

ریاضی: هشتم

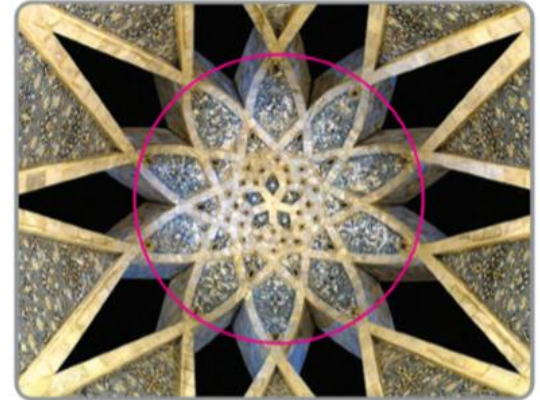
فصل ۹

دایره

فصل نهم: دایره

صفحه: ۱۳۷ تا ۱۵۰

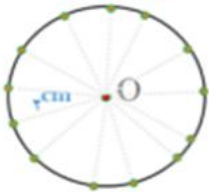
تهیه کننده: احمد فرخ وند



زواره‌های معانی و مرکزی و ارتباط آنها با کمان‌ها در دایره کاربرد بسیاری در طراحی نقش فرنی‌ها و دیگر صنایع دستی و معماری دارد.
در تصویر بالا نمای داخلی سقف آرامگاه حکیم خیام نیشابوری را مشاهده می‌کنید. خیام، فیلسوف، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و ریاضی‌سرای ایرانی قرن پنجم هجری شمسی است. یکی از برجسته‌ترین کارهای وی اصلاح گاهشماری ایران در زمان وزارت خواجه نظام الملک در دوره سلجوقی است.

در تهیه این فایل از اسلایدهای استاد یونس جمال پور و سایت زیر استفاده شده است. یونس جمال پور lali-riazi.blogfa.com

۱۳۸



خط و دایره

فعالیت



۱- پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام

از نقطه O، ۲ سانتی متر باشد.

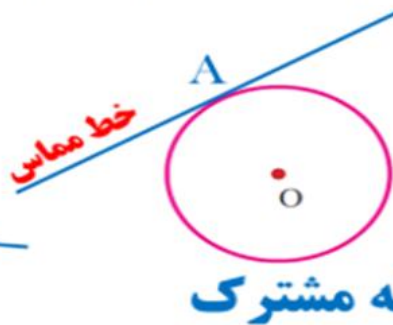
اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می‌شود؟ دایره

۲- دو خط یا موازی‌اند یا متقاطع؛ یعنی، یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه یکدیگر را

قطع می‌کنند.



حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.

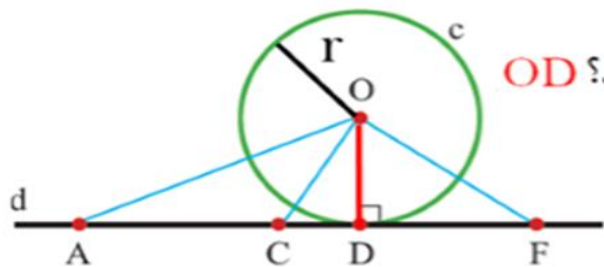


در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است. hamgamdars.com | همگام درس

دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

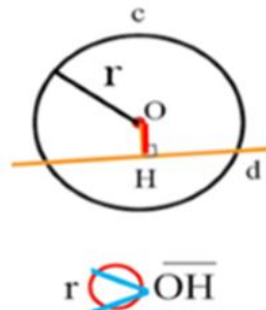
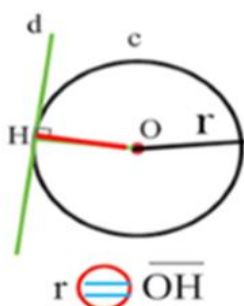
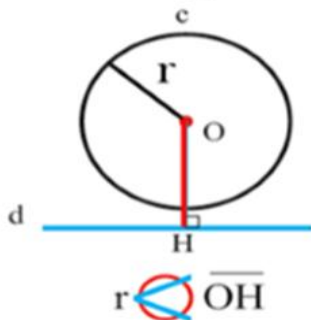
۳- فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند. خط d بر دایره c به مرکز O و شعاع r مماس است.

شعاع دایره است



کدام پاره خط فاصله مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟ OD
اندازه این پاره خط را با r مقایسه کنید. $OD = r$

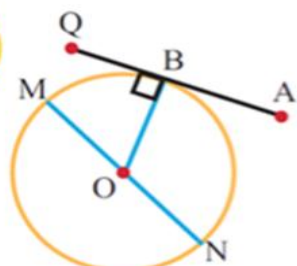
۴- در هر یک از شکل‌های زیر دایره‌ای به شعاع r رسم کرده‌ایم. فاصله مرکز دایره از خط d را \overline{OH} بنامید و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌های زیر را با علامت $>$ ، $=$ ، یا $<$ کامل کنید.



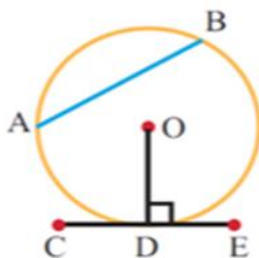
شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.



