

هشتم

ریاضی :

آمار و احتمال

فصل هشتم :

۱۲۰ تا ۱۳۶

صفحه :

احمد فرخ وند

تهیه کننده :

فصل ۸

آمار و احتمال

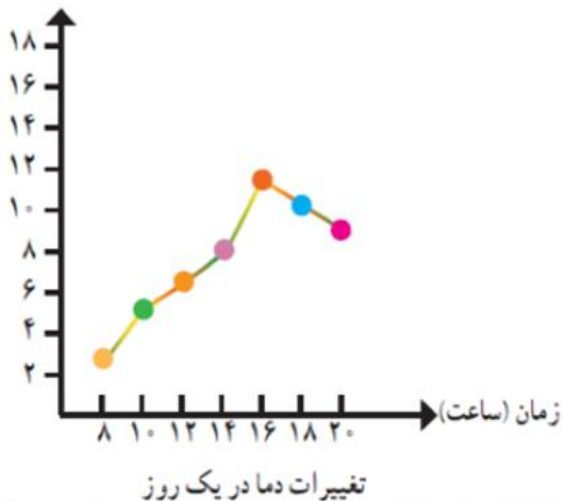


بررسی خواص هر گاز با استفاده از آمار و احتمال، هم کاری ساده است و هم به نتایج قابل قبول و عملی منجر می شود؛ مثلاً با استفاده از آمار و احتمال می توان تعداد دفعاتی را برآورد کرد که باید مقداری گاز دارای اورانیوم را غنی کنیم تا به درجه خلوص مورد نیاز برسد.

۱۲۰

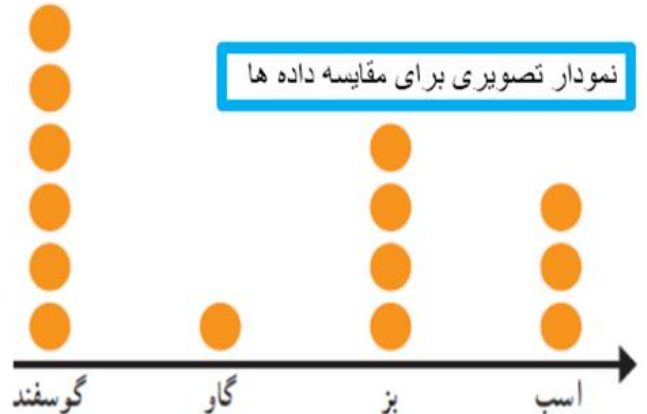
درس اول : دسته بندی داده ها

در سال های پیش با علم آمار، که علم جمع آوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده ها) است، آشنا شدید. داده ها را با چوب خط، سرشماری و در جدول سازماندهی کردید. سپس، با توجه به موضوع و هدف آمارگیری، نمودار آن اطلاعات را رسم کردید. در زیر، چهار نوع نمودار و کاربرد هر کدام یادآوری شده است.



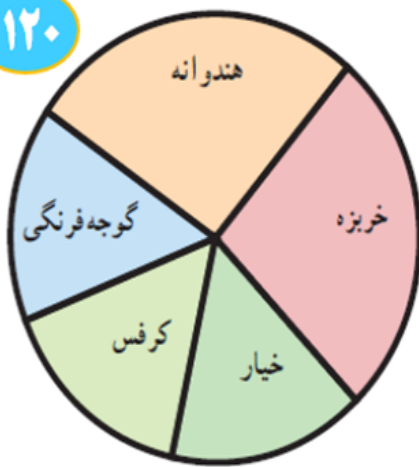
هر نشان دهنده ۵۰۰ رأس است.

نمودار تصویری برای مقایسه داده ها



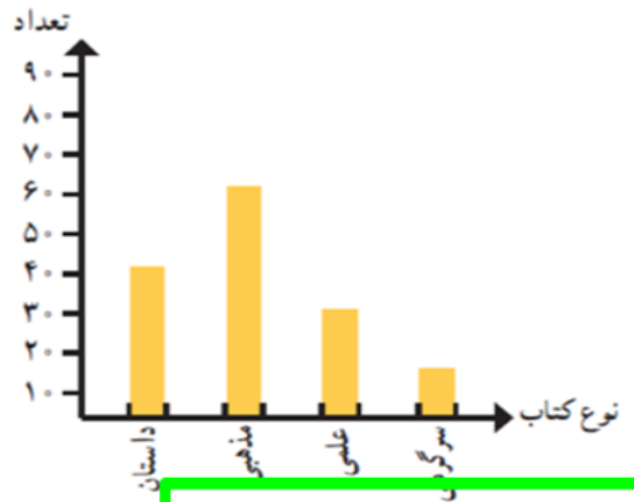
دانلود از اپلیکیشن تصویری گنگو در اینترنت یک روستا

۱۲۰



سطح زیر کشت کشاورزی یک مزرعه

نمودار دایره‌ای برای نشان دادن تعداد داده‌ها نسبت به کل



نمودار ستونی برای مقایسه داده‌های تقریبی تعداد کتاب‌های کتابخانه یک

مسجد

اگر داده‌های جمع‌آوری شده زیاد و پراکنده باشند، بررسی آنها طولانی می‌شود. برای اینکه بتوانیم آسان‌تر و بهتر نتیجه بگیریم، داده‌ها را متناسب با موضوع آماری **دسته‌بندی** و سازماندهی می‌کنیم.

۱۲۱

## فعالیت

در زیر، داده‌های جمع‌آوری شده درباره‌ی اندازه‌ی قد ۴۰ نفر از مردان ساکن یک شهر کوچک برحسب سانتی‌متر مشخص شده است. ( $n=40$ )

۱۶۴ ۱۶۸ ۱۷۳ ۱۸۵ ۱۵۳ ۱۷۴ ۱۷۸ ۱۹۲ ۱۵۰ ۱۷۵ ۱۶۷ ۱۸۴ ۱۴۷ ۱۸۱  
 ۱۵۱ ۱۶۲ ۱۶۷ ۱۷۳ ۱۴۲ ۱۶۳ ۱۳۸ ۱۶۵ ۱۳۷ ۱۷۱ ۱۹۳ ۱۶۸ ۱۷۰ **۱۳۰**  
 ۱۶۵ ۱۸۳ ۱۵۷ ۱۷۹ ۱۷۶ ۱۵۹ ۱۷۰ **۲۰۵** ۱۵۸ ۱۷۳ ۱۹۰ ۱۴۳

کمترین

بیشترین

**کمترین و بیشترین داده را مشخص کنید.** **کمترین داده - بیشترین داده = دامنه تغییرات**

به فاصله‌ی بین این دو عدد **دامنه تغییرات** می‌گویند. دامنه تغییرات داده‌ها را پیدا کنید.  $205 - 130 = 75$

در یک تولیدی شلوار مردانه می‌خواهیم با توجه به داده‌های جمع‌آوری شده بالا اندازه‌های مختلف را

طراحی کنیم. برای این کار، داده‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم. هر دسته یک معنای مشخصی دارد. برای مثال،

افراد مختلف را می‌توانیم به صورت زیر تقسیم‌بندی کنیم:

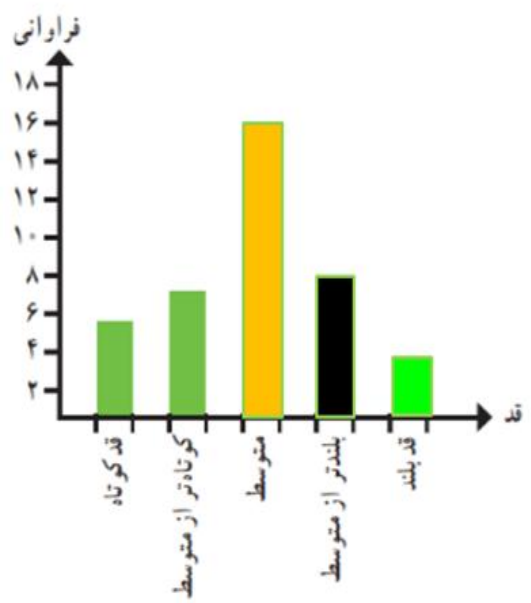




به این ترتیب، داده‌های ما به ۵ دسته تقسیم می‌شوند. می‌توانیم طول این دسته‌ها را مساوی در نظر بگیریم. به همین دلیل، برای رسیدن به حدود دسته‌ها دامنه تغییرات را بر ۵ تقسیم می‌کنیم تا طول دسته‌ها به طور تقریبی معلوم شود. به این ترتیب، می‌توانیم محدوده دسته‌ها را مشخص کنیم و در یک جدول بنویسیم. در جدول زیر معنای  $130 \leq x < 145$  را توضیح دهید.  $<$  و  $\leq$  چه تفاوتی دارند؟

۱۳۰ در این دسته وجود دارد ولی ۱۴۵ در این دسته وجود ندارد.

