل از اسلایدهای استاد یونس جمال پور و سایت زیر استفاده شده است. یونس جمال پور lali-riazi.blogfa.com

فصل ۶

مثلث

قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ... (سوره عنكبوت، آیه ۲۰)



خداوند در جهان هستی، نشانه‌های آفرینش و همواره تفکر و تعقل درباره آنها را از انسان خواسته است.

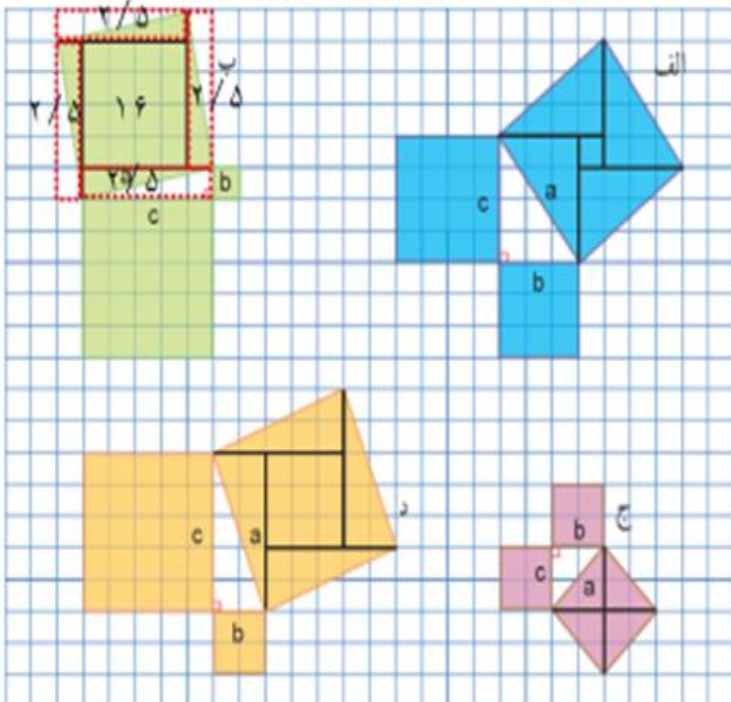
۸۴

رابطه فیثاغورس

فعالیت



۱- روی هر ضلع مثلث‌های قائم الزاویه زیر یک مربع رسم کرده ایم. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع‌های ساخته شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

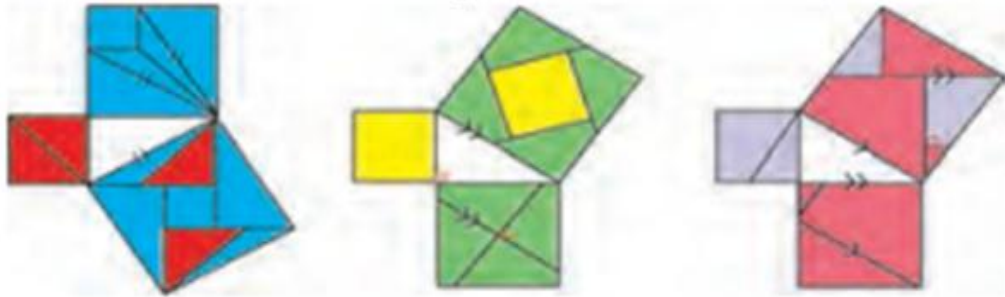


مساحت مربع ساخته شده روی ضلع c : c^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع b : b^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع a (وتر): a^2	
۱۶	۹	۲۵	الف
۲۵	۱	۲	ب
۴	۴	۸	ج
۲۵	۴	۲۹	د

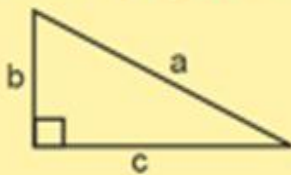
بین عدددهای هر سطر چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

۲- به هر یک از شکل‌های زیر با دقت نگاه کنید. در هر شکل روشی برای نمایش دادن رابطه میان مساحت مربع‌های تشکیل شده روی ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه آمده است.

شما هم روی کاغذ، یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی تشکیل دهید. سپس، با استفاده از یکی از این روش‌ها مربع‌های ساخته شده روی دو ضلع کوچک آن را طوری به قطعه‌های کاغذی تقسیم کنید که بتوان با این قطعه‌ها مربع روی وتر را کاملاً پوشاند.



رابطه میان مجذور (مربع) اندازه ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه، به **رابطه فیثاغورس** معروف است.



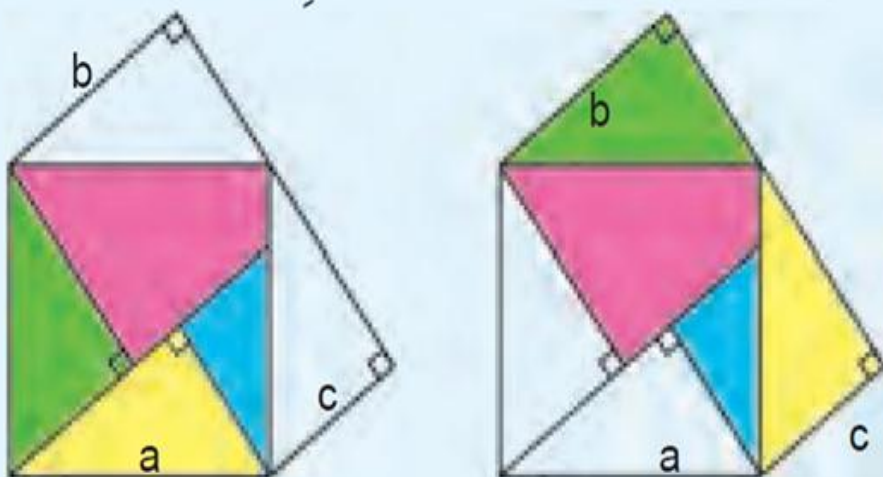
این رابطه بیان می‌کند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

عکس این رابطه هم درست است؛ یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

خواندنی

ابوالعباس نیریزی، ریاضی‌دان ایرانی، در حدود هزار سال پیش درستی رابطه فیثاغورس را به صورت زیر نشان داد.



در شکل، چهار مثلث قائم‌الزاویه هم‌نهشت دیده می‌شود.

در سمت راست، مساحت دو مربعی را که روی ضلع‌های زاویه قائمه مثلث ساخته شده‌اند، و در سمت چپ مربعی را که روی وتر ساخته شده است، رنگ کرده‌ایم. چرا مساحت ناحیه رنگی در این دو شکل برابر است؟

۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث های قائم الزاویه زیر بررسی کنید.

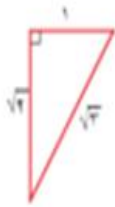
۸۶



$$9^2 = 5^2 + 7^2$$

$$81 = 25 + 49$$

$$81 = 81 \quad \checkmark$$



$$\sqrt{3}^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2$$

$$3 = 2 + 1$$

$$3 = 3 \quad \checkmark$$



$$13^2 = 12^2 + 5^2$$

$$169 = 144 + 25$$

$$169 = 169 \quad \checkmark$$

۲- به ترتیب طول x، y و z را به دست آورید.