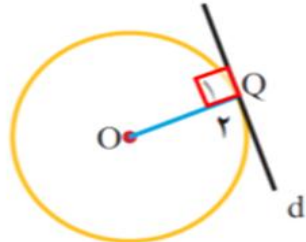
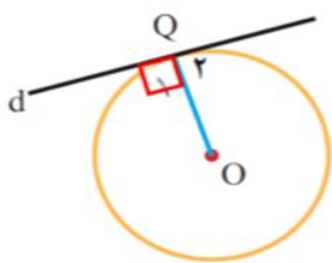
۱- در هر شکل، کدام پاره خط بر دایره مماس است؟



$AQ \perp OB$ → بر دایره مماس است



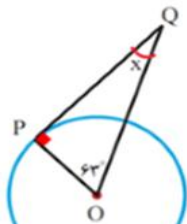
$CE \perp OD$ → بر دایره مماس است



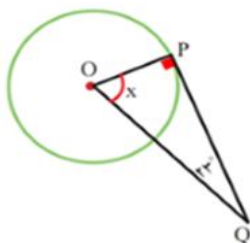
۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است. زاویه Q_1 چه نوع زاویه‌ای است؟ **قائمه**

$Q_1 = 90^\circ$

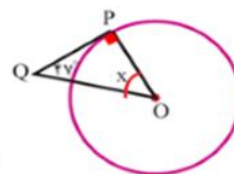
۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



$Q = 27^\circ$



$P = 67^\circ$



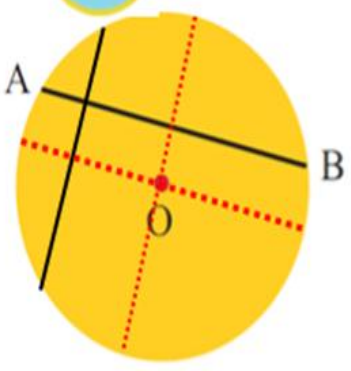
$O = 43^\circ$



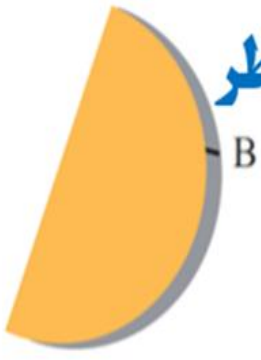
۱۳۹

۱- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره‌ای رسم کنید. سپس، صفحه

دایره‌ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید. A را به B وصل کنید. این پاره خط **وتر دایره** نامیده می‌شود. دایره را طوری تا کنید که نقاط A و B روی هم قرار بگیرند. تای کاغذ را باز کنید.



روی خط تا را با مداد پررنگ کنید. در هندسه به این پاره خط چه می‌گویند؟ **قطر** روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید. دو پاره خط رسم شده یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟ **مرکز**



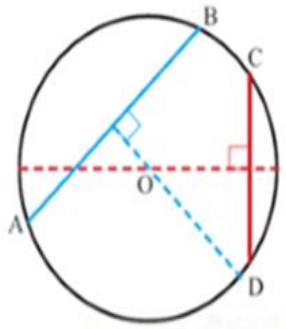
بزرگترین وتر دایره قطر نام دارد

پاره خطی که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند وتر نام دارد

۱۴۰

۲- نتیجه فعالیت (۱) را به کمک شکل روبه‌رو توضیح دهید.

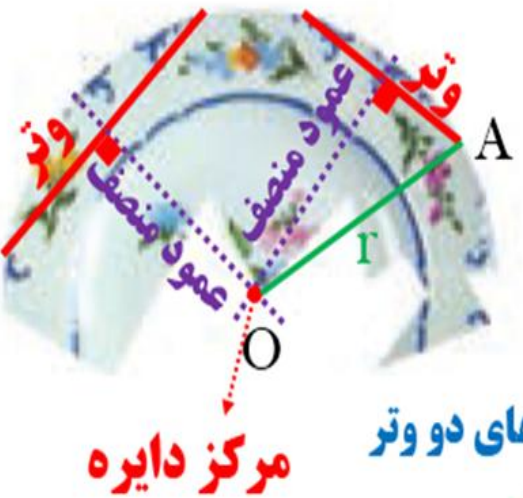
برای پیدا کردن مرکز یک دایره کافیست محل برخورد عمود منصف‌های دو وتر آن را پیدا کنیم



۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است.

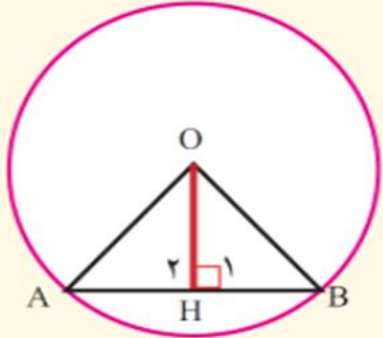
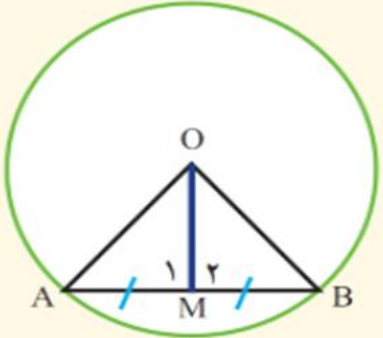
تصویر آن را در شکل روبه‌رو می‌بینید.

با توجه به فعالیت‌های قبل، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم قطر این بشقاب را پیدا کنیم.



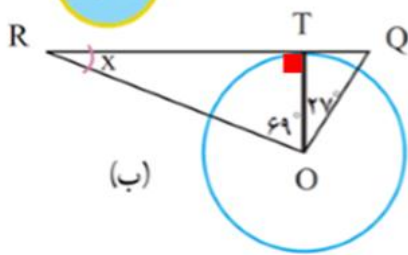
برای پیدا کردن مرکز یک دایره کافیست محل برخورد عمود منصف‌های دو وتر آن را پیدا کنیم. اگر شعاع را ۲ برابر کنیم قطر دایره بدست می‌آید

۴- دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجه هر یک از آنها را کامل کنید. این دو چه تفاوتی دارند؟ درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

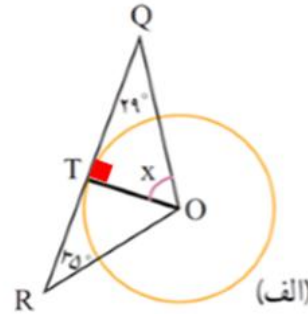
<p>خطی از O بر AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. دو زاویه H_1 و H_2 قائمه‌اند. پس دو مثلث قائم‌الزاویه AOH و BOH در حالت و تر و یک ضلع برابرند؛ پس $\overline{AH} = \overline{BH}$</p> 	<p>وسط AB را M می‌نامیم و O را به M وصل می‌کنیم. پس دو مثلث BOM و AOM در حالت سه ضلع با هم برابرند؛ پس $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ و چون حاصل جمع این دو زاویه 180° درجه است، پس هر کدام از آنها 90° درجه است.</p> 
---	---

نتیجه: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را **نصف می‌کند** و بر عکس پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند، **بر آن عمود است**.

