

ریاضی: هشتم

فصل هفتم: توان و جذر

صفحه: ۱۰۱ تا ۱۱۸

تهیه کننده: احمد فرخوند



اندازه تقریبی شعاع منظومه شمسی 10^{10} متر است. اندازه تقریبی شعاع جهان قابل مشاهده توسط انسان 10^{24} متر بیشتر است. تصور بالا شامل ۲۴ هزار کهکشان است. اگر می‌خواستید پانده ما کجا هستیم، باید بدانید که کهکشان راه شیری تقریباً یک نقطه کوچک در وسط‌های نقشه پندار می‌رود. فکر منظومه شمسی را هم نکنید چون خیلی کوچکتر از آن است که در این تصویر قابل دیدن باشد.

توان

یادآوری در سال گذشته، ضرب دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی و نیز توان‌های مساوی را یاد گرفتید. این قواعد را با نمادهای ریاضی به صورت زیر می‌نویسیم. اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند:

۱۰۲

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

(با برای سادگی: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ و $a^m \cdot b^m = (ab)^m$)

برای آمادگی بیشتر، تمرین‌های زیر را انجام دهید.

۱- حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$$2^6 \times 2^2 = 2^8$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{12}$$

$$8^2 \times 2^2 = 16^2$$

$$(-6)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = (-3)^4$$

$$2^5 \times 3^2 \times 6^5 \times 4^2 = 12^5 \times 12^2 = 12^7$$

$$3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times 81 = 3 \times 3^4 = 3^5$$

$$36 \times 144 = 6^2 \times 12^2 = 72^2$$

$$2^2 \times 8^5 \times 4^2 = 8^2 \times 8^5 = 8^7$$

۲- حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان دار بنویسید.

۱۰۲

$$a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$(xy)^r \times (xy)^s = (xy)^{r+s}$$

$$x^r \times y^r = (xy)^r$$

$$125 \times 18^2 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 10^3$$

$$(ab)^r \times a^r \times b^r = a^r b^r$$

$$8a \times (2a)^2 \times 2a^2 = 2^3 \times a^5 = (2a)^5$$

۳- حجم مکعبی به ضلع $2a$ چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است؟ **۸ برابر**

۴- جاهای خالی را با عددها و حرف های مناسب پر کنید.

$$18^5 = (6 \times 3)^5$$

$$a^8 = a^2 \times a^6$$

$$7^0 \times 4^5 = 4^5$$

$$\left(-\frac{7}{2}\right)^7 \times \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^9$$

$$(4 \times 3)^6 = 4^6 \times 3^6$$

۱۰۳

صل عبارت $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2$ را به دو روش زیر می توان نشان داد.



$$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2+2} = 2^{12}$$

$$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = (2^2)^4$$

با مقایسه تساوی های بالا، آیا می توان نتیجه گرفت: $(2^2)^4 = 2^{12}$

اکنون، درستی تساوی های زیر را به هر روشی که می توانید بررسی کنید.

$$(7^2)^5 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2$$

$$(7^2)^5 = 7^{10} = 7^{2+2+2+2+2} = 7^{10}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+3+3+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$[(-2)^2]^7 = (-2)^2 \times (-2)^2 \times (-2)^2 \times (-2)^2 \times (-2)^2 \times (-2)^2 \times (-2)^2$$

$$\left[(-2)^2\right]^7 = (-2)^{14} \quad (a^2)^4 = a^8$$

$$\left[(-2)^2\right]^7 = (-2)^{2+2+2+2+2+2+2} = (-2)^{14} \quad (a^2)^4 = a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2+2} = a^8$$

۱۰۳

آنچه را فرا گرفته‌اید، به صورت یک قانون کلی بیان کنید.
 اگر a عددی دلخواه و m و n عددهایی طبیعی باشند، آن گاه:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

اگر عدد توان داری به توان برسد برای ساده کردن، توان‌ها را در هم ضرب می‌کنیم

کار در کلاس 

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$(5^7)^2 = 5^{14}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\left[(-6)^2\right]^5 = (-6)^{10}$$

$$\left[(-\frac{1}{v})^3\right]^4 = \left(-\frac{1}{v}\right)^{12}$$

$$(18^2)^7 = 18^{14}$$

$$(x^2)^8 = x^{16}$$

$$[(ab)^3]^2 = (ab)^6$$

$$(xy^2)^3 = x^3y^6$$

$$(2^m)^n = 2^{mn}$$

۲- کدام یک از تساوی‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ توضیح دهید.

۱۰۴

$\times (3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$	$\checkmark 3^5 \times 3^5 = (3^5)^2$
$\checkmark (3^2)^4 = 3^8$	$\times (3^0)^2 = 3^1$
$\times (5^2)^2 = 5^1$	$\times 3^2 \times 3^2 = 3^6$
$\checkmark 3^5 \times (2^2)^5 = 12^5$	$\times a^2 \cdot a^1 = 1$
$\checkmark ((-2)^3)^2 = 2^6$	$\times (-4^6) = 4^6$

۳- حاصل عبارت $(-5)^2 \times [(-5)^2]^3$ برابر کدام یک از اندازه‌های زیر است؟

(ب) -5^8

(الف) $(-5)^8$ \checkmark $(-5)^8 \times (-5)^2 = (-5)^{10}$

$$9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$$

۴- در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.