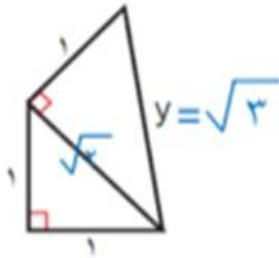


$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 1 + 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

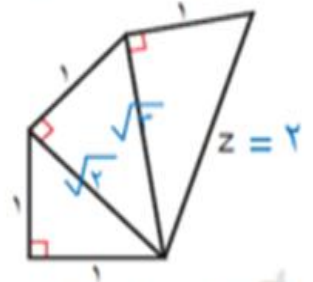


$$y^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2$$

$$y^2 = 1 + 2$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \sqrt{3}$$



$$z^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$$

$$z^2 = 1 + 3$$

$$z^2 = 4$$

$$z = \sqrt{4} = 2$$

۱- در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را مانند نمونه پیدا کنید.

۸۶

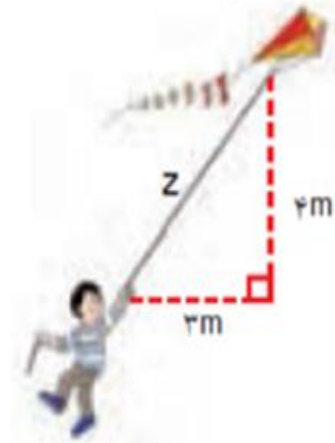


$$13^2 = x^2 + 5^2$$

$$169 = x^2 + 25$$

$$x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$x = 12$$

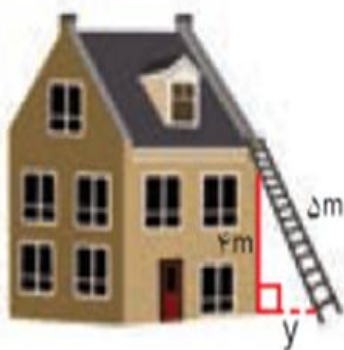


$$z^2 = 4^2 + 3^2$$

$$z^2 = 16 + 9$$

$$z^2 = 25$$

$$z = \sqrt{25} = 5$$



$$y^2 = 5^2 - 4^2$$

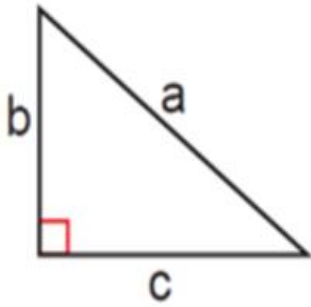
$$y^2 = 25 - 16$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \sqrt{9} = 3$$

۲- تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید.

۸۶

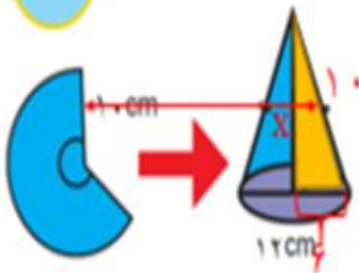


$$a^2 = \dots b^2 + \dots c^2$$

$$b^2 = \dots a^2 - \dots c^2$$

$$c^2 = \dots a^2 - \dots b^2$$

۸۷



کاردرکلاس
۱- علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی به قطر فاعده ۱۲ سانتی متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

$$x^2 = 10^2 - 6^2$$

$$x = \sqrt{64} = 8$$

$$x^2 = 100 - 36 = 64$$

۸۷

۲- معلم ریاضی از دانش‌آموزان خواست پاره‌خطی به طول $\sqrt{10}$ سانتی متر رسم کنند.

در اینجا پاسخ سه دانش‌آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و درباره ویژگی‌های

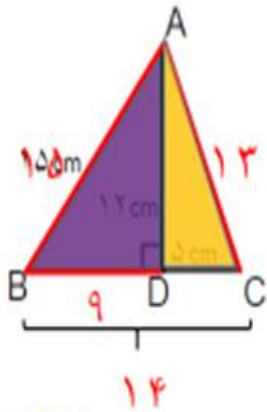
آنها گفت‌وگو کنید. کدام دانش‌آموز از روش هندسی و کدام یک از روش حسابی استفاده کرده است؟

مهسا:	سپاس:	زهرا:
		<p>به کمک ماشین حساب $\sqrt{10}$ را حساب می‌کنم.</p> <p>$\sqrt{10} \approx 3/16$</p> <p>حالا به کمک خط‌کش یک پاره‌خط به طول تقریباً $3/16$ سانتی متر رسم می‌کنم.</p>
<p>مثلثی قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ و $\sqrt{10}$ سانتی متر رسم می‌کنم.</p> <p>$1^2 + 3^2 = 10$</p> <p>پس وتر آن $\sqrt{10}$ سانتی متر خواهد شد.</p>	<p>به همین ترتیب، ساختن مثلث‌های قائم‌الزاویه را ادامه می‌دهم تا $\sqrt{10}$ ساخته شود.</p>	



۸۷

تمرین ۱- محیط مثلث ABC را حساب کنید. محیط مثلث یعنی مجموع ۳ ضلع مثلث



$$AC^2 = 1^2 + 5^2$$

$$BD^2 = 1^2 - 12^2$$

$$AC^2 = 1 + 25$$

$$BD^2 = 1 - 144$$

$$AC^2 = 169$$

$$BD^2 = 81$$

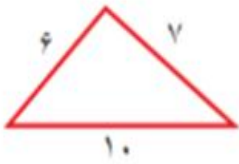
$$AC = \sqrt{169} = 13$$

$$BD = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{محیط} = 13 + 15 + 14 = 42$$

۸۷

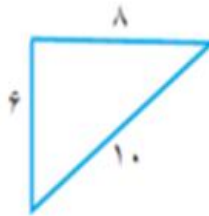
۲- کدام مثلث قائم الزاویه است؟ ضلع بزرگتر را وتر در نظر می گیریم



$$10^2 = 7^2 + 6^2$$

$$100 = 49 + 36$$

$$100 = 85 \text{ X}$$

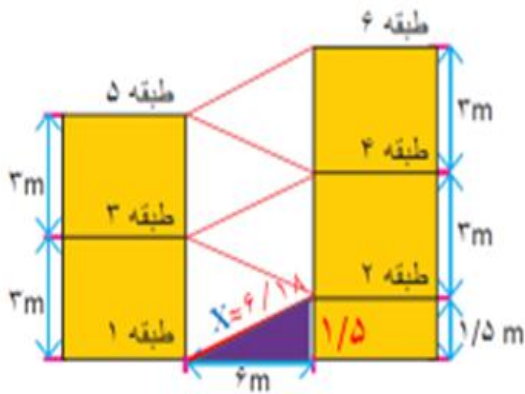


$$10^2 = 8^2 + 6^2$$

$$100 = 64 + 36$$

$$100 = 100 \checkmark$$

۸۷



۳- شکل رو به رو نمایی از یک پارکینگ طبقاتی را

نشان می دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه

بعدی می رساند، چقدر است؟

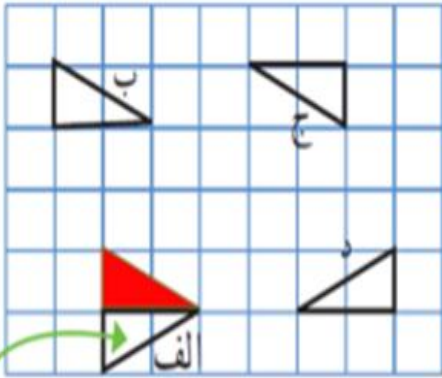
$$x^2 = 6^2 + 1/5^2$$

$$x^2 = 36 + 2/25$$

$$x^2 = 38/25$$

$$x = \sqrt{38/25} = 6/18$$

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر **هم نهشت** اند.