با توجه به حدود دسته‌ها، با استفاده از چوب خط تعداد داده‌های هر دسته را، که به آن **فراوانی** می‌گویند، تعیین کنید.



فراوانی	حدود دسته‌ها	چوب خط	فراوانی
5	$130 \leq x < 145$		5
7	$145 \leq x < 160$		7
16	$160 \leq x < 175$		16
8	$175 \leq x < 190$		8
4	$190 \leq x \leq 205$		4

دامنه تغییرات =  $\frac{\text{تعداد دسته}}{\text{طول دسته}}$

$\frac{75}{5} = 15$

۱۲۲

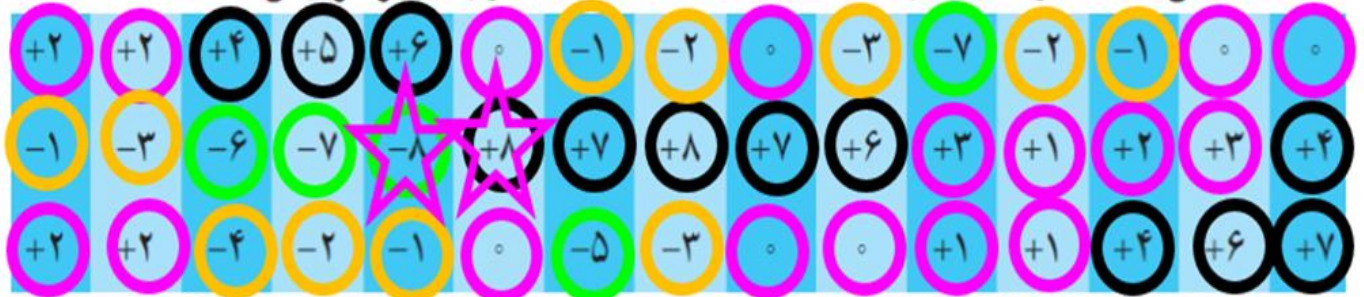
با توجه به فعالیت صفحه قبل به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

- ۱- قد اکثر افراد در چه محدوده‌ای است؟ **بین ۱۶۰ تا ۱۷۵**
- ۲- با توجه به نمودار ستونی متوجه چه چیزی می‌شوید؟ **بیشتر افراد قد متوسطی دارند**
- ۳- فکر می‌کنید میانگین قد مردان این شهر در کدام دسته قرار می‌گیرد؟ **در دسته‌ای که بیشترین فراوانی دارد**
- ۴- به نظر شما این آمار و اطلاعات و نمودار چه کاربردهای دیگری دارند؟



۱- میانگین دمای هوا در روزهای مختلف یک منطقه به صورت زیر گزارش شده است.

۱۲۲

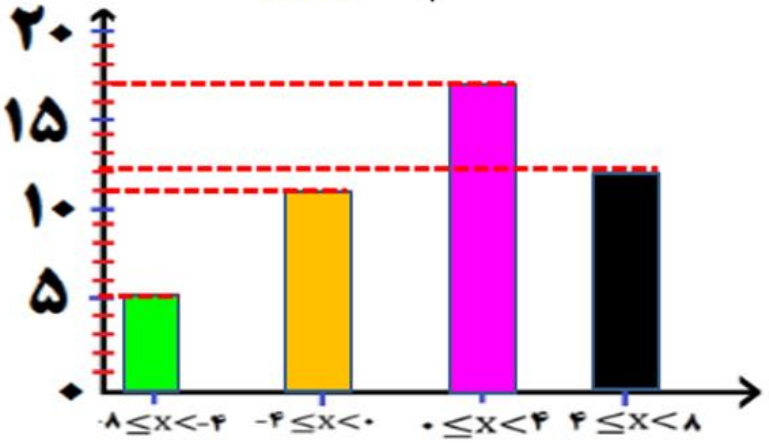


جدول فراوانی داده‌ها را براساس سؤال‌های زیر مشخص کرده و نموداری ستونی رسم کنید.

**کمترین داده - بیشترین داده = دامنه تغییرات**

● دامنه تغییرات چقدر است؟  $8 - (-8) = 16$

● داده‌ها را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم؛ طول هر دسته چقدر است؟  
 $\frac{16}{4} = 4$   
 دامنه تغییرات = طول دسته  
 تعداد دسته



حدود دسته	چوب خط	فراوانی
$-8 \leq x < -4$		۵
$-4 \leq x < 0$		۱۱
$0 \leq x < 4$		۱۷
$4 \leq x \leq 8$		۱۲

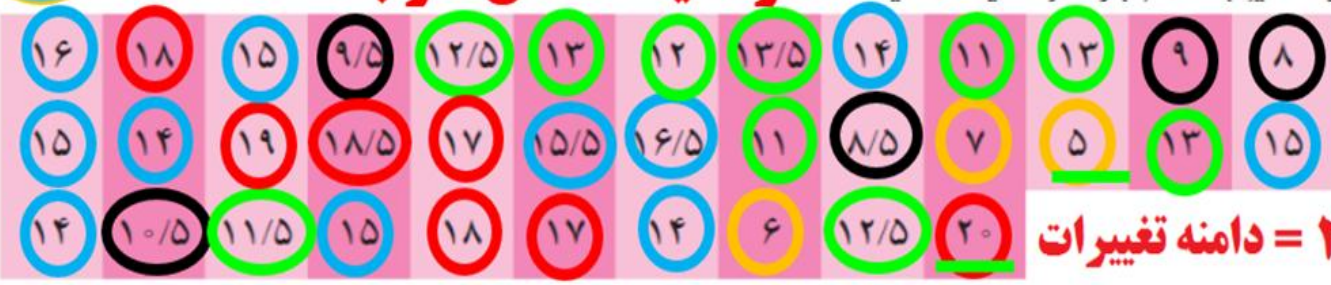
۲- نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس به صورت زیر است. با توجه به دامنه تغییرات،

آنها را به ۵ دسته مساوی دسته‌بندی کنید. پس از رسم جدول، نمودار ستونی را رسم کنید و با توجه

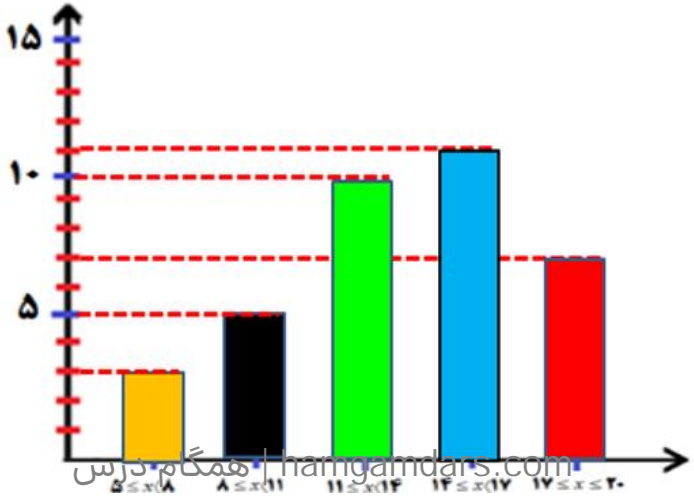
۱۲۲

**وضعیت کلاس خوب است**

به نمودار، وضعیت این کلاس را توصیف کنید.