تمرین ۱- حجم مکعبی به ضلع ۸cm را به صورت یک عدد توان دار، که پایه آن عدد ۲

۱۰۴

باشد، بنویسید.

$$8 \times 8 \times 8 = 8^3 = (2^3)^3 = 2^9$$

۲- بیست و هفت برابر عدد ۹^۵ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$27 \times 9^5 = 3^3 \times (3^2)^5 = 3^3 \times 3^{10} = 3^{13}$$

۳- حاصل هر یک از عبارات های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$$[(-3)^2]^2 = (-3)^4 \quad [(3^2)]^2 = 3^4$$

$$2^5 \times 2^2 \times 3^7 \times 6^2 = 2^7 \times 3^7 \times 6^2 = 6^7 \times 6^2 = 6^9 \quad 2^{40} \times 2^{20} \times 2^{40} = 2^{120}$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \quad x^{10} y^6 \cdot (x^2)^5 \cdot (y^2)^2 \cdot x^2 y^4 = x^{17} y^{10}$$

$$\left(-\frac{5}{6} \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{7}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

۴- کدام عددهای طبیعی را می توان به جای نوشت تا نامساوی زیر درست باشد؟

۱۰۵

(۴) $(-2) > 15$

چون هر عدد منفی به توان عدد فرد منفی می شود و از ۱۵ کوچکتر است پس جواب عددهای زوج طبیعی بزرگتر از ۴

۱۶ > ۱۵

۵- حاصل ۲^۷+۲^۷ و حاصل ۳^۵+۳^۵+۳^۵ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$2^7 + 2^7 = 2 \times 2^7 = 2^8 \quad 3^5 + 3^5 + 3^5 = 3 \times 3^5 = 3^6$$

۶- عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را طوری در جاهای خالی قرار دهید که یک تساوی درست به دست

آید. (از هر چهار عدد استفاده کنید).

$$(3) \times (2)^2 = (5)^2 - (1) \quad (4)$$

روش حدس و آزمایش

۷- مقدار عددی عبارت های زیر را به ازای a=۶ و b=-۲ و c=-۴ به دست آورید.

$$\text{الف) } -2(a + b^2) + \frac{c^2}{b} = -2 \times (6 + (-2)^2) + \frac{(-4)^2}{(-2)} = -20 - 8 = -28$$

$$\text{ب) } \left(\frac{a}{b}\right)^2 + bc - 10 = \left(\frac{6}{-2}\right)^2 + (-2)(-4) - 10 = 9 + 8 - 10 = 7$$



دمای مرکز خورشید حدود 10^7 درجه سانتی گراد است. این دما چند برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید؟ پاسخ را ضمن کامل کردن جاهای خالی به صورت یک عدد توان دار بیان کنید و مراحل حل مسئله را نیز توضیح دهید.

حل: آب در 100 درجه سانتی گراد به جوش می آید و داریم: $100 = 10^2$

$$10^7 \div 10^2 = \frac{10^7}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10^5$$

بنابراین: $10^7 \div 10^2 = 10^5$

یعنی دمای مرکز خورشید 10^5 برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید.

آیا تقسیم بالا را به شکل زیر نیز می توانیم انجام دهیم؟

$$\frac{10^7}{10^2} = \frac{10^2 \times 10^5}{10^2} = 10^5$$

اکنون، حاصل هر یک از تقسیم های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۱۰۶

$$(-9)^5 \div (-9)^2 = \frac{\cancel{(-9)} \times \cancel{(-9)} \times (-9) \times (-9) \times (-9)}{\cancel{(-9)} \times \cancel{(-9)}} = (-9)^3$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{\frac{3}{2}} \times \cancel{\frac{3}{2}} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}}{\cancel{\frac{3}{2}} \times \cancel{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

با استفاده از نمونه های داده شده، برای محاسبه تقسیم دو عدد توان دار با پایه های

مساوی قانونی بنویسید. **در تقسیم دو عدد توان دار اگر پایه ها مساوی باشد، یکی از پایه ها را می نویسیم و توان ها را از هم کم می کنیم.**

a عددی دلخواه و m، n عددهایی طبیعی باشند:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$8^1 \div 8^0 = 8^1$$

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^4$$

$$6^2 \div 6 = 6^1$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$\frac{(-2)^9}{(-2)^2} = (-2)^7$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^2 \div \left(\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^6 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^4$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\frac{7^5}{7} = 7^4$$

۲- جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$\frac{2^{15}}{(2^2)^5} = 1$$

$$3^5 \div 3^1 = 3^4$$

$$14^5 \div (14)^2 = 14^3$$

$$\frac{7^3}{7^5} = \frac{1}{7^2}$$

۳- حاصل را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

$$a^{12} \div a^5 = a^7$$

$$(xy)^5 \div (xy)^2 = (xy)^3 \quad (-x)^5 \div (-x)^2 = (-x)^3$$

۱۰۷ فعالیت تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی



مثال‌های داده شده را مطالعه کنید و با پرکردن جاهای خالی توضیح دهید که پاسخ

هر یک از تقسیم‌ها چگونه به دست آمده است.

$$12^4 : 6^2 = \frac{12^4}{6^2} = \frac{12 \times 12 \times 12 \times 12}{6 \times 6} = \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} = \left(\frac{12}{6}\right)^4 = 2^4$$

$$3^5 : 7^5 = \frac{3^5}{7^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = \left(\frac{3}{7}\right)^5$$

$$(-4)^2 : 6^2 = \frac{(-4)^2}{6^2} = \frac{(-4) \times (-4)}{(-6) \times (-6)} = \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$12^4 : 6^2 = \frac{12^4}{6^2} = \frac{2^4 \times 6^4}{6^2} = 2^2$$

با توجه به مثال‌های صفحه قبل، توضیح دهید تساوی $8^5 \div 2^5 = 4^5$ چگونه به دست آمده است.

۱۰۸

اکنون، برای تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی، قانون زیر را کامل کنید.

در تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی یکی از توان‌ها را می‌نویسیم و پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

به کمک قانونی که نوشته‌اید، حاصل تقسیم‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$6^4 \div (-2)^4 = (-3)^4 = 6^4 \quad 6^8 \div 3^8 = 2^0$$

اکنون قانون فوق را با نمادهای ریاضی هم نشان دهید.

$$a^m \div b^m = (ab)^m$$

a و b دو عدد دلخواه و m یک عدد طبیعی و $b \neq 0$

کار در کلاس

۱- حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$5^7 \div 3^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^7$$

$$14^2 \div 7^2 = 2^2$$

$$(-8)^5 \div (-2)^5 = 4^5$$

$$9^2 \div 27^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

۲- عبارتهای زیر را ساده کنید و در صورت امکان، پاسخ را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

۱۰۸

$$5^7 \times 3^2 \times 2^7 \times 3^2 = 10^7 \times 3^4 = 30^4 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{30^7 \times 30^5}{6^{10} \times 5^{10}} = \frac{30^{12}}{30^{10}} = 30^2 \quad \frac{(a^2)^4}{a^2} = \frac{a^8}{a^2} = a^6 \quad \frac{(x^2)^5 \times x^7}{x^{11}} = \frac{x^{10} \times x^7}{x^{11}} = \frac{x^{17}}{x^{11}} = x^6$$

تمرین

۱- هر یک از عددهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$$81 = 3^4 \quad 27 = 3^3 \quad 9 = 3^2 \quad 3 = 3^1$$

$$-8 = -2^3 \quad 1024 = 2^{10}$$

$$\frac{125}{729} = \frac{5^3}{3^6}$$

$$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} \quad \frac{1}{512} = \frac{1}{2^9}$$

$$729 = 3^6 \quad 243 = 3^5 \quad 81 = 3^4 \quad 27 = 3^3 \quad 9 = 3^2 \quad 3 = 3^1$$

۲- کدام عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟ توضیح دهید.

۱۰۸

$$\left(-\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = +\frac{25}{4}$$

$$\times \left(\frac{-5}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4}$$

$$\times \left(\frac{15}{11}\right)^0 = 0$$

$$\times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

$$\checkmark \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\times 10^2 \times 10^4 = 10^{12}$$

$$\checkmark (-2)^2 \times (-2) = 16$$

۱۰۹

۳- حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3^2 \times 3^0 = 3^6$$

$$\left(\frac{5^6 \times 6^3}{5^2 \times 6^5}\right) = \frac{5^2}{6^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \quad \frac{x^y \times y^x}{x^5 \times y^2} = x^2 \times y^2 = (xy)^2$$

۴- در جاهای خالی عدد مناسب بگذارید.

$$3^5 \times 3^{\text{④}} = 3^9$$

$$(7^2)^{\text{②}} = 7^8$$

$$\frac{7^{\text{⑥}} \times 7^2}{7^3} = 7^5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\text{⑦}} \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{(-6)^8}{(-6)^{\text{⑤}}} = (-6)^3$$

۱۰۹

۵- عددهای زیر را از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید.

$$6^5, 1^{12}, -4^3, (-1)^5, 0, \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow -4^3 < (-1)^5 < 0 < 1^{12} < \left(\frac{1}{2}\right)^5 < 6^5$$

۶- کدام تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

$$\times (\sqrt{5})^2 = 25 \quad \checkmark (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \checkmark (\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})^2 \quad \times +\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-10^2)^2 = -1000000 \quad [(-10^2)^2]^2 = 1000000 \quad (x^2 y^2)^4 = x^8 y^8 \quad \left(\frac{x^y}{x^3}\right)^5 = \left(x^{\frac{y}{3}}\right)^5 = x^{\frac{5y}{3}}$$

$$\frac{[36^5 \div (-3)^5] \div [(-2)^5 \times (-3)^5]}{(-12)^5 \div (+6)^5} = (-2)^5$$

۸- نصف 2^1 و ربع 4^2 را به صورت عددهای توان‌دار بنویسید. نصف = $\frac{1}{2}$ ربع = $\frac{1}{4}$

$$4^2 \div 4^1 = 4^1$$

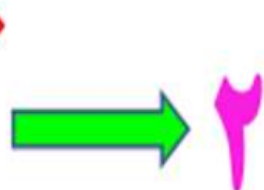
$$2^1 \div 2^1 = 2^0$$

۱۰۹

رشد باکتری‌ها به شرایط مناسب محیطی و وجود مواد غذایی بستگی دارد. در شرایط مطلوب باکتری‌ها در هر ۲۰ دقیقه به دو نیم تقسیم می‌شوند، سپس در ۲۰ دقیقه دیگر رشد کرده دوباره هر کدام به دو قسمت تقسیم می‌شوند. تکثیر باکتری‌ها تا جایی ادامه پیدا می‌کند که مواد غذایی لازم موجود باشد، برای مثال اگر در حال حاضر ۲ باکتری داشته باشیم، در ۲۰ دقیقه دیگر $2 \times 2 = 2^2 = 4$ باکتری و در ۶۰ دقیقه دیگر $2^3 = 16$ باکتری خواهیم داشت. به نظر شما اگر مواد غذایی لازم موجود باشد، پس از گذشت ۲۴ ساعت چند باکتری خواهیم داشت؟

$$24 \times 60 = 1440$$

$$1440 \div 20 = 72$$



۷۲

عدد بسیار بزرگی است
که ۲۲ رقم دارد.