تقارن محوری

تقابلیت ۱- در شکل روبه‌رو، مثلث‌های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده‌اند و با آن هم نهشت‌اند. مانند نمونه مشخص کنید از کدام یک تبدیل‌های انتقال، تقارن یا دوران استفاده شده است.

ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی در این پنج مثلث را با علامت‌گذاری روی شکل نشان دهید.

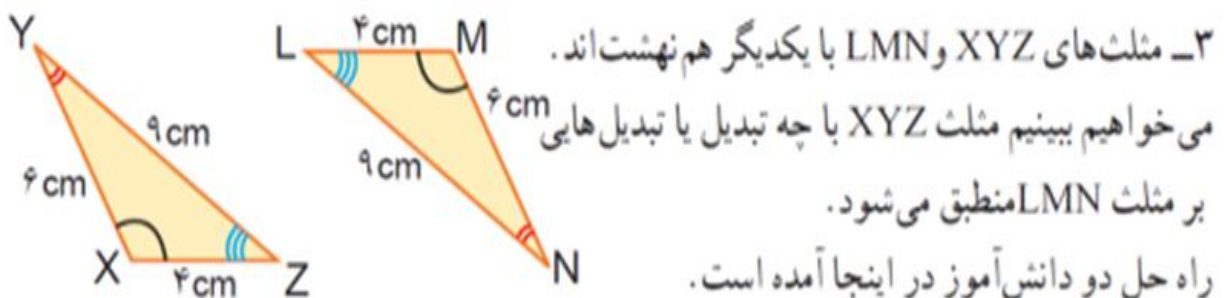
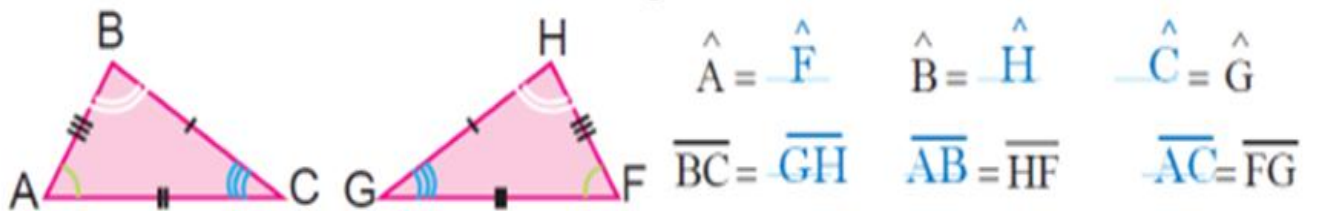
ب انتقال **ج دوران** **د تقارن**



$$\triangle ABC \cong \triangle GHF$$

۲- این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند: پس اجزای متناظر آنها نیز با هم مساوی هستند.

با توجه به علامت‌های روی شکل‌ها، تساوی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



۳- مثلث‌های XYZ و LMN با یکدیگر هم نهشت‌اند.

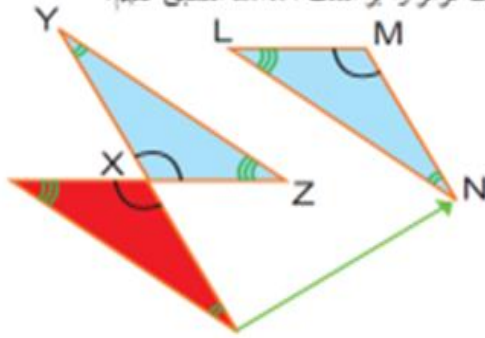
می‌خواهیم ببینیم مثلث XYZ با چه تبدیل یا تبدیلی بر مثلث LMN منطبق می‌شود. راه حل دو دانش‌آموز در اینجا آمده است.

شما هم راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید و آن را توضیح دهید. سپس راه حل خود را با راه حل‌های دوستانتان مقایسه کنید. خوب است بدانید که راه حل‌های درست بی‌شماری برای این مسئله وجود دارد.

۸۹

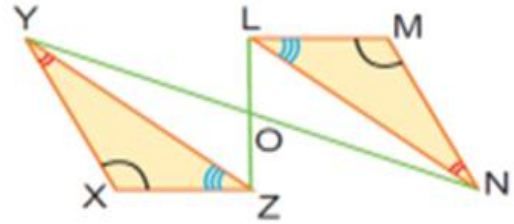
راه حل حامد:

با یک دوران 180° حول نقطه X می‌توانیم مثلث XYZ را بر مثلث قرمز رنگ منطبق کنیم و سپس با یک انتقال، مثلث قرمز را بر مثلث LMN منطبق کنیم.



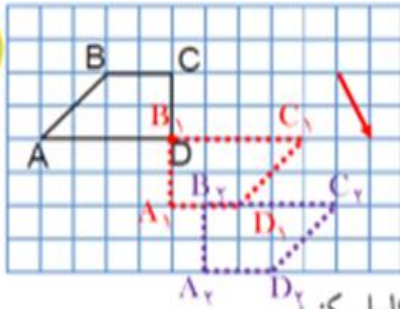
راه حل محمد:

با یک دوران 180° حول نقطه O می‌توان مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کرد.



کار در کلاس

۸۹



۱- تصویر دوزنقه $ABCD$ را پس از دوران 180° حول

نقطه D رسم کنید و آن را $A_1B_1C_1D_1$ بنامید.

سپس آن را با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ انتقال دهید.

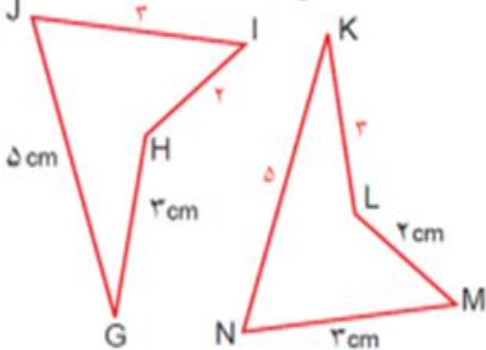
شکل جدید را نام‌گذاری کنید و عبارت هم‌نهستی شکل‌ها را کامل کنید.

$$ABCD \cong A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$$

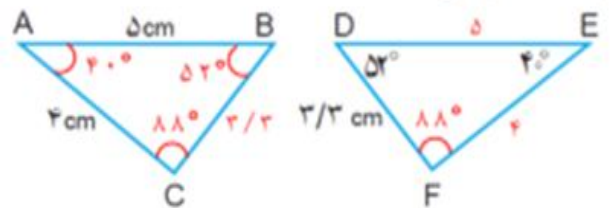
۸۹

۲- با توجه به هم‌نهستی شکل‌های هر قسمت، در صورت امکان اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را

پیدا کنید و بنویسید.