**دامنه تغییرات =  $20 - 5 = 15$**



حدود دسته	چوب خط	فراوانی
$5 \leq x < 8$		۳
$8 \leq x < 11$		۵
$11 \leq x < 14$		۱۰
$14 \leq x < 17$		۱۱
$17 \leq x \leq 20$		۷

**طول دسته =  $\frac{15}{5} = 3$**

**تمرین ۱-** در یک کارگاه تولید لامپ، ۳۰ لامپ به صورت تصادفی انتخاب و طول عمر آنها بر حسب ساعت اندازه گیری شده است. داده‌ها را به ۵ دسته تقسیم کنید و جدول فراوانی و نمودار ستونی آن را رسم کنید.

۱۲۳



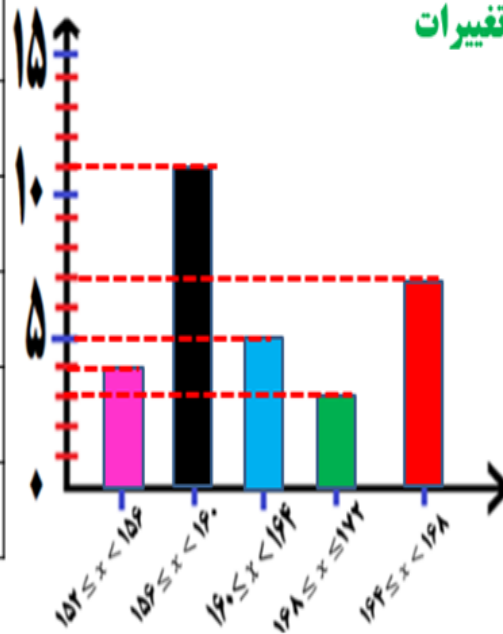
حدود دسته	چوب خط	فراوانی
$152 \leq x < 156$		۴
$156 \leq x < 160$		۱۱
$160 \leq x < 164$		۵
$164 \leq x < 168$		۳
$168 \leq x \leq 172$		۷

کمترین داده - بیشترین داده = دامنه تغییرات

$$172 - 152 = 20$$

$$\text{دامنه تغییرات} = \frac{\text{طول دسته}}{\text{تعداد دسته}}$$

$$\text{طول دسته} = \frac{20}{5} = 4$$



**۲-** از دانش آموزان یک کلاس درباره مدت

زمانی که طول می کشد تا آنها از خانه به مدرسه بروند، سؤال شده و پس از دسته بندی این داده‌ها نمودار ستونی مقابل رسم شده است. چند دانش آموز فاصله خانه تا مدرسه را در ۱۰ یا بیشتر از ۱۰ دقیقه طی

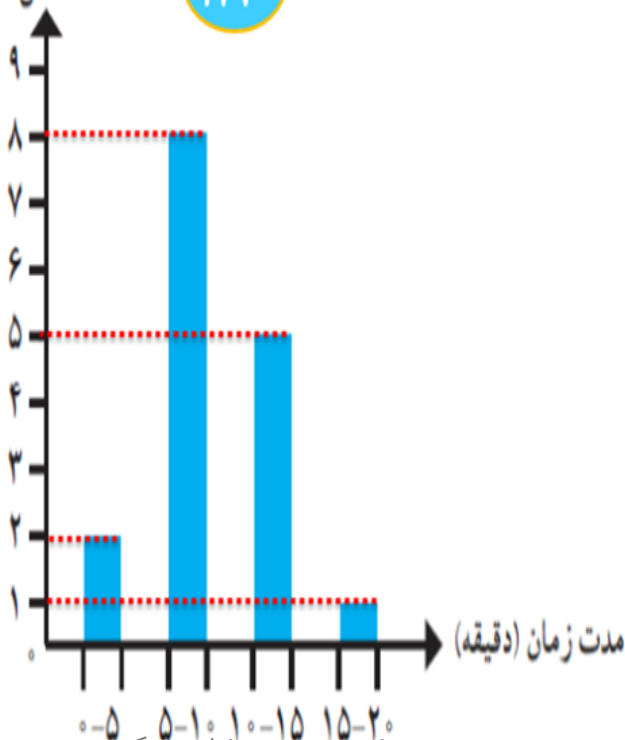
می کنند؟ **۶ نفر**

این کلاس چند دانش آموز دارد؟ **۱۶ نفر**

دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

تعداد دانش آموزان

۱۲۳





۳- در اینجا نمودار نمره‌های دانش‌آموزان یک کلاس را می‌بینید.

- این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟ **۳۰ نفر**

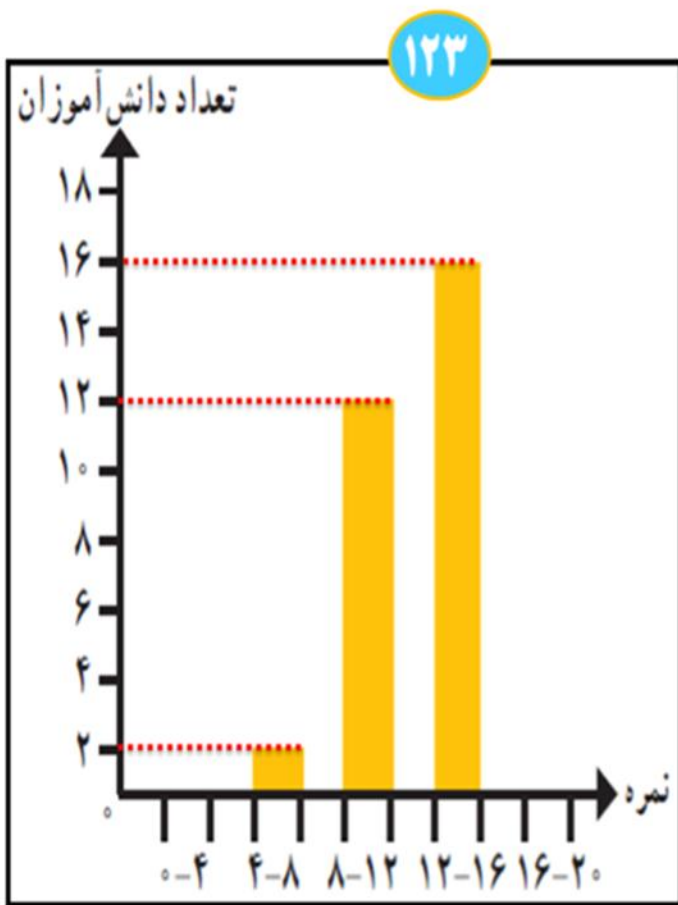
$$2 + 12 + 16 = 30$$

- آیا این دسته‌بندی مناسب است؟ چرا؟

**خیر - زیرا دامنه تغییرات بین ۴ تا ۱۶ است، در صورتی که در اینجا دسته‌ها شروع شده و به ۲۰ ختم شده‌اند.**

- آیا این کلاس وضعیت خوبی دارد؟ چرا؟

**بله - زیرا بیشتر نمره‌ها بین ۱۲ و ۱۶ هستند.**



## میانگین داده‌ها

۱۲۴

پس از اینکه داده‌های آماری در جدول سازماندهی می‌شوند و به کمک نمودارها درک بهتری از داده‌ها به دست می‌آید، می‌توان از میانگین داده‌ها نیز برای کامل‌تر شدن نتایج حاصل از داده‌ها و تحلیل و تفسیر بهتر آنها استفاده کرد. شما در دوره ابتدایی با میانگین گرفتن آشنا شده‌اید. میانگین تعدادی داده عددی، از تقسیم مجموع آنها بر تعدادشان به دست می‌آید.