۱۱۰

درس سوم: جذر تقریبی

فعالیت



۵-

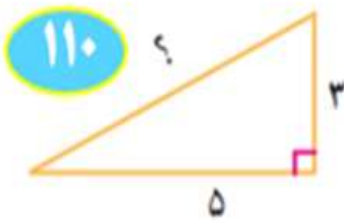


عرض کانال ۵ متر

ارتفاع دیوار
۳ متر

آزاده، نرگس و نسیم هنگام گردش علمی به یک آب‌گذر (کانال) به عرض ۵ متر رسیدند. در طرف دیگر آب‌گذر دیواره‌ای به ارتفاع ۳ متر وجود داشت. آنها می‌خواستند بدانند اگر پلی برای رفتن به طرف دیگر آب‌گذر ساخته شود، طول آن چقدر خواهد بود؟

در ادامه، گفت‌وگوی این سه دانش‌آموز را می‌خوانید که برای حل این مسئله صورت گرفته است. با دقت در این گفت‌وگو سعی کنید نظر هر دانش‌آموز را توضیح دهید.



آزاده: به نظر من این مسئله مانند آن است که یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۳ و ۵ متر داشته باشیم و بخواهیم وتر آن را به دست آوریم.

نرگس: پس می‌توانیم از رابطه فیثاغورس استفاده کنیم.

نسیم: یعنی رابطه مقابل را داریم: $۳^۲ + ۵^۲ = ۳۴ = \text{مربع وتر}$

آزاده: درست است. اکنون برای به دست آوردن طول وتر باید جذر عدد ۳۴ را به دست آوریم.

نرگس: چون $۲۵ < ۳۴ < ۳۶$ پس $\sqrt{۳۴}$ بین دو عدد ۵ و ۶ قرار دارد.

یعنی داریم: $۵ < \sqrt{۳۴} < ۶$



نسیم: اگر فاصله ۵ تا ۶ را روی محور نصف کنیم، عدد $۵/۵$ به دست می‌آید و چون

$(۵/۵)^۲ = ۳۰/۲۵$ ، پس حتماً جذر ۳۴ از $۵/۵$ بیشتر است.

آزاده: می‌توانیم چند عدد بزرگ‌تر از $۵/۵$ را بررسی کنیم؛ مثلاً $۵/۷$ و $۵/۸$ و $۵/۹$.



۱۱۱

سپس آنها به کمک ماشین حساب جدول زیر را تکمیل کردند.

عدد	$۵/۷$	$۵/۸$	$۵/۹$	۶
مجدور	$۳۲/۴۹$	$۳۳/۶۴$	$۳۴/۸۱$	۳۶

در نتیجه با توجه به جدول بالا، مقدار $\sqrt{۳۴}$ تقریباً برابر $۵/۸$ است.

آخرین جمله فعالیت بالا را معمولاً به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: $\sqrt{۳۴} \approx ۵/۸$

اگر این دانش‌آموزان بخواهند به کمک روش بالا مقدار $\sqrt{۳۴}$ را تا دو رقم اعشار حساب

کنند، چگونه باید این کار را انجام دهند؟ **بین ۵ و ۶ را به صد قسمت تقسیم می‌کنیم.**

مقدار $\sqrt{۳۴}$ تا پنج رقم اعشار به کمک ماشین حساب چنین به دست می‌آید:

$$\sqrt{۳۴} \approx ۵/۸۳۰۹۵$$

۱- با پرکردن جاهای خالی، مقدار $\sqrt{2}$ و $\sqrt{200}$ را به صورت تقریبی تا یک رقم اعشار به دست آورید. نتیجه را با آنچه ماشین حساب به دست می آورد، مقایسه کنید.

$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \quad \text{الف)}$$

$$1 < \sqrt{2} < 2 \quad \text{پس:}$$

اکنون با نصف کردن فاصله ۱ تا ۲ روی محور، عدد $1/5$ را آزمایش می کنیم. چون $(1/5)^2 = 2/25$ ، پس مقدار $\sqrt{2}$ حتماً کمتر از $1/5$ است.

عدد	$1/3$	$1/4$	$1/5$
مجدور	$1/69$	$1/96$	$2/25$

به کمک جدول بالا می توان نوشت: $\sqrt{2} \approx 1/4$

ب) $\sqrt{196} < \sqrt{200} < 15$ بنابراین: $14 < \sqrt{200} < 15$

اکنون با نصف کردن فاصله 14 تا 15 روی محور اعداد، عدد $14/5$ را آزمایش می کنیم. چون $(14/5)^2 = 210/25$ ، بنابراین $\sqrt{200}$ حتماً کمتر از $14/5$ است.

بنابراین $\sqrt{200} \approx 14/1$

عدد	$14/1$	$14/2$	$14/3$	$14/4$
مجدور	$198/81$	$201/64$		

۲- ابتدا مقدار تقریبی هر عددی را که در جدول آمده است، حدس بزنید؛ سپس به کمک ماشین حساب، حاصل را تا دو رقم اعشار پیدا کنید و با مقداری که حدس زده اید، مقایسه کنید.

عدد	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10/3}$	$\sqrt{18/5}$	$\sqrt{68}$	$\sqrt{99}$	$\sqrt{140}$
مقدار حدس زده شده	$1/7$	$2/5$	$3/3$	$4/5$	$8/1$	$9/9$	$11/9$
ماشین حساب	$1/73$	$2/23$	$3/16$	$4/30$	$8/24$	$9/94$	$11/83$

۱- به کمک روشی که در درس یاد گرفته‌اید، مقدار هر یک از عددهای زیر را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

$\sqrt{19}, \sqrt{40}, \sqrt{150}, \sqrt{385}$

$\sqrt{19} \approx 4/3$ $16 < 19 < 25$ \rightarrow $\sqrt{19}$ بین ۴ و ۵

عدد	۴/۴	۴/۳
مجنور	۱۹/۳۶	۱۸/۴۹

$(4/5)^2 = 20/25$ ← $\sqrt{19}$ از ۴/۵ کمتر است.