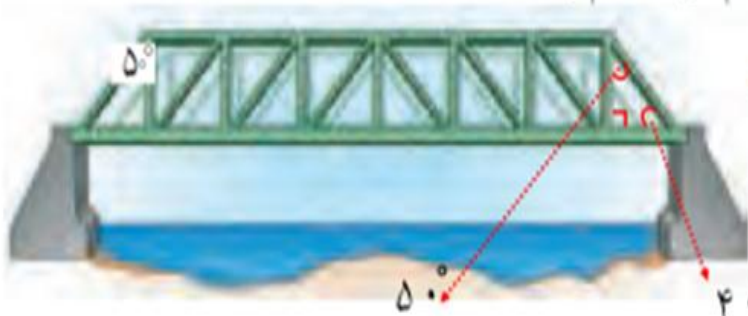


$$GHIJ \cong KLMN$$



$$ABC \cong DEF$$

۳- دیواره‌های کنار پل از مثلث‌های قائم الزاویه هم‌نهست ساخته شده‌اند.

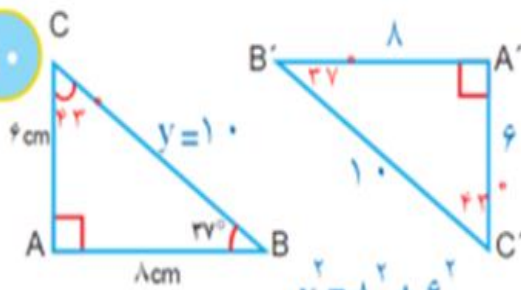


زاویه‌های مساوی را با علامت‌گذاری مشخص

و اندازه هر یک از زاویه‌های یکی از مثلث‌ها

را بنویسید.

۹۰



۱- در شکل مقابل $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ اندازه برخی ضلع‌ها و زاویه‌ها نوشته شده است. اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

$$y^2 = 8^2 + 6^2$$

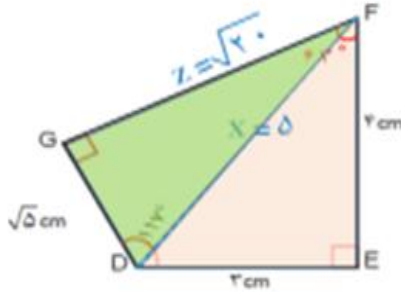
$$y^2 = 64 + 36 = 100 \quad y = \sqrt{100} = 10$$

$$x^2 = 4^2 + 3^2$$

$$x^2 = 16 + 9$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25} = 5$$



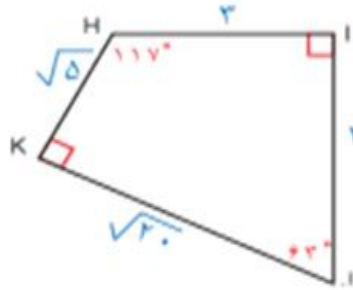
۲- چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK را به دست آورده‌ایم. اندازه برخی از ضلع‌ها و زاویه‌ها معلوم است. اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر این چهارضلعی را به دست آورید.

$$z^2 = 5^2 - \sqrt{5}^2$$

$$z^2 = 25 - 5$$

$$z^2 = 20$$

$$z = \sqrt{20}$$

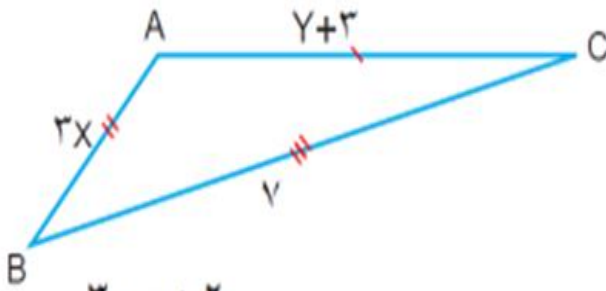


درباره رابطه‌هایی که از آنها در این دو سوال استفاده کرده‌اید، با هم گفت‌وگو کنید.

۹۰

۳- مثلث ABC را می‌توان با انتقال، بر مثلث A'B'C' منطبق کرد.

مانند نمونه، با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع‌های مثلث‌ها را به دست آورید.



$$3x = x + 2$$

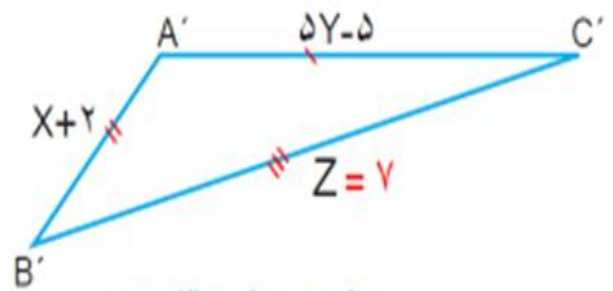
$$3x - x = 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$\overline{AB} = 3x = 3$$

$$\overline{A'B'} = x + 2 = 1 + 2 = 3$$



$$y + 3 = 5y - 5$$

$$y - 5y = -5 - 3$$

$$-4y = -8$$

$$y = \frac{-8}{-4} = +2$$

$$\overline{AC} = y + 3$$

$$\overline{A'C'} = 5y - 5$$

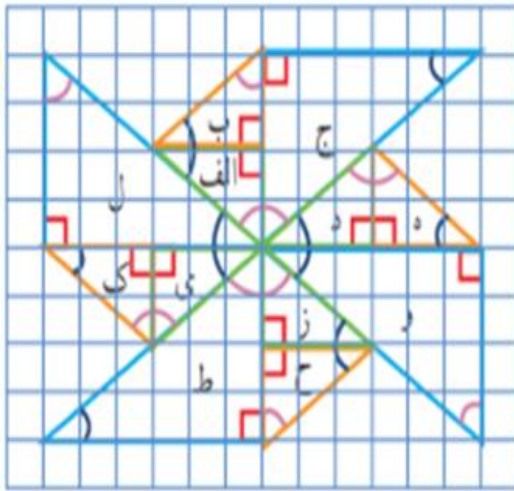
$$= +2 + 3 = +5$$

$$= 5 \times 2 - 5 = +5$$



تمرین

۹۱



۱- در شکل رو به رو زاویه‌های مساوی را با رنگ‌های یکسان مشخص کرده‌ایم.

کدام مثلث‌ها با مثلث الف هم‌نهشت‌اند؟

مانند نمونه مشخص کنید که با چه تبدیل یا تبدیلی

می‌توان مثلث الف را بر مثلث‌های هم‌نهشت با آن منطبق کرد.

چهار مورد دیگر بنویسید. پاسخ‌هایتان را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.

دوران 180°
(الف) \leftarrow (ه)

تقارن
(الف) \leftarrow (ب) \leftarrow (د)

الف دوران 180° ز الف انتقال د الف دوران 180° ز

۹۱

۲- سازه‌های مثلثی که در این پل به کار رفته‌اند، توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری

زیادی را دارند و مانع خمیدگی پل می‌شوند.