### فعالیت

۱- نمره‌های ریاضی یک دانش‌آموز ۱۷، ۱۸، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ است. میانگین نمره‌های

او را حساب کنید.  $\bar{x} = \frac{S}{n}$  یا به صورت جبری  $\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}$

$$\bar{x} = \frac{19 + 17 + 15 + 18 + 17}{5} = \frac{86}{5} = 17.2$$

۲- نمره‌های یک دانش‌آموز به صورت زیر است :

۱۶ ۱۵/۵ ۱۶ ۱۵ ۱۷ ۱۹ ۱۸/۵ ۱۴ ۱۶/۵ ۱۷/۵

میانگین نمره‌های او را پیدا کنید. چند نمره بالاتر از میانگین و چند نمره پایین‌تر از میانگین قرار

می‌گیرند؟ آیا این دو تعداد مساوی است؟ **خیر** تا ۴ تا ۵

$$\bar{x} = \frac{۱۶ + ۱۵/۵ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۱۸/۵ + ۱۴ + ۱۶/۵ + ۱۷/۵}{۱۰} = \frac{۱۶۵}{۱۰} = ۱۶/۵$$

اختلاف نمره‌های بالای میانگین را با میانگین حساب کنید. حاصل جمع آنها را پیدا کنید. به همین ترتیب، مجموع اختلاف نمره‌های پایین‌تر از میانگین با میانگین را هم پیدا کنید. نتایج بالا را با هم مقایسه کنید.

۱۴ ۱۵ ۱۵/۵ ۱۶ ۱۶ ۱۶/۵ ۱۷ ۱۷/۵ ۱۸/۵ ۱۹

$$۲/۵ + ۱/۵ + ۱ + ۰/۵ + ۰/۵ = ۶ \quad ۰/۵ + ۱ + ۲ + ۲/۵ = ۶$$

۳- میانگین نمره‌های ۷ درس یک دانش‌آموز ۱۶/۵ است. اگر نمره‌های دو درس دیگر او، که

۱۷ و ۱۵ است، به این داده‌ها اضافه شود، میانگین جدید را پیدا کنید.

$$۱۶/۵ \times ۷ = ۱۱۵/۵ \quad ۱۱۵/۵ + ۱۷ + ۱۵ = ۱۴۷/۵ \quad ۱۴۷/۵ \div ۹ = ۱۶/۳۹$$

آیا می‌توان میانگین دو نمره ۱۵ و ۱۷ را پیدا کرد (۱۶ می‌شود) و سپس میانگین ۱۶ و ۱۶/۵

را حساب کرد؟ چرا؟ **خیر**

عددها از کوچک به بزرگ مرتب شده‌اند.

۴- میانگین نمره‌های زیر را به دست آورید. بین این عددها چه رابطه‌ای وجود دارد؟ فاصله

هر عدد تا میانگین چقدر است؟

۲ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ ۱ ۲  
۱۱ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۳ ۱۴ ۱۴ ۱۵

$$\bar{x} = \frac{۱۱ + ۱۲ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۴ + ۱۵}{۹} = \frac{۱۱۷}{۹} = ۱۳$$



با توجه به رابطه‌ای که پیدا کرده‌اید، میانگین عددهای زیر را به دست آورید

- ۱۷ ۱۴ ۱۱ ۱۵ ۱۲ ۱۹ ۱۸ ۱۳ ۱۶  
 ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد و داده‌ها دسته‌بندی شده باشند، می‌توان میانگین داده‌ها را با تقریب بسیار خوب به دست آورد.

**فعالیت** — میانگین به کمک جدول فراوانی

۱- به کمک ماشین حساب، میانگین قد ۴۰ نفر را که در درس قبل مطرح شده است، پیدا کنید.

- ۱۶۴ ۱۶۸ ۱۷۳ ۱۸۵ ۱۵۳ ۱۷۴ ۱۷۸ ۱۹۲ ۱۵۰ ۱۷۵ ۱۶۷ ۱۸۴ ۱۴۷ ۱۸۱  
 ۱۵۱ ۱۶۲ ۱۶۷ ۱۷۳ ۱۴۲ ۱۶۳ ۱۳۸ ۱۶۵ ۱۳۷ ۱۷۱ ۱۹۳ ۱۶۸ ۱۷۰ ۱۳۰  
 ۱۶۵ ۱۸۳ ۱۵۷ ۱۷۹ ۱۷۶ ۱۵۹ ۱۷۰ ۲۰۵ ۱۵۸ ۱۷۳ ۱۹۰ ۱۴۳

$$\frac{6679}{40} = 166.975$$

۲- برای به دست آوردن مرکز دسته‌ای مانند دسته  $130 \leq x < 145$ ، ابتدا مجموع عددهای

$\frac{130+145}{2} = 137.5$  را به دست می‌آوریم و سپس، حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

- ۳- اکنون تمام داده‌ها را در این قسمت می‌بینید. مرکز هر دسته را به جای داده‌های آن دسته قرار دهید. برای مثال، چون عدد ۱۹۲ در دسته  $190 \leq x < 205$  قرار دارد؛ به جای آن عدد  $197.5$  را، که مرکز این دسته است، قرار دهید.
- $130 \leq x < 145 \rightarrow 137.5$
  - $145 \leq x < 160 \rightarrow 152.5$
  - $160 \leq x < 175 \rightarrow 167.5$
  - $175 \leq x < 190 \rightarrow 182.5$
  - $190 \leq x < 205 \rightarrow 197.5$

<del>167/5</del>	<del>167/5</del>	<del>167/5</del>	<del>182/5</del>	<del>152/5</del>	<del>167/5</del>	<del>182/5</del>	197/5	<del>152/5</del>	<del>182/5</del>	<del>167/5</del>	<del>182/5</del>	<del>152/5</del>	<del>182/5</del>
<del>164</del>	<del>168</del>	<del>173</del>	<del>185</del>	<del>153</del>	<del>174</del>	<del>178</del>	192	<del>150</del>	<del>175</del>	<del>167</del>	<del>184</del>	<del>147</del>	<del>181</del>
<del>152/5</del>	<del>167/5</del>	<del>167/5</del>	<del>167/5</del>	<del>137/5</del>	<del>167/5</del>	<del>137/5</del>	<del>167/5</del>	<del>137/5</del>	<del>167/5</del>	<del>197/5</del>	<del>167/5</del>	<del>167/5</del>	<del>137/5</del>
<del>151</del>	<del>162</del>	<del>167</del>	<del>173</del>	<del>142</del>	<del>163</del>	<del>138</del>	<del>165</del>	<del>137</del>	<del>171</del>	<del>193</del>	<del>168</del>	<del>170</del>	<del>130</del>
<del>167/5</del>	<del>182/5</del>	<del>152/5</del>	<del>182/5</del>	<del>182/5</del>	<del>152/5</del>	<del>167/5</del>	<del>197/5</del>	<del>152/5</del>	<del>167/5</del>	<del>197/5</del>	<del>137/5</del>		
<del>165</del>	<del>183</del>	<del>157</del>	<del>179</del>	<del>176</del>	<del>159</del>	<del>170</del>	<del>205</del>	<del>158</del>	<del>173</del>	<del>190</del>	<del>143</del>		



۴- چرا در عددهای تغییر یافته ۴ تا ۱۹۷/۵ وجود دارد؟ چون فراوانی این دسته ۴ است.

۱۲۵

۵- با توجه به عددهای بالا، میانگین ۴۰ عدد جدید را پیدا کنید.  $\frac{۶۷۰۰}{۴۰} = ۱۶۷/۵$

چگونه برای پیدا کردن مجموع داده‌ها از ضرب استفاده می‌کنید؟ این ضرب‌ها چه رابطه‌ای با

فراوانی‌های جدول دارند؟ **فراوانی هر دسته را در مرکز آن دسته ضرب می‌کنیم سپس همه این‌ها را با هم جمع می‌کنیم**

۶- میانگین به دست آمده را با میانگین واقعی، که با ماشین حساب پیدا کردید، مقایسه کنید.

مقدار خطای این روش چقدر است؟  $۱۶۷/۵ - ۱۶۶/۹۷۵ = ۰/۵۲۵$

۱۲۶

میانگین به کمک جدول فراوانی

کاردر کلاس



با توجه به فعالیت صفحه قبل، با کامل کردن جدول زیر میانگین داده‌ها را دوباره محاسبه کنید.