$\sqrt{40} \approx 6/3$

$36 < 40 < 49$ \rightarrow $\sqrt{40}$ بین ۶ و ۷

عدد	۶/۴	۶/۳
مجنور	۴۰/۹۶	۳۹/۶۹

$(6/5)^2 = 42/25$ ← $\sqrt{40}$ از ۶/۵ کمتر است.

$\sqrt{150} \approx 12/2$

$144 < 150 < 169$ \rightarrow $\sqrt{150}$ بین ۱۲ و ۱۳

عدد	۱۲/۴	۱۲/۳	۱۲/۲
مجنور	۱۵۳/۷۶	۱۵۱/۲۹	۱۴۸/۸۴

$(12/5)^2 = 156/25$ ← $\sqrt{150}$ از ۱۲/۵ کمتر است.

$\sqrt{385} \approx 19/6$

$361 < 385 < 400$ \rightarrow $\sqrt{385}$ بین ۱۹ و ۲۰

عدد	۱۹/۵	۱۹/۷
مجنور	۳۸۴/۱۶	۳۸۸/۰۹

$(19/5)^2 = 380/25$ ← $\sqrt{385}$ از ۱۹/۵ بزرگتر است.

۲- در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید. از ماشین حساب کمک بگیرید.

$\frac{3}{31} < \frac{3}{33}$
 $\sqrt{11} < 3 \frac{1}{3}$

$\frac{4}{12} > \frac{4}{13}$
 $\sqrt{17} > 4 \frac{0}{3}$

$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$
 $\sqrt{6/25} = 2 \frac{1}{5}$

$1 + \frac{3}{87} = \frac{4}{87}$
 $1 + \sqrt{15} > 4$

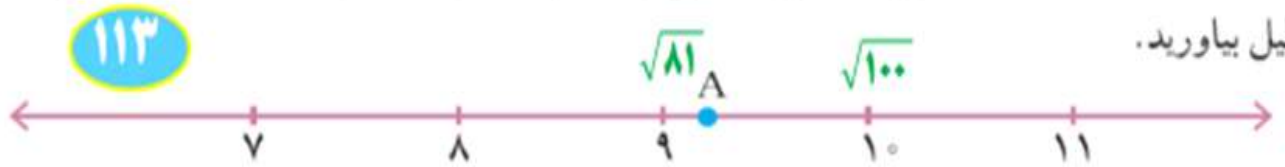
$\frac{4}{47} - 2 = \frac{2}{47}$
 $\sqrt{20} - 2 < \sqrt{18}$

$\sqrt{9} = 3$
 $(\sqrt{3})^2 = 3$

۳- جاهای خالی روی محور را با عددهای مناسب پر کنید.



۴- در هر یک از تمرین‌های زیر، یک محور اعداد رسم و نقطه‌ای روی آن مشخص شده است (نقاط A, B, C). نقطه مشخص شده روی محور به کدام یک از عددهای داده شده نزدیک‌تر است؟ دلیل بیاورید.



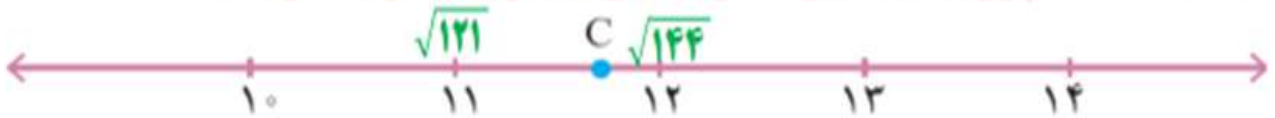
$$\sqrt{79}, \sqrt{98}, \sqrt{81}, \sqrt{85}$$

دلیل: چون $\sqrt{85}$ بین ۹ و ۱۰ می‌باشد و به ۹ نزدیک‌تر است.



$$-\sqrt{12}, -\sqrt{17}, -\sqrt{15}, -\sqrt{28}$$

دلیل: چون $-\sqrt{15}$ بین -۳ و -۴ می‌باشد و به -۴ نزدیک‌تر است.



$$\sqrt{140}, \sqrt{116}, \sqrt{121}, \sqrt{126}$$

دلیل: چون $\sqrt{140}$ بین ۱۱ و ۱۲ می‌باشد و به ۱۲ نزدیک‌تر است.

درس چهارم: نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

۱۱۴

فعالیت

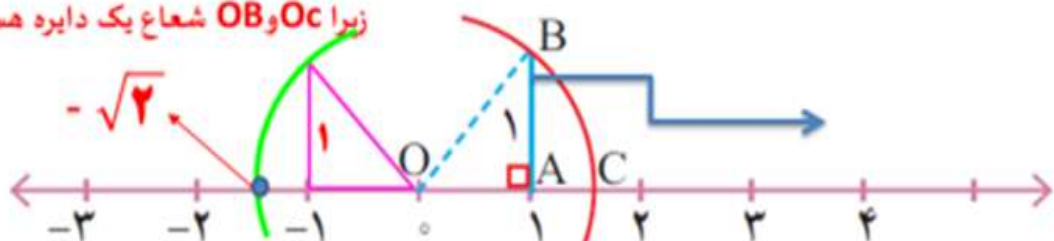


در درس گذشته مقدار $\sqrt{2}$ را هم به صورت تقریبی و هم به کمک ماشین حساب محاسبه کردید.

در این فعالیت، با نمایش $\sqrt{2}$ روی محور اعداد آشنا می‌شویم. محور عددهای زیر را در نظر بگیرید. مثلث OAB یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین به ضلع ۱ است.