۱۴۱

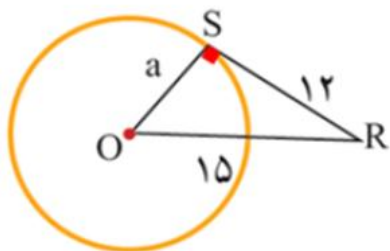


$$x = 21^\circ$$

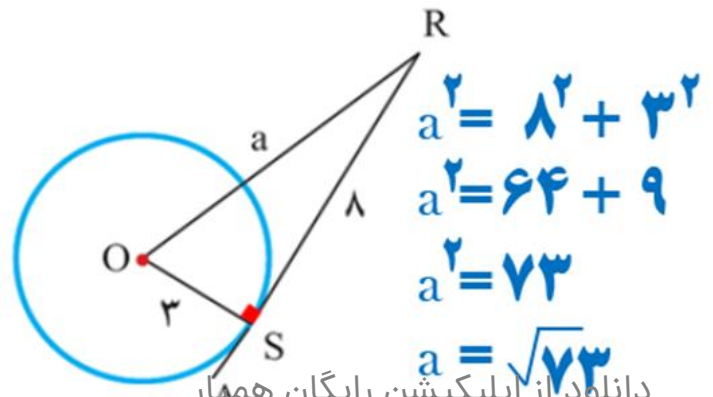


$$x = 61^\circ$$

۲- در هر شکل، SR بر دایره مماس است. مقدار a را به دست آورید.



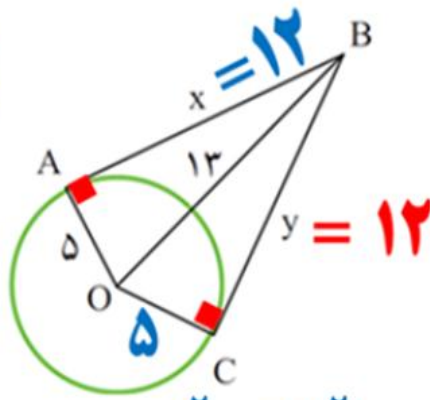
$$\begin{aligned} a^2 &= 15^2 - 12^2 \\ a^2 &= 225 - 144 \\ a^2 &= 81 \\ a &= \sqrt{81} = 9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 - 3^2 \\ a^2 &= 64 - 9 \\ a^2 &= 55 \\ a &= \sqrt{55} \end{aligned}$$



۱۴۱



۱- نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد. از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم. فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

$$x^2 = 13^2 - 5^2$$

$$x^2 = 169 - 25$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144} = 12$$

$$y^2 = 13^2 - 5^2$$

$$y^2 = 169 - 25$$

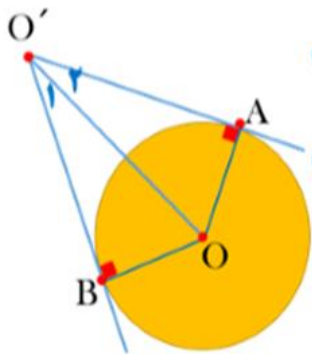
$$y^2 = 144$$

$$y = \sqrt{144} = 12$$

اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است. خطی که مرکز دایره را به نقطه B وصل می‌کند نیمساز زاویه است.

۱۴۱

۲- از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B بنامید. شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید. باید ثابت کنیم دو مثلث با هم منتهی‌اند



شعاع دایره $OA = OB$

مشترک $O'O = O'O$

وتر و یک ضلع $\triangle OBO' \cong \triangle OAO'$

در نتیجه سایر اجزاء مثلث

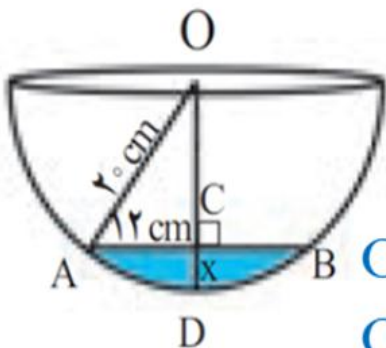
نیز با هم مساویند پس نتیجه می‌شود:

الف) چرا $O'A = O'B$ ؟

ب) چرا OO' نیمساز $\angle O'$ است؟

۳- در کاسه‌ی روبه‌رو مقداری آب ریخته‌ایم،

\overline{AB} برابر ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟



$$OA^2 = 20^2 - 12^2$$

$$OA^2 = 400 - 144 = 256$$

$$OA = \sqrt{256} = 16$$

$$x = 20 - 16 = 4$$



$10 : 10$

$10 : 15$

$360 - 12 = 30$

۱- ساعت‌های روبه‌رو چه زمانی را نشان می‌دهند؟

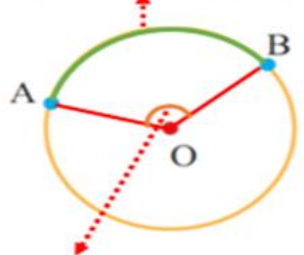
پنج دقیقه بعد، هر یک از ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهد؟

در این مدت، عقربه دقیقه شمار چند درجه حرکت کرده است؟

در هر یک از ساعت‌ها مسیر حرکت عقربه دقیقه‌شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر

طولانی‌تری را طی کرده است؟ **عقربه ساعت دیواری**

کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی



زاویه مرکزی

۲- الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده‌اند.