حدود دسته‌ها	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته × فراوانی
$۱۳۰ \leq x < ۱۴۵$	۵	$\frac{۱۳۰+۱۴۵}{۲} = ۱۳۷/۵$	$۱۳۷/۵ \times ۵ = ۶۸۷/۵$
$۱۴۵ \leq x < ۱۶۰$	۷	$\frac{۱۴۵+۱۶۰}{۲} = ۱۵۲/۵$	$۱۵۲/۵ \times ۷ = ۱۰۶۷/۵$
$۱۶۰ \leq x < ۱۷۵$	۱۵	$\frac{۱۶۰+۱۷۵}{۲} = ۱۶۷/۵$	$۱۶۷/۵ \times ۱۵ = ۲۵۱۲/۵$
$۱۷۵ \leq x < ۱۹۰$	۹	$\frac{۱۷۵+۱۹۰}{۲} = ۱۸۲/۵$	$۱۸۲/۵ \times ۹ = ۱۶۴۲/۵$
$۱۹۰ \leq x < ۲۰۵$	۴	$\frac{۱۹۰+۲۰۵}{۲} = ۱۹۷/۵$	$۱۹۷/۵ \times ۴ = ۷۹۰$
مجموع	۴۰		۶۷۰۰

$$\text{میانگین} = \frac{۶۷۰۰}{۴۰} = ۱۶۷/۵$$

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع ستون فراوانی} \times \text{مرکز دسته}}{\text{مجموع ستون فراوانی}}$$

۱- میانگین دمای هوا مربوط به کار در کلاس صفحه ۱۲۲ و میانگین ساعت های عمر لامپ مربوط به تمرین ۱ صفحه ۱۲۳ را به دست آورید. از جدول فراوانی استفاده کنید.

حدود دسته	چوب خط	فراوانی	مرکز دسته	فراوانی × مرکز دسته
$-8 \leq x < -4$		۵	$[(-۴)+(-۸)] \div ۲ = -۶$	$۵ \times (-۶) = -۳۰$
$-4 \leq x < 0$		۱۱	$[۰+(-۴)] \div ۲ = -۲$	$۱۱ \times (-۲) = -۲۲$
$0 \leq x < +4$		۱۷	$(۰+۴) \div ۲ = ۲$	$۲ \times ۱۷ = ۳۴$
$+4 \leq x \leq +8$		۱۲	$(۴+۸) \div ۲ = ۶$	$۶ \times ۱۲ = ۷۲$
مجموع	*****	۴۵	*****	۵۴

میانگین =  $\frac{\text{مجموع ستون فراوانی} \times \text{مرکز دسته}}{\text{مجموع ستون فراوانی}}$

میانگین =  $\frac{۵۴}{۴۵} = ۱/۲$

حدود دسته	چوب خط	فراوانی	مرکز دسته	فراوانی × مرکز دسته
$۱۵۲ \leq x < ۱۵۶$		۴	$(۱۵۲+۱۵۶) \div ۲ = ۱۵۴$	$۴ \times ۱۵۴ = ۶۱۶$
$۱۵۶ \leq x < ۱۶۰$		۱۱	$(۱۵۶+۱۶۰) \div ۲ = ۱۵۸$	$۱۱ \times ۱۵۸ = ۱۷۳۸$
$۱۶۰ \leq x < ۱۶۴$		۵	$(۱۶۰+۱۶۴) \div ۲ = ۱۶۲$	$۵ \times ۱۶۲ = ۸۱۰$
$۱۶۴ \leq x < ۱۶۸$		۳	$(۱۶۴+۱۶۸) \div ۲ = ۱۶۶$	$۳ \times ۱۶۶ = ۴۹۸$
$۱۶۸ \leq x \leq ۱۷۲$		۷	$(۱۶۸+۱۷۲) \div ۲ = ۱۷۰$	$۷ \times ۱۷۰ = ۱۱۹۰$
مجموع	*****	۳۰	*****	۴۸۵۲

میانگین =  $\frac{\text{مجموع ستون فراوانی} \times \text{مرکز دسته}}{\text{مجموع ستون فراوانی}}$

میانگین =  $\frac{۴۸۵۲}{۳۰} = ۱۶۱/۷۳$



۲- جدول زیر را کامل و میانگین را حساب کنید.  $\frac{516}{44} = 11/72$  = میانگین **۱۲۶**

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی	مرکز دسته	مرکز × فراوانی
$0 \leq x < 4$	### /	۶	$\frac{0+4}{2} = 2$	۱۲
$4 \leq x < 8$	////	۴	$\frac{4+8}{2} = 6$	۲۴
$8 \leq x < 12$	###	۸	۱۰	۸۰
$12 \leq x < 16$	### ### ###	۱۷	$\frac{12+16}{2} = 14$	۲۳۸
$16 \leq x < 20$	### ////	۹	۱۸	۱۶۲
جمع	—	۴۴	—	۵۱۶

۳- میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس ۳۰ نفره  $17/25$  شده است. یکی از دانش‌آموزان در این امتحان نمره  $3/5$  گرفته است؛ در حالی که بقیه آنها نمره بالای ۱۵ گرفته‌اند. **۱۲۷**

الف) اگر نمره این دانش‌آموز را از کلاس کنار بگذاریم، حدس می‌زنید معدل کلاس کمتر می‌شود یا بیشتر؟ حال با محاسبه معدل کلاس پس از حذف نمره این دانش‌آموز حدس خود را بررسی کنید.

$$30 \times 17/5 = 517/5 \quad 517/5 - 3/5 = 514 \quad 514 \div 29 = 17/72 \text{ بیشتر}$$

ب) حالا فرض کنید همه دانش‌آموزان کلاس نمره کمتر از ۱۴ گرفته‌اند؛ به جز یک نفر که ۲۰ گرفته است، معدل این کلاس ۳۰ نفره  $10/25$  شده است. اگر دانش‌آموزی را که نمره ۲۰ گرفته است کنار بگذاریم، حدس می‌زنید معدل کلاس کمتر می‌شود یا بیشتر. معدل کلاس پس از حذف نمره این دانش‌آموز را به دست آورید و حدس خود را بررسی کنید. **کمتر**

$$30 \times 10/25 = 307/5 \quad 307/5 - 20 = 277/5 \quad 277/5 \div 29 = 9/91$$

### خواندنی

فکر اولیه احتمال بر بازی‌های شانسی مبتنی است. این گونه بازی‌ها از زمان‌های بسیار قدیم رایج بوده‌اند؛ زیرا در حفاری‌های باستان‌شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شانسی مشاهده شده‌اند؛ از جمله مکعبی استخوانی که روی وجه‌های آن عددهایی از ۱ تا ۶ نقش شده است.

در روزگار کنونی در مواردی که به راحتی نتوان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد از شانس استفاده می‌شود؛ برای مثال در شروع بازی فوتبال از پرتاب سکه استفاده می‌کنند یا برای قبول یا رد یک موضوع از قرعه کمک می‌گیرند. همچنین بانک‌ها برای اختصاص دادن جایزه به مشتریان دارای حساب قرض الحسنه از قرعه کشی استفاده می‌کنند.



۱- ده کارت هم اندازه و هم شکل داریم و روی آنها عددهای ۱۱ تا ۲۰ را نوشته‌ایم.

کارت‌ها را به پشت روی میز قرار می‌دهیم و به طور تصادفی، یکی از آنها را برمی‌داریم.

احتمال اینکه روی این کارت عددی اول باشد بیشتر است یا احتمال اینکه عددی مرکب باشد؟

چرا؟ **مرکب - زیرا تعداد اعداد مرکب بیشتر است.**



وقتی یک سکه را می‌اندازیم، قبل از آنکه به زمین برسد نمی‌دانیم چه پیش می‌آید؛ یعنی روی سکه می‌آید یا پشت آن!

اما می‌دانیم که دو حالت ممکن است پیش آید: روی سکه یا پشت سکه! از آنجا که این دو حالت مشابه‌اند، پس امکان اینکه

روی سکه یا پشت آن بیاید، برابر است و چون در یک حالت از این دو حالت ممکن، روی سکه می‌آید، پس احتمال اینکه

روی آن بیاید  $\frac{1}{2}$  است. به همین ترتیب، احتمال اینکه پشت سکه هم بیاید،  $\frac{1}{2}$  است.

۲- در هر یک از موارد زیر، حالت‌های هم‌شانس را بنویسید.