می‌دانیم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$

الف) کدام زاویه مثلث ABC روبه روی ضلع

BC است؟ \hat{A}

ب) کدام زاویه مثلث BCD روبه روی ضلع

BC است؟ \hat{D}



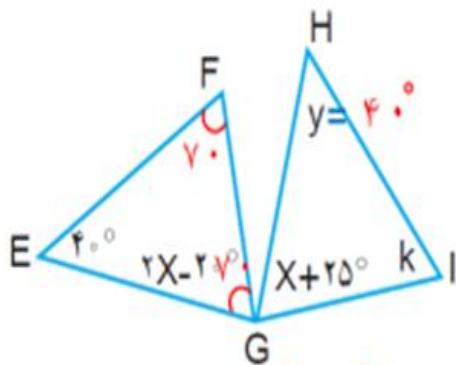
ج) مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق می‌کنیم. کدام زاویه این مثلث با زاویه A متناظر است؟ \hat{D}

۳- زاویه‌های مجهول را بیابید.

۹۱

(الف) مثلث HIG حاصل دَوَران 90° درجه EFG حول نقطه G است.

(ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



$$2x - 20$$

$$2 \times 45 - 20$$

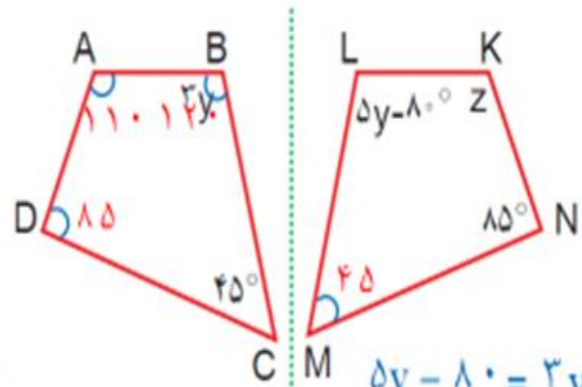
$$90 - 20 = 70$$

$$2x - 20 = x + 25$$

$$2x - x = +25 + 20$$

$$1x = +45$$

$$x = \frac{+45}{1} = 45$$



$$5y - 80 = 3y$$

$$5y - 2y = +80$$

$$2y = +80$$

$$y = \frac{+80}{2} = 40$$

۹۲

مثلث‌های هم نهشت

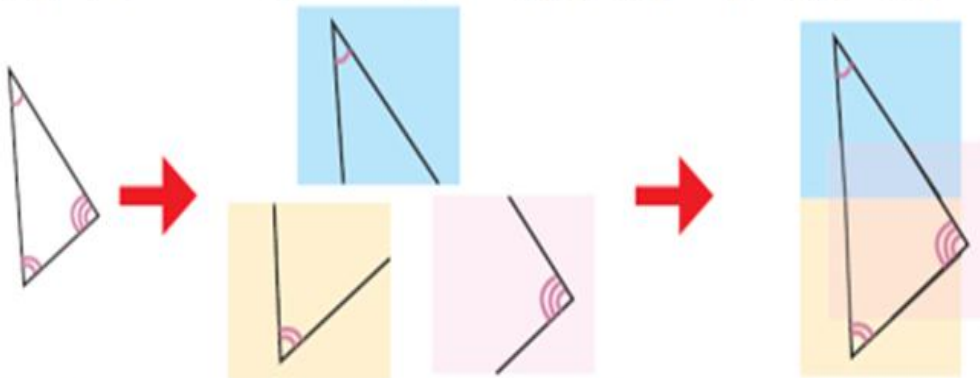


آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت‌های هندسه بودند. معلم ریاضی مثلثی روی

کاغذ رسم کرد. سپس، تصویر زاویه‌های آن را روی سه برگه کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به

کمک هم مثلثی بسازند که زاویه‌هایش با آن سه زاویه برابر باشد. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب

روبه‌رو ساختند.



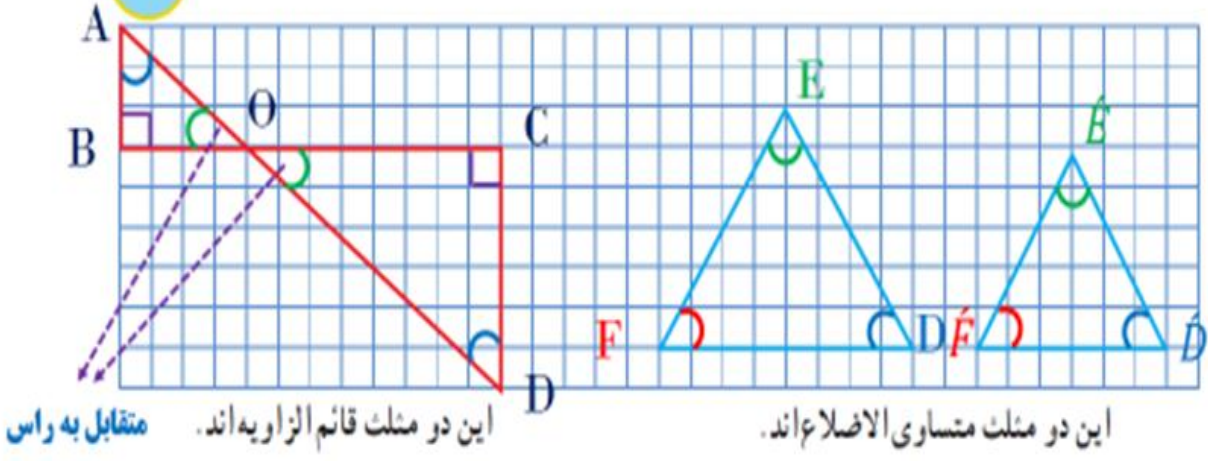
فکر می‌کنید مثلثی که آنها ساخته‌اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم نهشت است؟ **خیر**

آیا آنها می‌توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم نهشت باشد؟

بله در صورتی که اضلاع آن با اضلاع مثلث اولیه مساوی باشد

۱- زاویه‌های مساوی را در هر قسمت علامت‌گذاری کنید.

۹۲



۲- شکل‌های سؤال قبل را نام‌گذاری کنید و تساوی زاویه‌ها را بنویسید.

$$\hat{A} = \hat{D}$$

$$\hat{B} = \hat{C}$$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$$

$$\hat{E} = \hat{E'}$$

$$\hat{F} = \hat{F'}$$

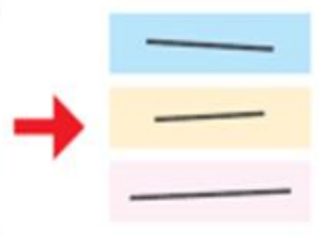
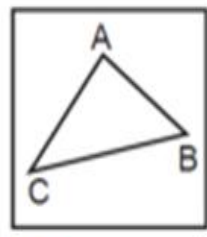
$$\hat{D} = \hat{D'}$$

حالت اول هم‌نهشتی دو مثلث: سه ضلع (ض ض ض)

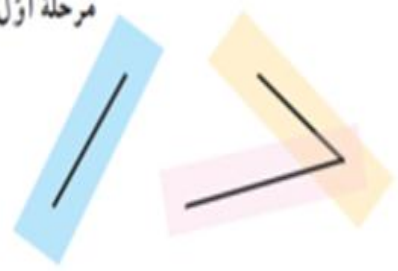


۹۲

۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر ضلع‌های آن را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن‌گاه از بچه‌ها خواست مثلثی بسازند که ضلع‌هایش با این سه ضلع برابر باشد.