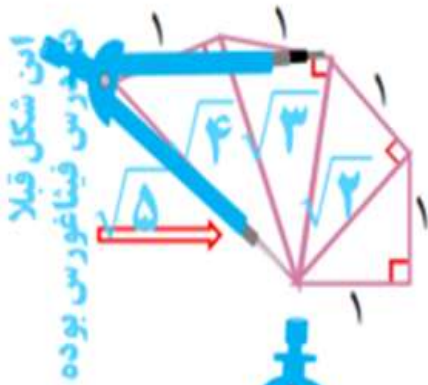
به مرکز O و شعاع OB کمانی می‌زنیم تا محور اعداد را در نقطه C قطع کند. طول پاره خط OC چقدر است؟ $\sqrt{2}$ چرا نقطه C، عدد $\sqrt{2}$ را نمایش می‌دهد؟

زیرا OC و OB شعاع یک دایره هستند.

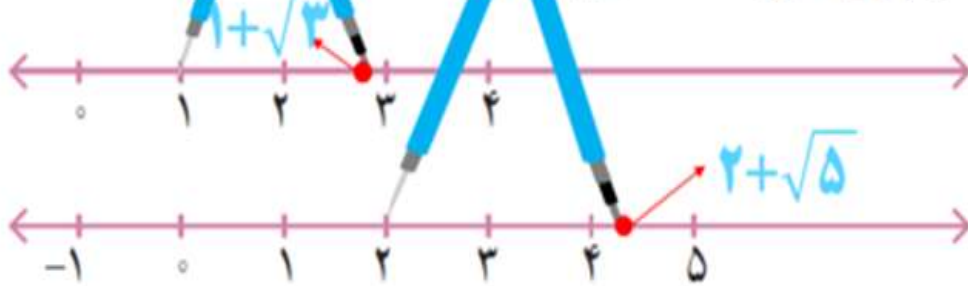


به همین روش، نقطه‌ای را روی محور بالا معین کنید که عدد $-\sqrt{2}$ را نمایش دهد.

در شکل زیر، تعدادی مثلث قائم الزاویه رسم شده است. در هر یک از این مثلث‌ها طول یک ضلع زاویه قائمه ۱ واحد است. طول وترهای این مثلث‌ها به ترتیب $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$ است. چرا؟ به کمک رابطه فیثاغورس آیا می‌توانید به همین ترتیب پاره خطی به طول $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ رسم کنید؟ چگونه؟ با ادامه دادن مثلث‌ها



از شکل داده شده استفاده کنید. دهانه پرگار را با اندازه $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ بزنید و عددهای $1 + \sqrt{3}$ و $2 + \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.



عدد $\sqrt{3} - 2$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

برای نمایش عدد $\sqrt{3} - 2$ روی محور از تساوی $\sqrt{3} - 2 = -2 + \sqrt{3}$ استفاده کنید.



خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

فعالیت

با توجه به عددهای داده شده a و b ، مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید. با مقایسه

دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

a	\sqrt{a}	b	\sqrt{b}	ab	\sqrt{ab}	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
۲	۲	۹	۳	۱۸	۳	۳
۹	۳	۱۶	۴	۱۴۴	۱۲	۱۲
۴	۲	۱۶	۴	۶۴	۸	۸
۲۵	۵	۴	۲	۱۰۰	۱۰	۱۰

برای حساب کردن جذر $b \times a$ می‌توان جذر a را در جذر b ضرب کرد.

آیا می‌توانید حدس خود را به صورت یک عبارت کلامی بیان کنید؟

$$\sqrt{ab} = (\sqrt{a})(\sqrt{b})$$

۱۱۵

اگر a و b دو عدد مثبت باشند، داریم:

به کمک جدول بالا، درستی رابطه را بررسی کنید.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \approx 5.38$$

$$7 \neq 5.38$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{25} = 2 + 5 = 7$$

کار در کلاس

۱- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را پر کنید.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16}$$

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{36}$$

$$\sqrt{14} = \sqrt{7} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{16 \times 25} = \sqrt{16} \times \sqrt{25} = 4 \times 5$$

۲- کدام یک از عبارات‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

$$\times \sqrt{50} = 25$$

$$\checkmark \sqrt{50} = 5 \times \sqrt{2}$$

۳- مانند نمونه تساوی‌های زیر را کامل کنید.

۱۱۵

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

۱۱۶

فعالیت

جدول زیر را برای عددهای مثبت a و b کامل کنید. مقدارهای دو سطر آخر را با هم

مقایسه کنید و تساوی به دست آمده را به شکل یک قانون کلی بنویسید.

a	۱۶	۲۵	۱	۴۹
b	۹	۳۶	۱۰۰	۶۴
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$	$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$	$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$	$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$	$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$

برای حساب کردن

جذر $\frac{a}{b}$ می‌توان

جذر a را بر جذر

b تقسیم کرد.