الف) عقربه چرخنده را می‌چرخانیم **ایستادن عقربه روی هر یک از رنگ‌ها**



ب) تاسی را می‌اندازیم. **آمدن هر یک از اعداد روی تاس**

۳- معلم از دانش‌آموزان پرسید: «یک مهره را به طور تصادفی از کیسه‌ای که در آن سه مهره سبز و یک مهره سفید است، بیرون می‌آوریم. چند حالت هم‌شانس می‌تواند رخ دهد؟»

بلافاصله شایان پاسخ داد: «دو حالت: سبز، سفید»

سپس علی برای آنکه بتواند پاسخ سؤال را بدهد،

مهره‌های سبز را شماره‌گذاری کرد و پاسخ داد:

«چهار حالت: سبز ۱، سبز ۲، سبز ۳، سفید»

به نظر شما چرا پاسخ علی درست است؟ **زیرا هر یک از مهره‌های سبز از هم متمایز هستند.**





۴- در آزمایش مربوط به فعالیت ۱ با توجه به اینکه ۱۰ کارت داریم پس بیرون آمدن هر یک از

۱۲۹

عددهای روی کارت‌ها هم شانس هستند حالا به سؤال‌ها پاسخ دهید:

الف) در چند تا از آنها عدد روی کارت، اول است؟ **۴ تا**

ب) در چند تا از آنها عدد روی کارت، مرکب است؟ **۶ تا**

ج) احتمال هر یک از اتفاق‌ها (پیشامد)های زیر را پیدا کنید:

$\frac{4}{10}$  = احتمال آنکه عدد روی کارت، اول باشد.  $\frac{6}{10}$  = احتمال آنکه عدد روی کارت، مرکب باشد.

برای اینکه احتمال رخ دادن یک پیشامد را بیابیم، تعداد حالت‌های منجر به آن اتفاق را بر تعداد کل حالت‌ها تقسیم می‌کنیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

۱۲۹

## کار در کلاس



۱- پنج توپ کوچک با شماره‌های ۱ تا ۵ را داخل یک جعبه ریخته‌ایم. احمد یکی از آنها را به طور تصادفی از جعبه خارج می‌کند. قرار است اگر عدد توپ زوج بود، جایزه بگیرد.

احتمال اینکه احمد جایزه بگیرد چقدر است؟  $\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}$  = احتمال رخ دادن یک پیشامد

۲- حمید می‌داند دوستش در خرداد به دنیا آمده است اما نمی‌داند چه روزی! احتمال

اینکه دوست حمید در روز ۱۵ خرداد به دنیا آمده باشد، چقدر است (خرداد ۳۱ روز دارد)؟  $\frac{1}{31}$

۳- برای هر یک از موارد زیر یک مثال بنویسید.

الف) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن صفر باشد. **در پرتاب یک تاس عددی بزرگتر از ۶ بیاید.**

ب) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن کمتر از  $\frac{1}{4}$  باشد. **در پرتاب یک تاس عددی مرکب بیاید.**

ج) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن  $\frac{1}{4}$  باشد. **در پرتاب یک تاس عددی فرد بیاید.**

د) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن بیشتر از  $\frac{1}{4}$  باشد. **در پرتاب یک تاس شمارنده ی ۶ بیاید.**

ه) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن یک باشد. **در پرتاب یک تاس عددی کوچکتر ۷ بیاید.**

عبارت زیر را بخوانید؛ درستی یا نادرستی آن را مشخص کنید و دلیل این تشخیص را

در چند جمله بنویسید. «احتمال رخ دادن یک پیشامد برابر با صفر، یک یا عددی بین صفر و یک است.»

**اگر حالتی از کل حالت های موجود رخ نداده باشد پس صورت کسر احتمال صفر شده و احتمال صفر می شود.**

**اگر تمام حالت ها رخ دهد صورت کسر با مخرج آن برابر و احتمال یک می شود.**

**اگر عددی بین این دو باشد احتمال نیز بین یک و صفر خواهد بود.**

## فعالیت



۱- الف) عقربه چرخنده زیر را می چرخانیم. احتمال هریک از حالت های زیر را پیدا



نایستد	بایستد	
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	عقربه روی نارنجی
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	عقربه روی آبی
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	عقربه روی سفید

کنید و در جدول بنویسید

$$\frac{4}{8} + \frac{4}{8} = \frac{8}{8}$$

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8}$$

ب) حاصل جمع دو عدد هر سطر جدول را به دست آورید. چرا حاصل جمع ها با هم برابرند؟

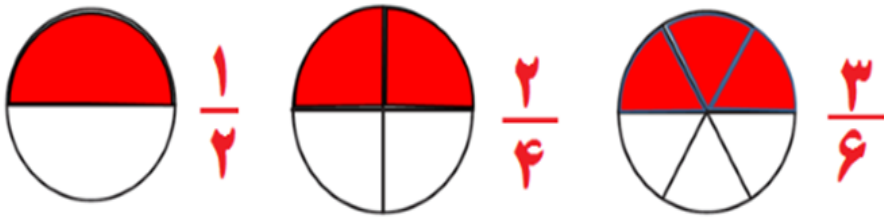
**چون مجموع احتمال رخ دادن و رخ ندادن هر پیشامد یک است.**

ج) احتمال رخ دادن یک پیشامد  $\frac{3}{8}$  است. احتمال رخ ندادن آن چقدر است؟ چرا؟  $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

**چون جمع آن ها باید یک باشد.**



۲- الف) هر یک از چرخنده‌های زیر را طوری رنگ کنید که احتمال ایستادن عقربه روی رنگ سفید برابر  $\frac{1}{4}$  باشد.



ب) بین این فعالیت و تساوی کسرها چه ارتباطی وجود دارد؟

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

**کسرها مساوی اند پس احتمال آنها هم مساوی است.**

۳- از یک کیسه حاوی ۵ مهره، مهره‌ای را به طور تصادفی بیرون می‌آوریم. احتمال سبز بودن مهره،  $\frac{3}{10}$  است.

$$\frac{3}{10} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = \frac{3 \times 50}{10} = 15$$

چند تا از مهره‌ها سبزند؟

تمرین

۱- عقربه شکل چرخنده روبه‌رو را ۳۰۰ بار می‌چرخانیم. عبارتهای درست را با  $\checkmark$  و عبارتهای نادرست را با  $\times$  مشخص کنید.



الف) عقربه ۱۰۰ بار روی زرد می‌ایستد.  $\times$   
 ب) انتظار داریم عقربه تقریباً ۱۰۰ بار روی آبی بایستد.  $\checkmark$

ج) انتظار داریم تعداد دفعاتی که عقربه روی هر یک از این سه رنگ می‌ایستد، دقیقاً برابر باشد.  $\times$

۲- تاسی را می‌اندازیم؛ احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.  
 الف) مضرب ۵ بیاید.  $\frac{1}{6}$   
 ب) شمارنده ۶ بیاید  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$   
 ج) ۷ یا بیشتر بیاید.  $\frac{0}{6} = 0$

**کل حالت‌های تاس = ۶**

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

۳- سی مهره با شماره‌های ۱ تا ۳۰ را در گردونه‌ای ریخته‌ایم. مهره‌ای را به طور تصادفی از گردونه خارج می‌کنیم. احتمال هریک از حالت‌های زیر را به دست آورید:

۱۳۱

تعداد حالت‌های مطلوب  
 = احتمال رخ دادن یک پیشامد  
 تعداد همه حالت‌های ممکن

الف) فرد بودن عدد روی مهره  $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

ب) مضرب ۵ بودن عدد روی مهره  $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

ج) اول بودن عدد روی مهره  $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

۴- احتمال هریک از پیشامدهای زیر را با توجه به چرخنده زیر به دست آورید.



الف) عقربه چرخنده روی سبز بایستد.  $\frac{3}{8}$

ب) عقربه چرخنده روی آبی بایستد.  $\frac{2}{8}$

ج) عقربه چرخنده روی قرمز بایستد.  $\frac{3}{8}$

۵- در یک کیسه تعدادی مهره رنگی وجود دارد. می‌خواهیم مهره‌ای را به طور تصادفی از آن بیرون بیاوریم. می‌دانیم احتمال سبز بودن مهره  $\frac{3}{8}$  است.