کمان کوچک‌تر را با \widehat{AB} نمایش می‌دهیم و آن را کمان AB می‌نامیم.

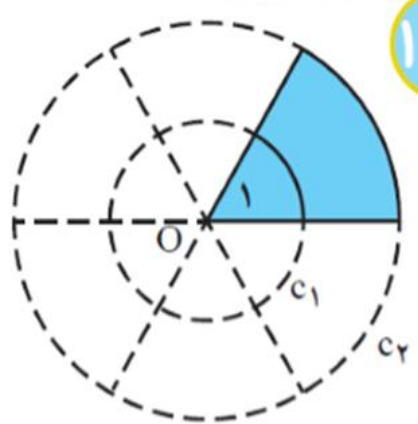
آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.

وقتی که دو نقطه در دو سر قطر انتخاب شوند

ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه AOB **زاویه مرکزی** روبه‌رو به کمان AB نامیده می‌شود.

کمان AB نیز روبه‌رو به زاویه مرکزی AOB است.



۳- شکل روبه‌رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.

زاویه O_1 چه کسری از 360 درجه است؟ $\frac{1}{6}$

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره c_1 چه کسری از دایره c_1 است؟ $\frac{1}{6}$

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره c_2 چه کسری از دایره c_2 است؟ $\frac{1}{6}$

آیا این دو کسر با هم مساوی‌اند؟ **بله**

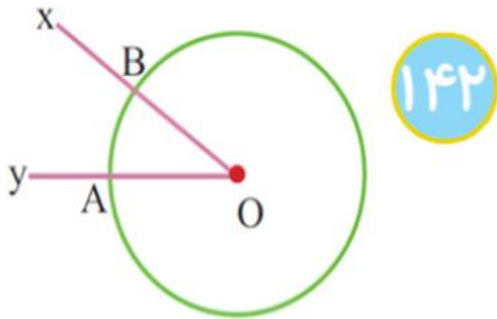
آیا طول این دو کمان مساوی است؟ **خیر**

اندازه کمان \widehat{AB} برابر است با اندازه **زاویه مرکزی** روبه‌رو به آن. بنابراین، ممکن است دو کمان با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوتی داشته باشند.

۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان روبه‌رو به O_1 در هر یک

از دایره‌های c_1 و c_2 برابر 60 درجه است؟

هر دایره 360 درجه است این دو کمان هم $\frac{1}{6}$ دایره هستند پس هر کدام 60 درجه می‌شوند



۱۴۲

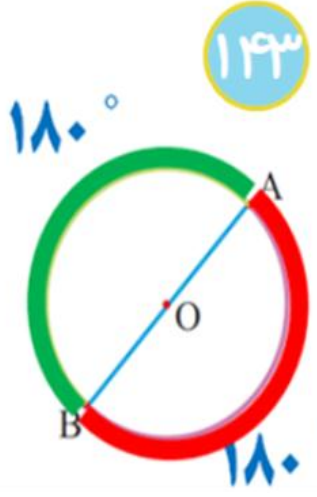
۵- در شکل رو به رو زاویه xOy برابر ۳۶ درجه است.

کمان AB چند درجه است؟ 36°

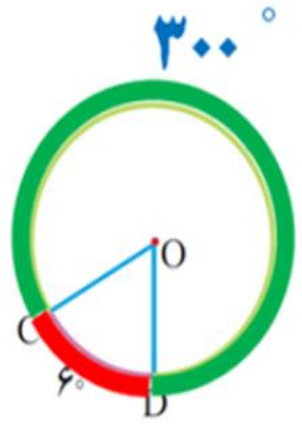
طول کمان AB چه کسری از دایره است؟ $\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$

برای پاسخ دادن به این پرسش از تساوی روبه‌رو کمک بگیرید.

$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}$$



۱۴۳



۳۰۰

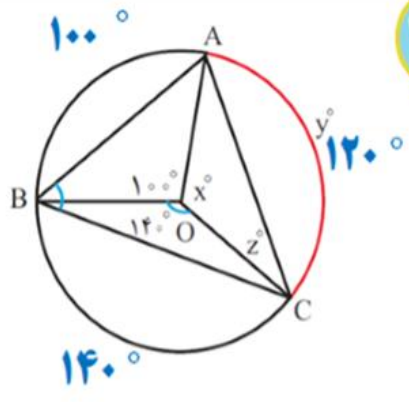
کار در کلاس

۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است.

اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.

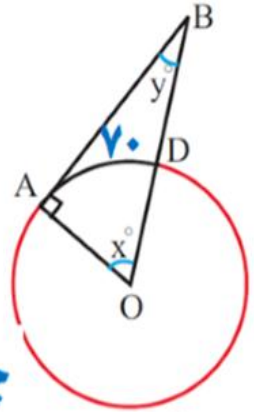
$$x = \widehat{AC}$$

$$x = 120^\circ$$



۱۴۴

۲- اندازه کمان و زاویه‌های مجهول را پیدا کنید.



$$x = \widehat{AD}$$

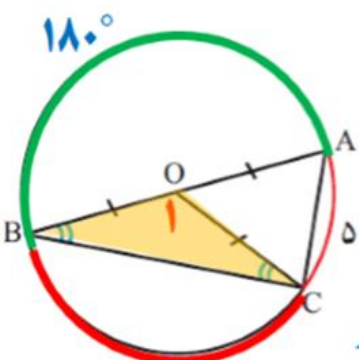
$$x = 70^\circ$$

مجموع سه زاویه مثلث ۱۸۰ درجه است پس:

$$y = 20^\circ$$

چون مثلث AOC متساوی الساقین است

پس دو زاویه مساوی دارد $z = 30^\circ$



$$\widehat{BC} = 130^\circ$$

$$\widehat{O} = 130^\circ$$

۳- در شکل رو به رو، AB قطر دایره است.