کاردر کلاس

۱- با استفاده از شکل روبه‌رو، درستی رابطه

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

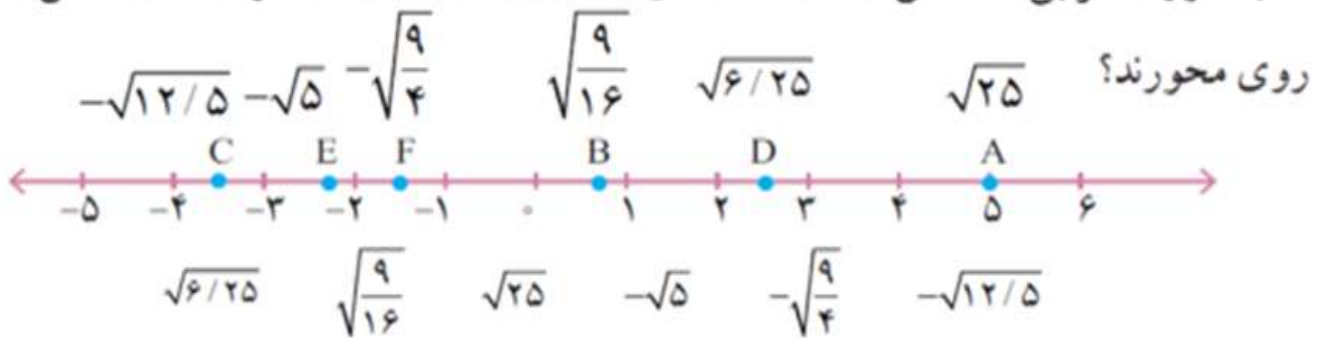
را بررسی کنید.

ضلع مربعی که مساحت آن نه شانزدهم یک شکل است مساوی سه چهارم است.

۲- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید.

$$-\sqrt{\frac{1}{144}} = -\frac{1}{12} \quad \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4} \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad -\sqrt{\frac{1}{49}} = -\frac{1}{7}$$

۳- به صورت تقریبی مشخص کنید که عددهای داده شده نظیر کدام یک از نقاط مشخص شده



۱۱۷

تمرین

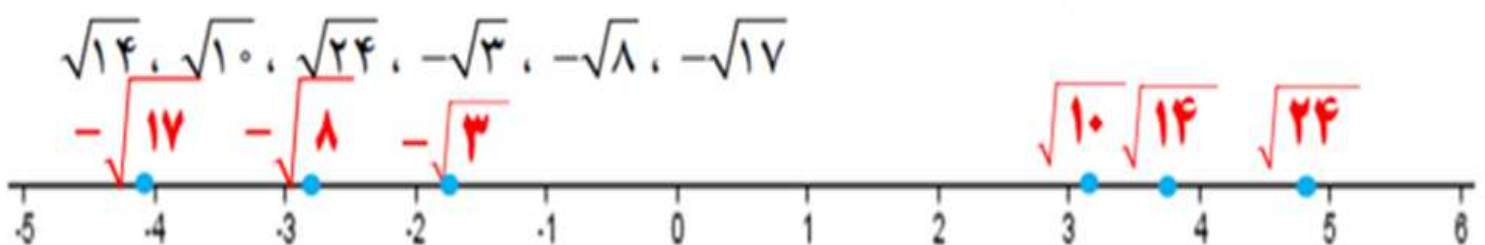


۱- نزدیک‌ترین عدد طبیعی به هر یک از عددهای زیر را پیدا کنید.

$\sqrt{401} \approx 20$	$\sqrt{310} \approx 18$	$\sqrt{9999} \approx 100$	$\sqrt{280} \approx 17$	$\sqrt{175} \approx 13$
$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{10000} = 100$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{4.1} \approx 2.0/0.2$	$\sqrt{310} \approx 17/60$	$\sqrt{9999} \approx 99/99$	$\sqrt{280} \approx 16/73$	$\sqrt{175} \approx 13/22$

درستی پاسخ خود را به کمک ماشین حساب بیازمایید.

۲- یک محور اعداد رسم کنید و عددهای زیر را به صورت تقریبی روی آن مشخص کنید.



۳- مجموع عددهای واقع بر هر سطر، هر ستون و نیز هر قطر مربع زیر ۶- است.

$+1$	$-\frac{(2+4)}{(\sqrt{4}+3)}$ -6	$\frac{0}{-1}$
-4	-2	$\frac{0}{0}$
$-3-\sqrt{4}$	$15+2$	-5

۱۱۷

جاهای خالی را با چه عددهایی می‌توان پر کرد؟

۴- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$(a^5 \times a^4) \times (b^{17} \div b^3) = a^{14} \times b^{14} = (ab)^{14} \quad \frac{(4 \times 3)^5 \times 14^1}{(28^7 + 2^7) \times (6^5 \times 2^5)} = \frac{14^5 \times 14^1}{14^7 \times 14^5} = 14$$

۵- جذر ۷۰۰ را تا یک رقم اعشار به دست آورید و نتیجه را به کمک ماشین حساب بررسی کنید.

$$\sqrt{676} < \sqrt{700} < \sqrt{729}$$

$$(26/5)^2 = 70225$$

$$26 < \sqrt{700} < 27$$

عدد	$26/4$	$26/3$	$26/2$
مجدور	$694/96$	$691/69$	$686/44$

$$\sqrt{700} \approx 26/4$$

۶- دو عدد طبیعی بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ پیدا کنید. $\sqrt{5}$ ۳، ۴ $\sqrt{17}$ ۱۱۷

۷- پنج عدد بین $\sqrt{3}$ و $\sqrt{8}$ پیدا کنید. $\sqrt{3}$ ۱/۸، ۱/۹، ۲، ۲/۲، ۲/۵ $\sqrt{8}$ ۲/۸۲

$$1/73$$

$$2/82$$

۸- اعداد رادیکالی زیر را به صورت ضرب یک عدد طبیعی در یک رادیکال بنویسید.

$$\sqrt{27} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} \quad \sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} \quad \sqrt{200} = \sqrt{100} \times \sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

$$= 10\sqrt{2}$$

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

• توان • جذر تقریبی • ریشه‌های دوم یک عدد • جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم
در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- محاسبه حاصل یک عدد توان‌دار به توان عدد دیگر • محاسبه جذر یک عدد
- محاسبه تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی • محاسبه یک عبارت توان‌دار
- محاسبه تقریبی تقسیم دو عدد توان‌دار با نماهای مساوی
- ساده کردن یک عبارت توان‌دار • پیدا کردن عددهای رادیکالی روی محور
- محاسبه جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم

کاربرد کاربرد این درس علاوه بر درس‌های دیگر ریاضی مثل جبر در بیان عددهای بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک است. نماد علمی نحوه‌ای از بیان این عددها به صورت توان‌دار است.