مرحله اول



سامان مثلث مورد نظر را به این ترتیب ساخت:

مرحله دوم

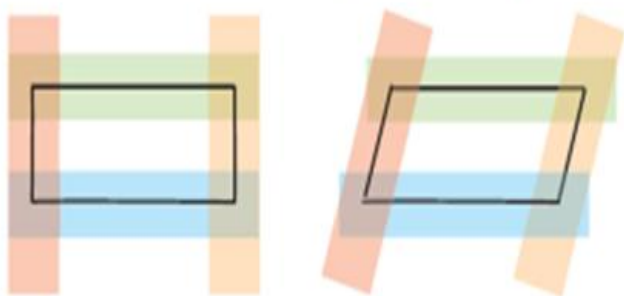


آرمان مطمئن بود مثلثی که سامان ساخته است، با مثلث معلم ریاضی هم‌نهشت است. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره آن فکر کنید.

۲- سامان پرسید: «فکر می‌کنی اگر ضلع‌های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل حتماً با یکدیگر هم‌نهشت‌اند؟»

آرمان گفت: «نه، من می‌گویم اگر ضلع‌های دو مثلث با هم مساوی باشند، آن دو مثلث حتماً با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. مثلاً این دو چهارضلعی را ببین؛ با اینکه ضلع‌هایشان مساوی است، با یکدیگر هم‌نهشت نیستند.»

سپس، با کاغذ پوستی دو چهارضلعی زیر را ساخت و به سامان نشان داد.



کار در کلاس



۱- در شکل زیر نقطه M وسط BC است. مثلث ABC متساوی‌الساقین است. پاره خطی

مانند AM که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند میانه می‌نامیم.

عبارت‌های زیر را کامل کنید و نشان دهید چرا ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده با هم برابرند.



$\overline{AB} = \overline{AC}$ چون ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند.

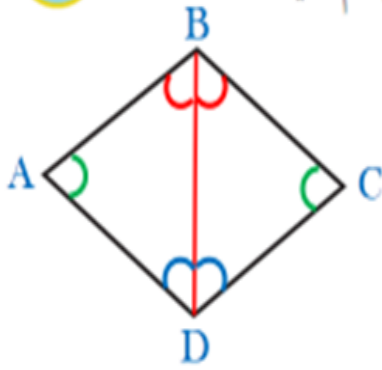
$\overline{BM} = \overline{MC}$ چون نقطه M وسط ضلع است.

AM هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم‌نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. $\triangle ABM \cong \triangle ACM$

پاره خطی که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل کند.....میانه.....نام دارد.

۹۳



۲- الف) لوزی مقابل را نام گذاری کنید و یکی از قطرهای آن را رسم کنید.
 ب) دلیل تساوی ضلع های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید.
 ج) زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

زیرا اضلاع لوزی هستند	$\overline{AB} = \overline{BC}$
زیرا اضلاع لوزی هستند	$\overline{AD} = \overline{DC}$
ضلع مشترک دو مثلث است	\overline{BD}

در حالت سه ضلع

$$\triangle ABD \cong \triangle BCD$$

۹۴

حالت دومِ همنهشتی دو مثلث: دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)

فعالیت



مثلی رسم کنید.

سپس دو ضلع آن و زاویه
 بین آن دو ضلع را روی سه برگ
 کاغذ پوستی بکشید.

مرحله اول



اکنون سعی کنید مثلی بسازید که دو ضلع آن با این
 دو ضلع برابر باشد و زاویه بین این دو ضلع هم
 برابر زاویه رسم شده باشد.

مرحله دوم



آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟ **بله**

آیا با این شرایط می توانید مثلی بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟ **خیر**

۹۴



نیمساز

در شکل مقابل نیمساز زاویه روبرو به قاعده مثلث متساوی الساقین ABC را رسم کرده ایم.

عبارت‌های زیر را کامل کنید و به کمک آنها نشان دهید دو مثلث ABD و ADC با هم هم‌نهشت هستند و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند.

$\overline{AB} = \overline{AC}$ ؛ چون **زیرا ساقهای مثلث متساوی الساقین هستند**

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ؛ چون AD نیمساز است.

AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم‌نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. $\triangle ABD \cong \triangle ADC$

در حالت دو ضلع و زاویه بین

۹۴

حالت سوم هم‌نهشتی دو مثلث: دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)

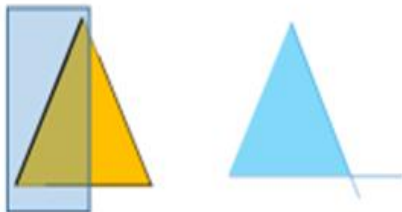
مثلثی رسم کنید و این بار دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید.

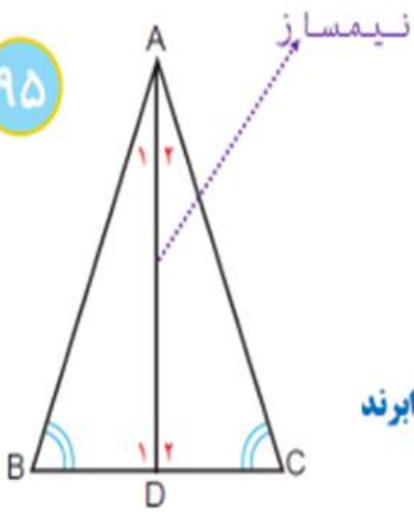


سعی کنید مثلثی بسازید که دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در آن با مثلث اولیه مساوی باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم‌نهشت است؟ **بله**

آیا می‌توانید مثلثی بسازید با همین شرایط که با مثلث اولیه هم‌نهشت نباشد؟ **خیر**





در شکل مقابل زاویه‌های B و C با هم برابرند و نیمساز زاویه A را رسم کرده‌ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم نهشت هستند و دو ضلع AB و AC با هم برابرند.

(راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن \hat{D}_1 و \hat{D}_2 دلیل بیاورید.)
 چون زاویه‌های دیگر دو به دو یا هم مساویند پس زاویه سوم آنها نیز با هم برابرند
 نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند آن مثلث **متساوی الساقین** است.

$\overline{AD} = \overline{AD}$ ضلع مشترک دو مثلث است

$A_1 = A_2$ زاویه‌های مساوی

$D_1 = D_2$ زاویه‌های مساوی
 اجزاء متناظر مساویند

در حالت دو زاویه و ضلع بین

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$

$\overline{AC} = \overline{AB}$

سه حالت هم نهشتی دو مثلث:

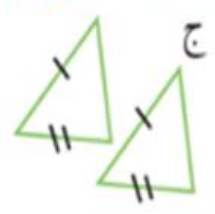
- برابری سه ضلع
 - برابری دو ضلع و زاویه بین
 - برابری دو زاویه و ضلع بین
- یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ز ض ز)



۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را

که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت هم نهشتی را بنویسید.

اطلاعات کافی نیست





۲- می‌دانیم وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید. چون در صورت برابر بودن وتر و یک ضلع در دو مثلث، ضلع سوم نیز به دلیل رابطه ی فیثاغورس برابر است. لذا دو مثلث طبق حالت سه ضلع با هم هم نهشت‌اند.