۱۳۱

الف) احتمال سبز نبودن مهره را حساب کنید.  $\frac{5}{8}$

ب) آیا می‌توانید تعداد مهره‌های درون پاکت را پیدا کنید؟ چرا؟

**خیر - زیرا این کسر ممکن است ساده شده یک کسر دیگر باشد.**

۶- یک سکه در چهار پرتاب پشت سر هم رو آمده است. فکر می‌کنید اگر بار پنجم آن را

**پیندازیم، چه می‌آید؟ چرا؟ معلوم نیست. زیرا پرتاب سکه یک پیشامد تصادفی است.**



## فعالیت



	هر دو، پشت	هر دو، رو	یکی رو، یکی پشت
در ۲۰ آزمایش	۷	۳	۱۰
در ۸۰ آزمایش	۲۵	۱۷	۳۸

۱- سارا، ستاره و محدثه یک بازی طراحی کرده‌اند. آنها دو سکه را هم‌زمان می‌اندازند. اگر هر دو، رو آمد، سارا امتیاز می‌گیرد و اگر هر دو، پشت آمد، ستاره. اگر هم، یکی رو و یکی پشت آمد، محدثه امتیاز می‌گیرد.

فکر می‌کنید این بازی عادلانه است؟ یعنی شانس امتیاز گرفتن بازیکن‌ها با هم مساوی است؟

۲- دو سکه بردارید و ۲۰ بار آزمایش کنید. نتایج ۲۰ آزمایش را با رسم چوب خط در جدول ثبت کنید. نتایج آزمایش خودتان را با نتایج سه هم‌گروهی‌تان جمع کنید و با استفاده از نتایج مربوط به ۸۰ آزمایش، درستی فکرتان را بررسی کنید.

آیا نتیجه آزمایش‌ها، پاسخ شما به فعالیت ۱ را تأیید می‌کند؟ **بله**

۳- در جدول زیر، حالت‌های ممکن در پرتاب دو سکه نشان داده شده است. با توجه به این جدول، احتمال امتیاز گرفتن هر کدام از بازیکن‌ها را محاسبه کنید.

سکه دوم سکه اول		
	رو - رو	پشت - رو
	پشت - رو	پشت - پشت

محدثه

احتمال اینکه یک سکه رو بیاید و یک سکه پشت =  $\frac{۲}{۴}$

احتمال اینکه هر دو سکه رو بیایند. **سارا** =  $\frac{۱}{۴}$

احتمال اینکه هر دو سکه پشت بیایند. **ستاره** =  $\frac{۱}{۴}$

حالا دوباره به سؤال فعالیت ۱ پاسخ دهید و برای پاسختان دلیل بیاورید.

**چون احتمال برنده شدن محدثه بیشتر است پس بازی عادلانه نیست.**



محمد می خواست یک شاخه گل رز برای مادرش و یک شاخه هم برای پدرش بخرد. در گل فروشی تعداد زیادی گل رز به رنگ های سفید، قرمز و صورتی بود.

او دو شاخه گل را به طور تصادفی و به ترتیب برای مادر و پدرش برداشت.

الف) همه حالت های ممکن را به کمک جدول پیدا کنید.  
ب) در چند تا از این حالت ها دست کم یکی از گل ها سفید است؟

گل مادر \ گل پدر	سفید	قرمز	صورتی
سفید	س - س	ق - س	ص - س
قرمز	س - ق	ق - ق	ص - ق
صورتی	س - ص	ق - ص	ص - ص

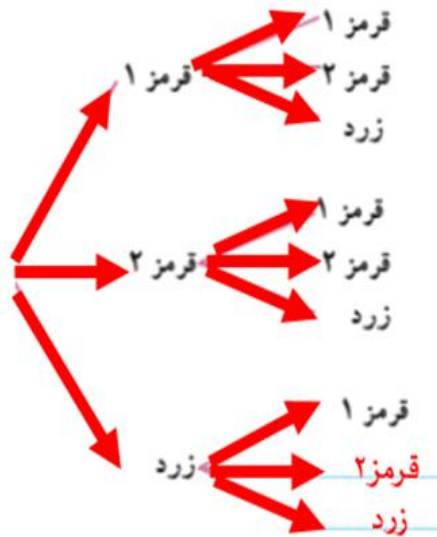
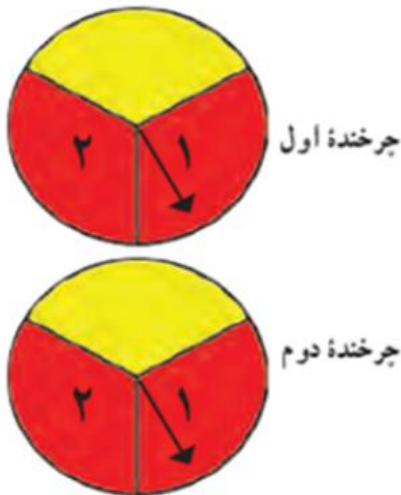
## ۵ حالت

## فعالیت



۱- می خواهیم عقربه های دو چرخنده زیر را بچرخانیم و رنگی را که عقربه ها روی آن می ایستند، یادداشت کنیم.

الف) با کامل کردن نمودار درختی، همه حالت های ممکن را پیدا کنید.  
حالت های ممکن



- قرمز ۱ - قرمز ۱ ✓
- قرمز ۲ - قرمز ۱ ✓
- زرد - قرمز ۱
- قرمز ۱ - قرمز ۲ ✓
- قرمز ۲ - قرمز ۲ ✓
- زرد - قرمز ۲
- قرمز ۱ - زرد
- قرمز ۲ - زرد
- زرد - زرد





ب) شما کدام راه حل را بیشتر دوست دارید؟ **روش نمودار درختی**

ج) آیا می توانید روش دیگری برای یافتن تعداد حالت های ممکن پیشنهاد کنید؟

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

د) تعداد حالت های ممکن چند تا است؟ **۸ تا**

ه) احتمال اینکه هر سه سکه رو بیاید، چقدر است؟  $\frac{1}{8}$

و) احتمال اینکه دقیقاً دو سکه رو و یکی پشت بیاید، چقدر است؟  $\frac{3}{8}$

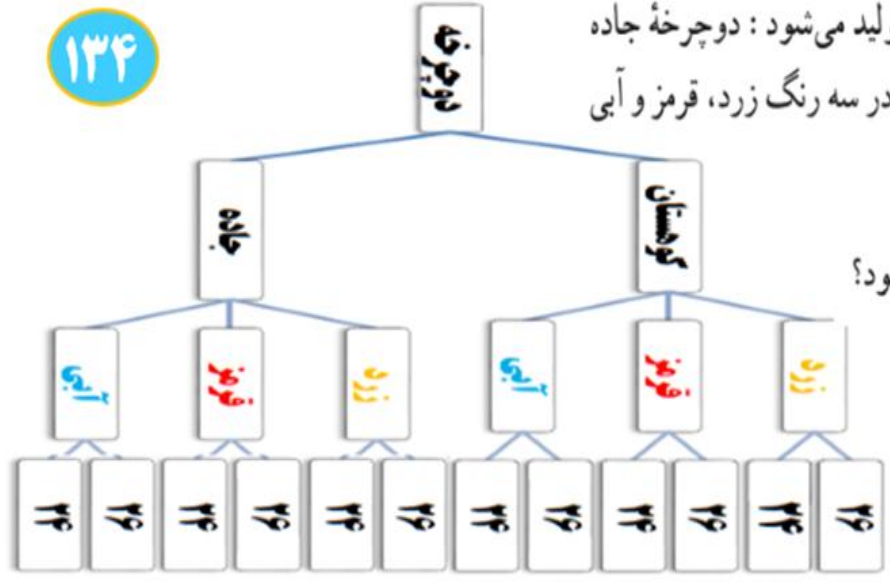
تمرین



۱- در یک کارخانه دوچرخه سازی دو مدل دوچرخه تولید می شود : دوچرخه جاده و دوچرخه کوهستان. در این کارخانه هر نوع دوچرخه در سه رنگ زرد، قرمز و آبی و دو اندازه ۲۴ و ۲۶ تولید می شود.