تمرین‌های ترکیبی

۱- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{(-3)^5 \times 2^4 \times 8}{-2^7 \times (-9)^2 \times 18} = \frac{(-3)^5 \times 2^4 \times 2^3}{-2^7 \times (-3)^4 \times 18} = \frac{(-3)}{-18} = +\frac{1}{6}$$

$[(-3)^2]^2$

۲- حاصل تقسیم مقابل را به دست آورید. $= 9 \times 1 = 9$

$$\left[3^{10} \times \left(\frac{1}{27}\right)^3 \right]^2 \div \left[5^4 \times \left(\frac{1}{25}\right)^2 \right]^3 = 9 \times 1 = 9$$

$$\left[3 \times 3^9 \times \left(\frac{1}{3^3}\right)^3 \right]^2 = \left[3 \times 3^9 \times \left(\frac{1}{3^9}\right) \right]^2 = [3 \times 1]^2 = 9$$

$$\left[5^4 \times \left(\frac{1}{25}\right)^2 \right]^3 = \left[5^4 \times \left(\frac{1}{5^2}\right)^2 \right]^3 = [1]^3 = 1$$

۱۱۸

۳- با تهیه جدول مناسب، جذر عدد ۹۳ را تا دورقم اعشار به دست آورید.

$\sqrt{93} \approx 9.6$	عدد	۹/۶	۹/۷
	مجذور	۹۲/۱۶	۹۴/۰۹

$100 > 93 > 81 \leftarrow \sqrt{93}$ بین ۹ و ۱۰

$(9/5)^2 = 90/25$ از $\sqrt{93}$ بیشتر است.

۴- عددهای زیر را به ترتیب صعودی و از چپ به راست مرتب کنید.

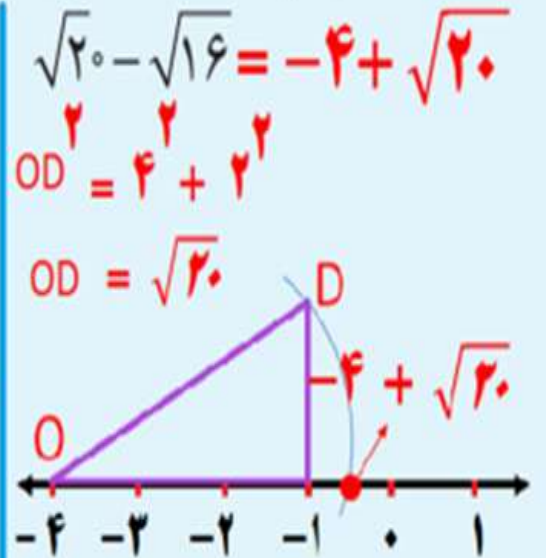
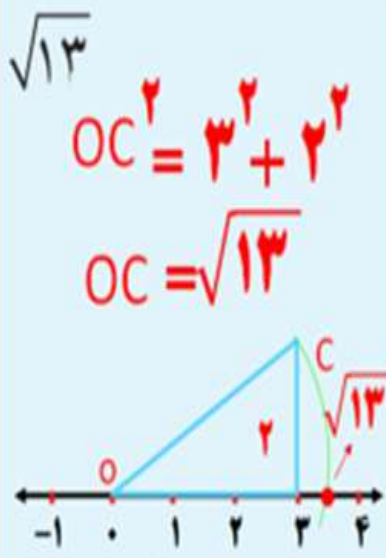
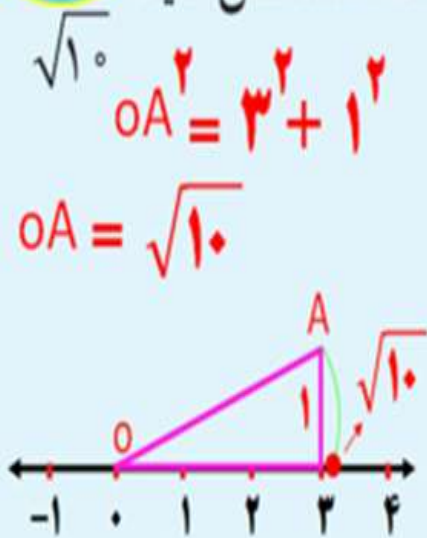
-2^4 و 2^2 و $\sqrt{25}$ و $\sqrt{47}$ و ۶ و $(-2/5)^4$ و $(-2)^4$

16 $39/0.6$ $6/8$ 5 8 -16

$-2^4 < \sqrt{25} < 6 < \sqrt{47} < 2^2 < (-2)^4 < (-2/5)^4$

۱۱۸

۵- به کمک رسم، مکان متناظر با عددهای زیر را روی محور اعداد مشخص کنید.



۶- مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $x = -2$ و $y = 6$ و $a = -1$ و $b = \frac{1}{2}$ به دست آورید.

$$\frac{ax^2 - b(x - y^2)}{2axy + (\frac{y}{x})^3 - \frac{3}{b^2}} = \frac{(-1)(-2)^2 - \frac{1}{2}(-3 - 6^2)}{2(-1)(-2)(6) + (\frac{6}{-2})^3 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{-4 + 19}{+24 - 27 - 12} = \frac{15}{-15} = -1$$