زاویه B چند درجه است؟

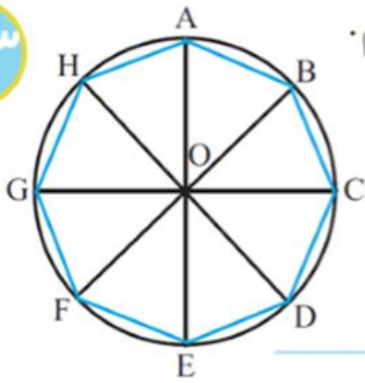
چون مثلث BOC متساوی الساقین است $180 - 130 = 50$

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 50 \div 2 = 25$$

پس دو زاویه مساوی دارد

۱- محیط دایره روبرو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده ایم. فعالیت

۱۳۳



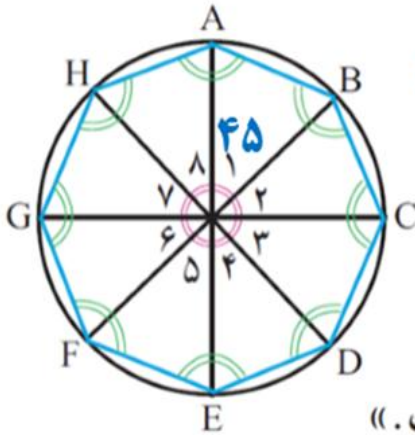
می خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.
رضا برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می کند:
«مثلث های AOB, BOC, COD و... متساوی الساقین اند.»

چرا؟ $OH=OG=OF=OE=OD=OC=OB=OA$

زیرا شعاع دایره هستند

و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots$ پس همه زاویه های سبز رنگ با هم برابرند.

$$360 \div 8 = 45$$



چرا؟ **زیرا زاویه های مجاور به ساق ها با هم مساویند پس:**

پس همه زاویه های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟»

آرش می گوید: «ولی این تنها برابری زاویه ها را نشان می دهد»

و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع های هشت ضلعی

پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»

بعد ادامه می دهد: «مثلث های AOB, BOC, COD و... هم نهشت اند. در چه حالتی؟ **ض ض ض**»

۱۳۴

پس $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$ یعنی ضلع های هشت ضلعی هم مساوی اند.»

هر جا لازم است، توضیحاتی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن هشت ضلعی کامل شود.

۲- برای هر مورد دلیل بیاورید.

<p>ب) فرض کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$. چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$؟</p>	<p>الف) فرض کنید $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. چرا $\overline{AB} = \overline{CD}$؟</p>
--	--

$$AB = CD$$

$$OB = OC$$

$$OA = OD$$

شعاع
شعاع

ض ض ض

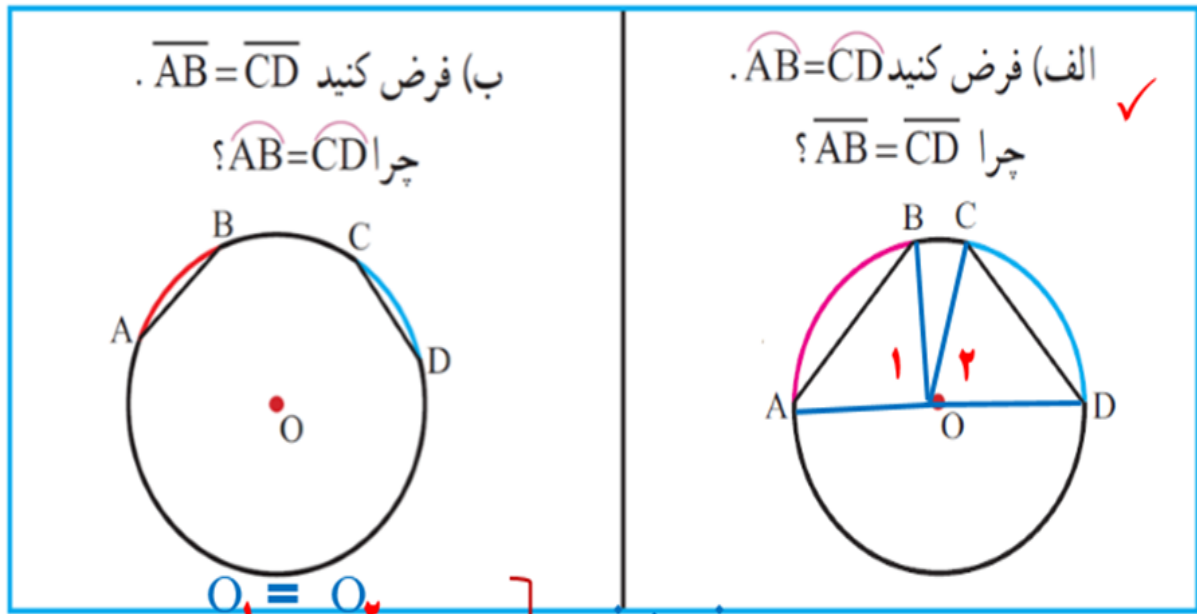
$$\triangle OAB \cong \triangle OCD$$

$$\rightarrow O_1 = O_2$$

$$\rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

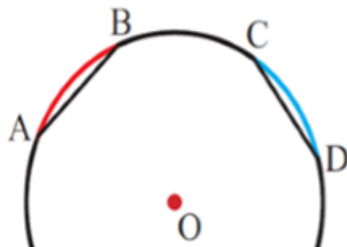
۲- برای هر مورد دلیل بیاورید.