کار در کلاس



۱- پاره خط AH ، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین ABC است.

چرا مثلث‌های ایجاد شده با یکدیگر هم نهشت‌اند؟

می‌بینیم دو مثلث ایجاد شده قائم الزاویه هستند:

مثلث متساوی الساقین است: $AB=AC$

وتر مشترک است: $AH=AH$

پس دو مثلث طبق حالت وتر و یک ضلع با هم هم نهشت‌اند.

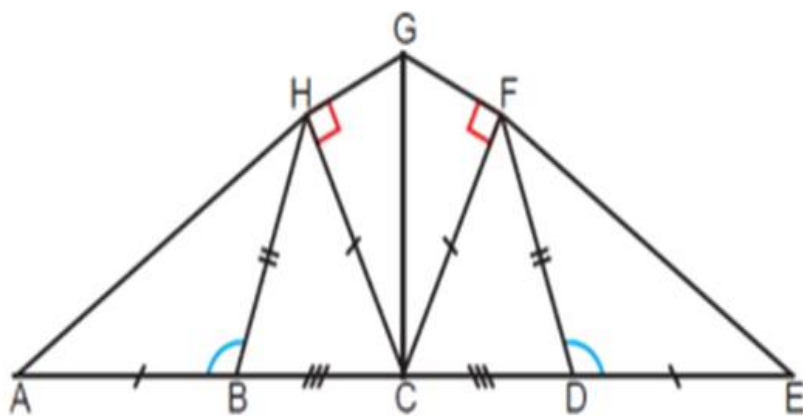


کار در کلاس



۲- با توجه به علامت‌های شکل زیر، مثلث‌های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت

هم نهشتی هر جفت مثلث را بیان کنید.



$$\triangle ABH = \triangle EDF \quad (\text{ض ض ض})$$

$$\triangle ACH = \triangle ECF$$

وتر و یک ضلع

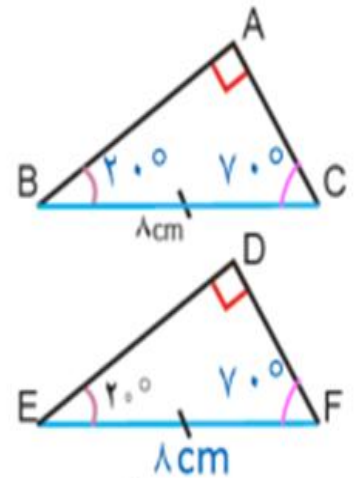
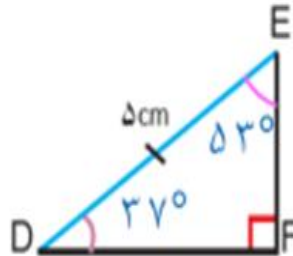
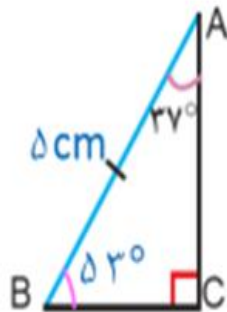
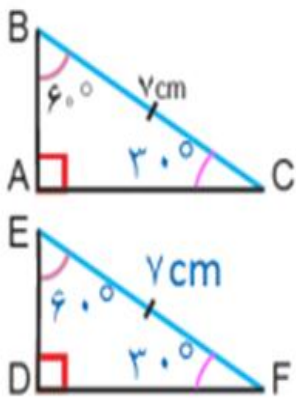
$$\triangle BCH = \triangle DCF \quad (\text{ض ض ض})$$

$$\triangle GCH = \triangle GCF$$

وتر و یک ضلع



۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.



زاویه دیگر هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟ **بله** در حالت دو زاویه و ضلع بین



۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید.
چون در صورت برابر بودن وتر و یک زاویه ی تند در دو مثلث، زاویه ی تند دیگر نیز در دو مثلث برابر است. لذا دو مثلث طبق حالت دو زاویه و ضلع بین با هم هم نهشت‌اند.

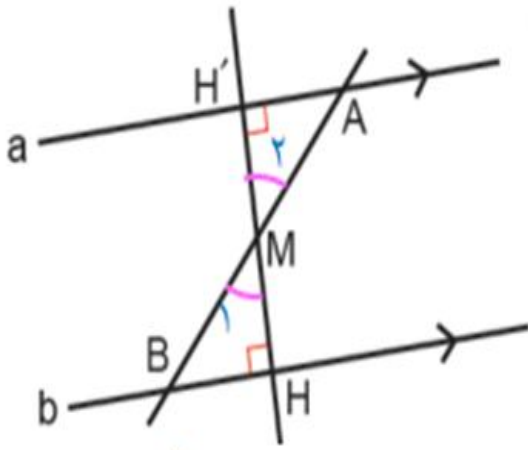
دو حالت دیگر برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه :

● برابری وتر و یک زاویه تند

یا به اختصار (وز)

● برابری وتر و یک ضلع

یا به اختصار (و ض)



۱- از نقطه M، وسط پاره خط AB، بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده ایم.

دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم نهشت اند؟

M وسط AB است. $BM=MA$

مقابل به راس $M_1 = M_2$

طبق حالت وتر و یک زاویه دو

۲- در شکل روبه‌رو، هر شانزده زاویه کوچک وسط شکل با هم

مساوی و هشت پاره خط آبی نیز با هم مساوی اند.

شانزده مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم نهشت اند؟

طبق حالت وتر و یک زاویه شانزده

مثلث هم نهشت‌اند.



شادی و مهتاب داشتند یک کتاب هندسه را مطالعه می‌کردند که به این جمله برخوردند:

«هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط

از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»

۱- مهتاب پرسید: «چرا این جمله درست است؟»

شادی سعی کرد مثالی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او پاره خطی کشید و عمود منصف آن را رسم کرد. نقطه‌ای را روی آن در نظر گرفت و فاصله

آن نقطه را از دو سر پاره خط اندازه گرفت؛ فاصله‌ها مساوی بود.

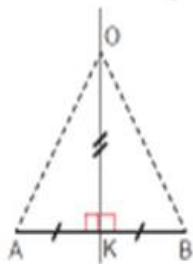
(یادآوری: فاصله دو نقطه از هم برابر طول پاره خطی است که آن نقاط را به هم وصل می‌کند.)

فکر می‌کنید شادی توانسته است دلیلی برای درستی جمله مورد نظر بیاورد؟

خیر چون فقط یک مثال زده است ولی دلیل قانع‌کننده‌ای نیاورده است.