الف) چند نوع دوچرخه مختلف در این کارخانه تولید می شود؟

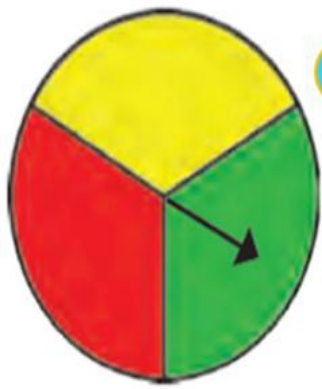
$$2 \times 3 \times 2 = 12 \text{ نوع}$$



ب) در نشریه تبلیغاتی این کارخانه، در هر صفحه عکس یکی از این دوچرخه ها آمده است. علی یکی از صفحه ها را به طور تصادفی انتخاب می کند. احتمال اینکه در این صفحه دوچرخه کوهستان

آبی رنگ اندازه ۲۶ دیده شود، چقدر است؟  $\frac{1}{12}$





۱۳۵



۲- عقربه چرخنده مقابل را می چرخانیم و تاسی را می اندازیم.  
الف) با کامل کردن جدول، همه حالت های ممکن را پیدا کنید.

تاس \ چرخنده	۱	۲	۳	۴	۵	۶
سبز	(س، ۱)	(س، ۲)	(س، ۳)	(س، ۴)	(س، ۵)	(س، ۶)
قرمز	(ق، ۱)	(ق، ۲)	(ق، ۳)	(ق، ۴)	(ق، ۵)	(ق، ۶)
زرد	(ز، ۱)	(ز، ۲)	(ز، ۳)	(ز، ۴)	(ز، ۵)	(ز، ۶)

ب) در چند حالت عقربه روی قرمز ایستاده است و تاس عددی زوج را نشان می دهد؟

۳- قفلی داریم که رمز آن عددی یک رقمی است. (این رقم می تواند ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹ باشد).

الف) احتمال اینکه با یک حدس بتوانیم رمز قفل را پیدا کنیم، چقدر است؟  $\frac{1}{10}$

ب) اگر رمز دو رقمی شود، این احتمال چه تغییری می کند؟  $\frac{1}{100}$

**احتمال خیلی کم می شود. چون تعداد کل حالت ها زیاد می شود ولی حالت های ممکن همان است.**

۴- دو تاس را می اندازیم:



الف) با رسم جدول مناسب، همه ۳۶ حالت ممکن را پیدا کنید.

ب) احتمال اینکه یکی از تاس ها ۳ و تاس دیگر ۵ بیاید، چقدر است؟  $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

ج) احتمال اینکه هر دو تاس ۵ بیاید، چقدر است؟  $\frac{1}{36}$

د) پاسخ قسمت های ب و ج را با هم مقایسه کنید و دلیل تفاوتشان را بنویسید.

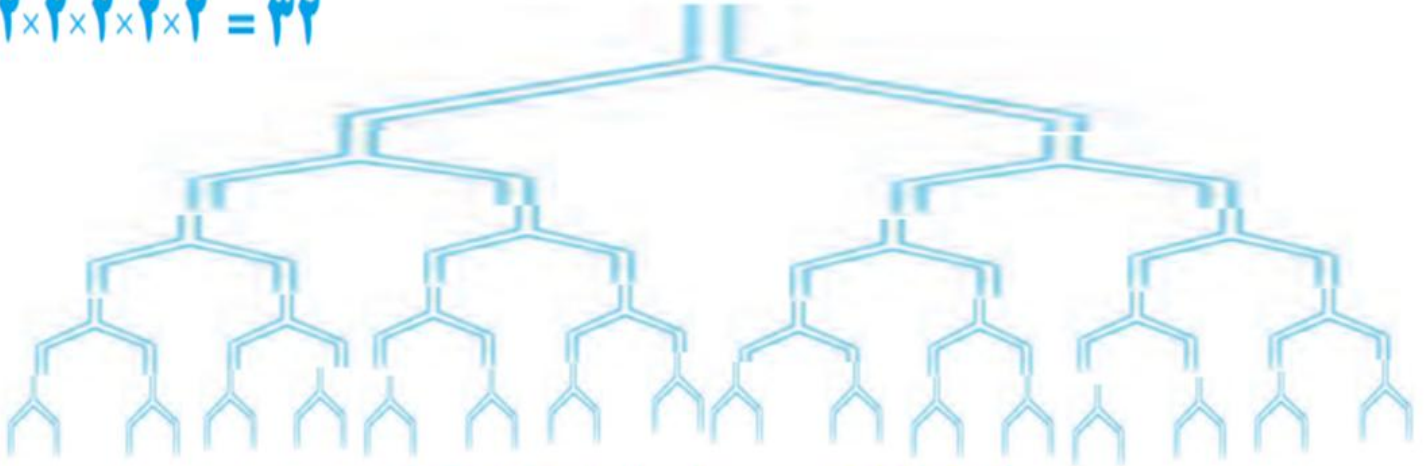
۵- دو سکه را می‌اندازیم. احتمال اینکه دست کم یکی از آنها رو بیاید، چقدر است؟

۱۳۵

۶- لوله‌های انشعاب آب به هر قسمت که برسند، دوشاخه می‌شوند.

پس از طی کردن ۵ قسمت چند خروجی خواهیم داشت؟ با عدد توان‌دار نشان دهید.

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$



●●●●● مرور فصل ۸ ●●●●●

۱۳۶

### مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- دسته‌بندی داده‌ها
- مرکز دسته
- فراوانی
- میانگین
- آمار
- حالت‌های هم‌شانس
- احتمال
- جدول حالت‌های ممکن
- نمودار درختی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- دسته‌بندی داده‌های زیاد و پراکنده
- محاسبه میانگین داده‌های دسته‌بندی شده
- پیدا کردن احتمال یک پیشامد
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک جدول
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک نمودار درختی

### کاربرد

آمار و احتمال در زندگی روزمره کاربرد وسیعی دارد. به کمک اطلاعات آماری و با درک

مفهوم احتمال می‌توانیم وقوع رخدادهایی چون بارندگی، سیل و بارش برف را پیش‌بینی کنیم.

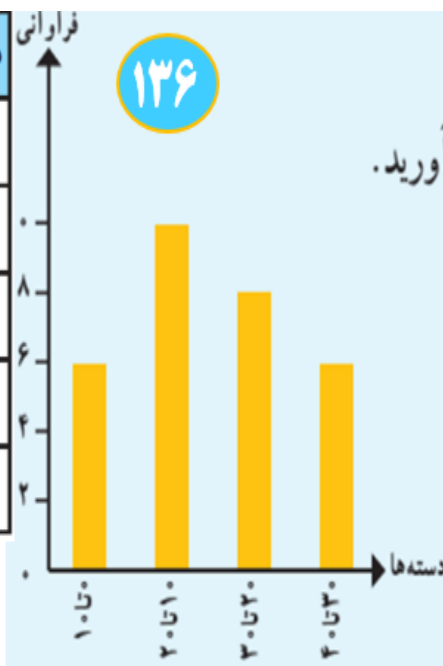


۱- با توجه به نمودار مقابل، میانگین داده ها را به دست آورید.

۲- دو تاس را می اندازیم.

الف) تعدادی از حالت های هم شانسی ممکن را بنویسید.

ب) احتمال اینکه هر دو تاس ۱ بیاید، چقدر است؟



مرکز × فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	حدود دسته ها
۳۰	۵	۶	$0 \leq x < 10$
۱۵۰	۱۵	۱۰	$10 \leq x < 20$
۲۰۰	۲۵	۸	$20 \leq x < 30$
۲۱۰	۳۵	۶	$30 \leq x \leq 40$
۵۹۰	###	۳۰	مجموع

$$\text{میانگین} = \frac{۵۹۰}{۳۰} = ۱۹/۶۶$$

الف - زوج آمدن هر دو تاس یا فرد آمدن هر دو تاس  
هر دو عدد مثل هم باشند یا هر مجموع هر دو عدد ۶ باشند

ب - تعداد کل حالت های پرتاب دو تاس = ۳۶

$$\text{احتمال} = \frac{۱}{۳۶}$$

تعداد حالت های مطلوب = ۱