۱۴۴



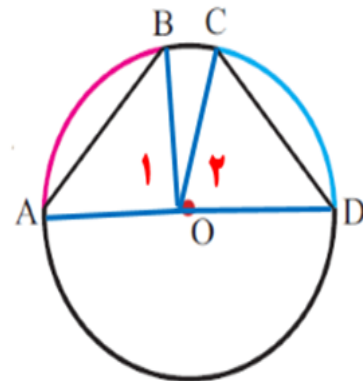
ب) فرض کنید $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

چرا $AB = CD$ ؟



الف) فرض کنید $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟

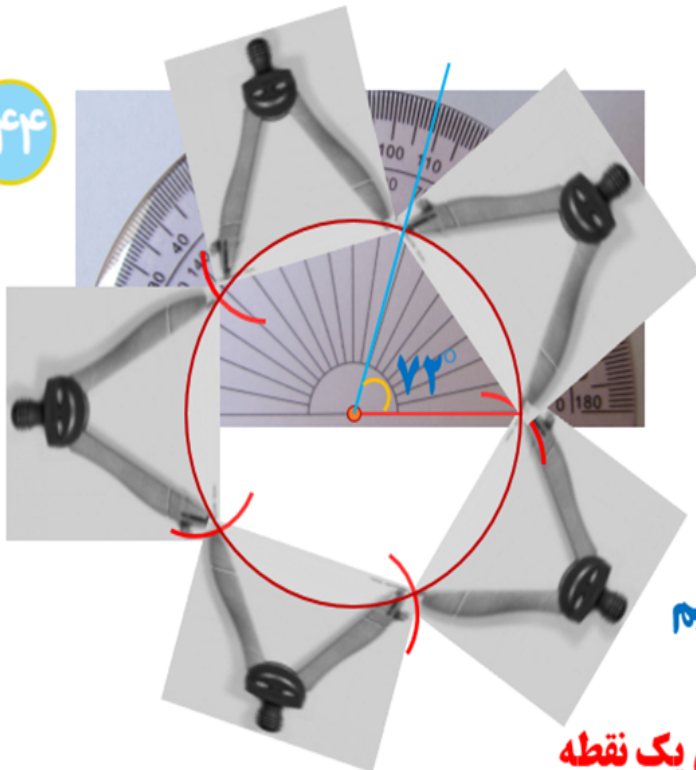


$\widehat{AB} = \widehat{CD} \rightarrow OB = OC$ شعاع $\rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD \rightarrow AB = CD$
 $OA = OD$ شعاع

نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.

اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد، اندازه وترهای نظیر آن دو کمان نیز با هم برابرند
 به عکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، اندازه کمانهای نظیر آن دو وتر نیز با هم برابرند

۱۴۴



کار در کلاس

۱- با استفاده از خط کش و نقاله، در دایره روبه‌رو یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید.

$$360 \div 5 = 72$$

پس اندازه هر زاویه ۷۲ درجه است

با استفاده از نقاله یک زاویه ۷۲ درجه رسم می‌کنیم

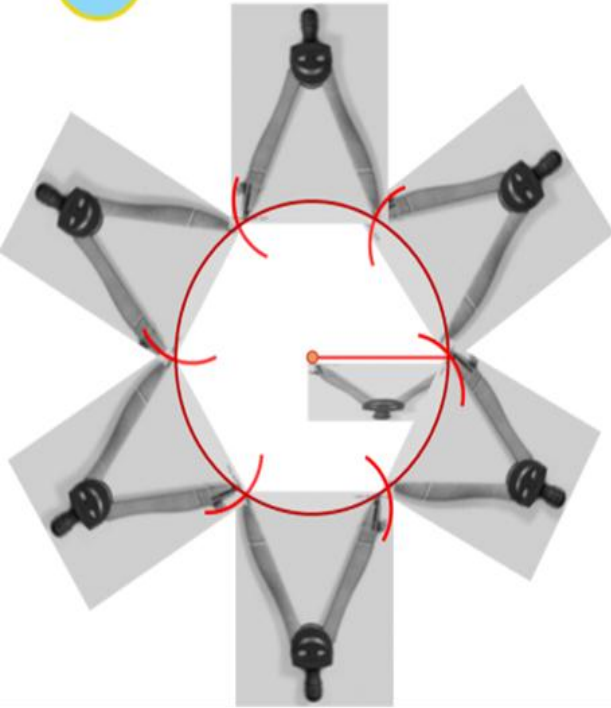
دهانه پرگار را به اندازه کمان ۷۲ درجه باز کرده و از روی یک نقطه

متوالیا کمان می‌زنیم تا ۵ کمان مساوی بدست آید

دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

۱۴۴

۲- الف) دهانه پراگار را به اندازه شعاع دایره زیر باز کنید. از یک نقطه دایره، شروع کنید و بی دربی کمان بزنید.



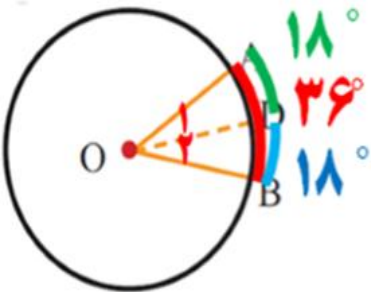
ب) بدین ترتیب، دایره به چند کمان تقسیم می شود؟ **۶ کمان**
 ج) چرا این کمان ها با هم مساوی اند؟ **زیرا وترهای آنها با مساویند**
 د) هر کمان چند درجه است؟ $360 \div 6 = 60^\circ$
 ه) چند کمان 12° درجه در شکل دیده می شود؟ **۶ کمان**

$$\widehat{AC} = \widehat{BD} = \widehat{CE} = \widehat{DF} = \widehat{EA} = \widehat{FB} = 120^\circ$$

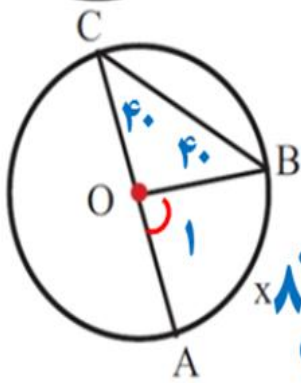
۱۴۵



۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و $\widehat{AOB} = 36^\circ$. اندازه هر یک از کمان های AD و BD چند درجه است؟



$$\widehat{AD} = \widehat{DB} = 18^\circ$$



۲- کمان AB برابر x درجه است.