۲- مهتاب گفت: «از کجا بفهمیم این جمله در مورد همه نقاط روی عمود منصف درست است؟»



شادی سعی کرد دلیلی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او به شکلی که کشیده بود نگاه کرد. آن را مانند

شکل رو به رو علامت گذاری کرد و گفت: «برای همه نقاط روی عمود منصف AB، مانند نقطه

O، زاویه K زاویه ای قائمه است. (چرا؟) چون OK بر AB عمود

همچنین $AK=KB$ (چرا؟) OK هم ضلع مشترک دو مثلث است. پس $\triangle AOK \cong \triangle BOK$ (در

چه حالتی؟) طبق حالت دو ضلع و

و در نتیجه $OA=OB$ (چرا؟) چون دو مثلث با هم

فکر می کنید این بار شادی توانسته است برای درستی جمله مورد نظر دلیلی بیاورد؟

بله، چون برای هر نقطه دلخواه جواب

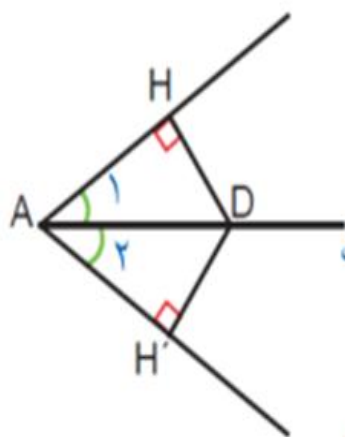
دست به دست می آید.



۳- برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید:

$AD=AD$: وتر مشترک است

$\angle A_1 = \angle A_2$: نیمساز است.



پس طبق حالت وتر و یک زاویه دو مثلث

همیشه مثلث هم نهشتانند پس از تساوی

اجزای متناظر داریم: $DH=DH'$

«هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

(یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن خط عمود می شود.)

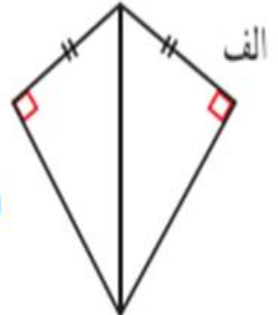


۹۹

۱- در هر شکل، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم نهشت‌اند.



وتر و یک زاویه



وتر و یک ضلع



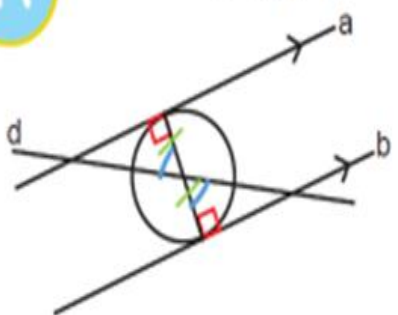
اطلاعات کافی نیست



اطلاعات کافی نیست

۲- در هر شکل، از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص می‌توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزای دو مثلث با هم مساوی‌اند. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت‌گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.

۹۹



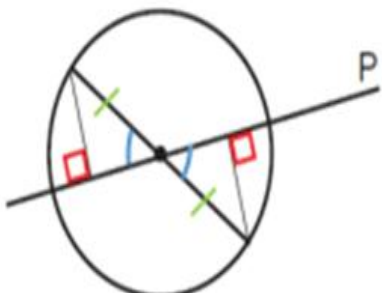
الف) خط d از مرکز دایره می‌گذرد و دو خط a و b بر قطر دایره عمودند.

زاویه‌های قائمه

زاویه‌های متقابل به راس

شعاع‌های دایره با هم برابرند.

طبق حالت (ضض)

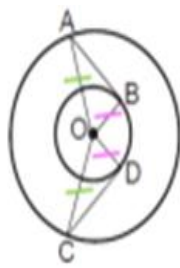


ب) خط p از مرکز دایره گذشته است.

زاویه‌های متقابل به راس

شعاع‌های دایره با هم برابرند.

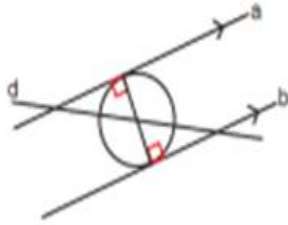
طبق حالت وتر و یک زاویه



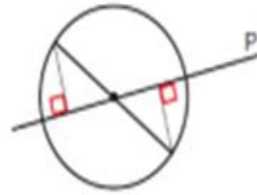
ج) نقطه O مرکز مشترک دو دایره و پاره‌خط‌های AB و CD شعاع‌های دایره‌ی بزرگ به ترتیب بر OB و OD عمودند.

شعاع‌های دایره‌ی کوچک
طبق حالت وتر و یک ضلع

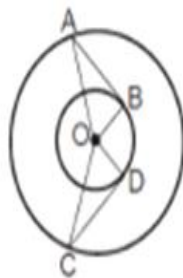
۳- در هریک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید یک مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث



دیگر منطبق کرد. **الف) دوران و تقارن مرکزی**



ب) دوران و تقارن مرکزی



ج) دوران و تقارن مرکزی و تقارن محوری

مرور فصل ۶

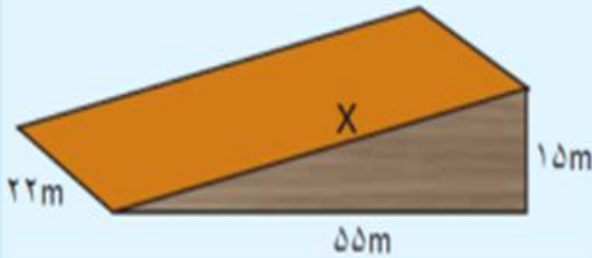
مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- پیدا کردن ضلع مجهول مثلث قائم‌الزاویه
- بررسی قائم‌الزاویه بودن مثلث با داشتن سه ضلع آن
- نوشتن اجزای متناظر دو شکل هم‌نهشت
- هم‌نهشتی دو مثلث در حالت سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین و حالت دو زاویه و ضلع بین دفتر -
- هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت وتر و یک زاویه و حالت وتر و یک ضلع
- حل مسئله‌های مربوط به هم‌نهشتی مثلث‌ها به کمک حالت‌های بالا

در نقشه‌های مهندسی و برای پیدا کردن اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های مجهول، از هم‌نهستی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر استفاده می‌کنیم.

تمرین‌های ترکیبی



۱- در شکل روبه‌رو سطح شیب‌داری را می‌بینید. طول این سطح شیب‌دار را به دست آورید.

$$x^2 = 55^2 + 15^2 = 3025 + 225 = 3250$$

$$x = \sqrt{3250} \approx 57$$

تمرین‌های ترکیبی

۲- الگوی زیر با مثلث‌های هم‌نهشت ساخته می‌شود.

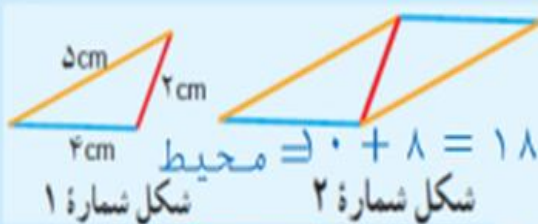
الف) دو شکل بعدی را رسم کنید.

ب) محیط هر شکل را پیدا کنید.

ج) محیط شکل شماره ۶ چقدر می‌شود؟

د) محیط شکل شماره ۷ چقدر می‌شود؟

محیط = ۲ + ۵ + ۴ = ۱۱



محیط = ۸ + ۱۰ = ۱۸

شکل شماره ۲ شکل شماره ۱



محیط = ۱۰ + ۱۶ = ۲۶

شکل شماره ۳ شکل شماره ۴



محیط = ۵ + ۲ + ۲ = ۱۹

محیط = ۲۰ + ۲ + ۵ = ۲۷

شکل شماره ۵

محیط شکل ۶ = ۳۴

محیط شکل ۷ = ۳۵