اندازه زاویه AOB را بر حسب x به دست آورید.

اندازه زاویه ACB را بر حسب x به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O_1} = \widehat{B} + \widehat{C} \\ \widehat{B} = \widehat{C} \end{array} \right\} \widehat{O_1} = 2\widehat{C} \longrightarrow C = \frac{x}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

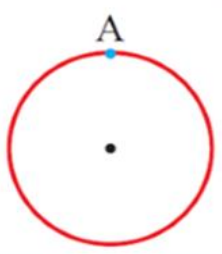
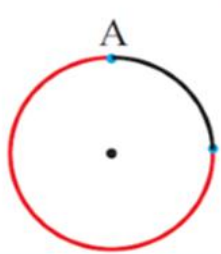
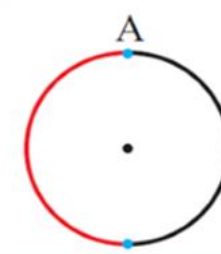
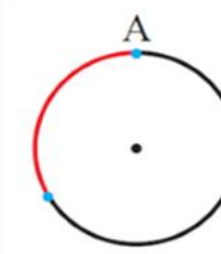
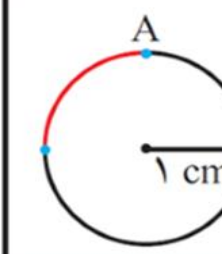
$$\widehat{AB} = 80^\circ \quad \widehat{O_1} = 80^\circ \quad \widehat{O} = 100^\circ$$

$$OB = OC \quad \widehat{B} = \widehat{C} = 80 \div 2 = 40$$

مثال عددی

۱۴۵

۳- متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می‌کند. در هر شکل، کمان طی شده مشخص شده است. جدول را کامل کنید.

					شکل
۱	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	کسر طی شده از دایره
۳۶۰	۲۷۰	۱۸۰°	۱۲۰	۹۰°	اندازه کمان طی شده
$۲\pi = \text{محیط}$	$\frac{۳}{۴} \times ۲\pi = \frac{۳}{۲}\pi$	$\frac{۱}{۲} \times ۲\pi = \pi$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۴}$	طول تقریبی کمان طی شده

۱۴۵

۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند.

الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD، و DA با هم مساوی‌اند؟

چون زاویه‌های مرکزی آنها با هم برابرند

ب) آیا وترهای AC، CB، BD، و DA نیز با هم مساوی‌اند؟ **بله**

ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ADBC با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

چون مثلث‌ها همنهشتند در نتیجه زاویه‌های آنها با هم مساوی‌اند

۵- در شکل روبرو وترهای AB و CD بر هم عمودند.

الف) آیا کمان‌های AC، CB، BD، و DA با هم مساوی‌اند؟ **خیر**

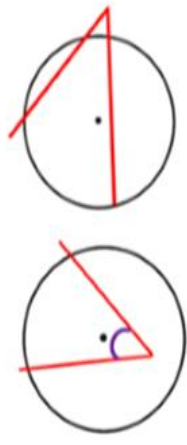
ب) پاسختان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.

این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟

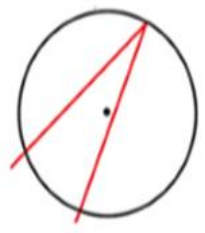
در تمرین قبل دو وتر قطر دایره بودند و در مرکز دایره همدیگر را قطع کرده‌اند

ولی در اینجا همدیگر را در مرکز دایره قطع کرده‌اند و زاویه مرکزی ایجاد نشده است

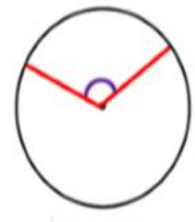
۱- مانند نمونه رسم شده (الف)، در شکل‌های زیر نمونه‌ای از هر یک از وضعیت‌های مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.



ب) رأس زاویه خارج دایره



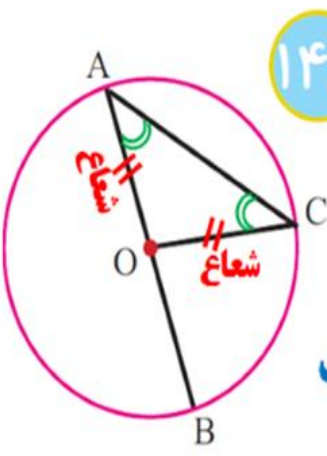
الف) رأس زاویه روی دایره



ج) رأس زاویه در مرکز دایره
د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه‌ای غیر از مرکز

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟ ج

به زاویه‌ای که در شکل «الف» مشاهده می‌کنید، زاویه محاطی گفته می‌شود. رأس این زاویه روی دایره است و ضلع‌های آن، دایره را قطع کرده‌اند.

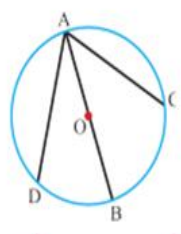


۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید: $\widehat{BOC} = \widehat{BC}$

چرا زاویه‌های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟ مثلث متساوی الساقین است

چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟ $\widehat{BOC} = \widehat{B} + \widehat{C}$
اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور برابر است

اندازه زاویه محاطی BAC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید.
 $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



۳- با توجه به فعالیت قبل، با پر کردن جاهای خالی

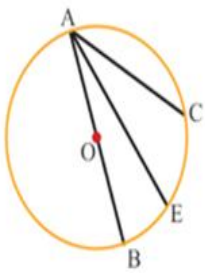
اندازه زاویه محاطی DAC را بر حسب \widehat{DC} بنویسید.

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

۱۴۶

۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC

را هم بر حسب \widehat{EC} بنویسید.



$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{EC}}{2}$$

۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید. آیا در این سه

فعالیت، همه حالت‌های زاویه محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید.

اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف کمان روبروی آن

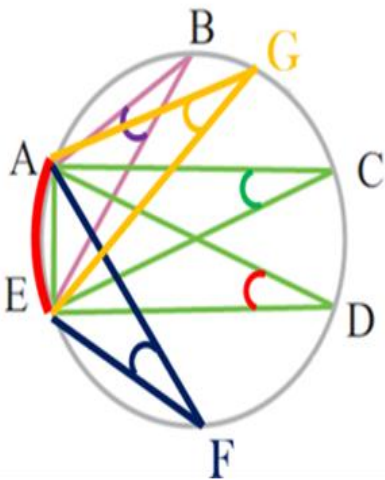
۱۴۷



۱- با توجه به شکل روبه‌رو،

الف) زاویه‌های محاطی مقابل به \widehat{AE} را پیدا کنید. \widehat{B} و \widehat{C} و \widehat{D}

ب) دو زاویه محاطی دیگر رسم کنید که \widehat{AE} کمان مقابل به آنها نیز باشد.



۲- در شکل روبه‌رو، اندازه زاویه محاطی C را تعیین کنید.

دو دانش‌آموز به این سؤال جواب داده‌اند.

راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید.

زهرا $\widehat{O_1} = 180^\circ - 8^\circ = 100^\circ$

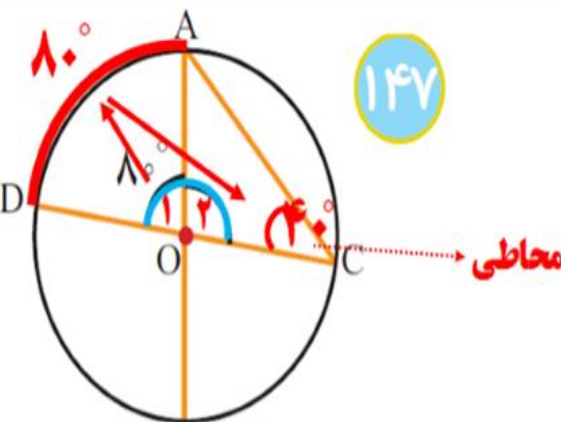
$\widehat{O_1}$ و $\widehat{O_2}$ با هم مکملند

$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

مجموع زاویه‌های داخل مثلث 180° درجه است

مثلث متساوی‌الساقین است $\widehat{A} = \widehat{C} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

۱۴۷



فاطمه $\widehat{O} = 80^\circ \rightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$

زاویه مرکزی با کمان مقابلش برابر است

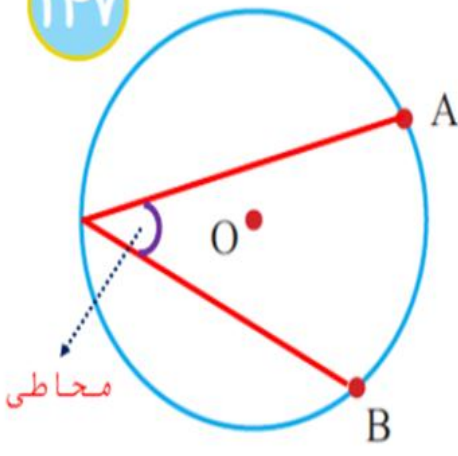
$\widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

زاویه محاطی نصف کمان مقابلش است



۱- فعالیت یک زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

۱۴۷



سه زاویه محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

فکر می کنید چند زاویه دیگر می توان رسم کرد؟ چرا؟

چون روی کمان دایره بیشمار نقطه وجود دارد که می توان به دو نقطه مورد نظر وصل کرد

آیا همه این زاویه های رسم شده با هم برابرند؟ **بله** چرا؟

چون همگی روبروی کمان AB هستند و اندازه آنها برابر است با نصف کمان روبرو

۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟ $360 \div 2 = 180^\circ$

چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویه محاطی می توان رسم کرد؟ چرا؟ **بیشمار**

چون روی کمان دایره بیشمار نقطه وجود دارد که می توان به دو نقطه مورد نظر وصل کرد

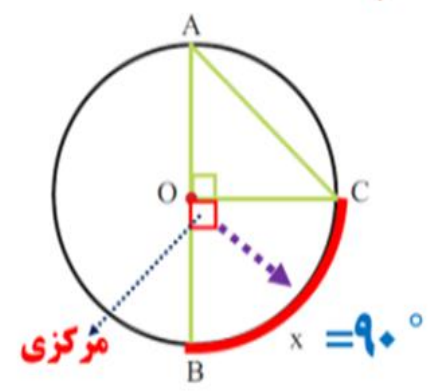
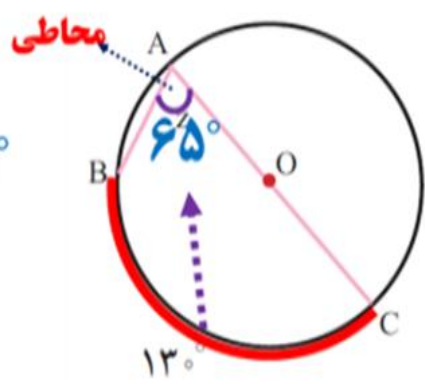
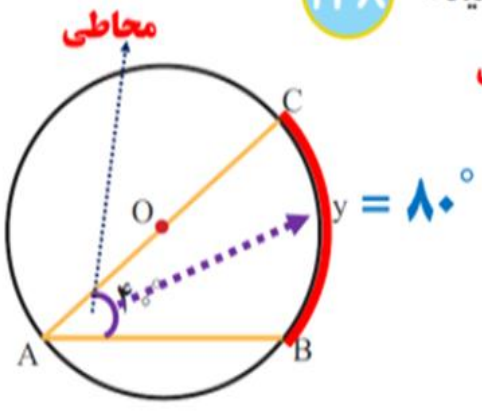
اندازه این زاویه های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟ **۹۰ درجه**

چون اندازه زاویه محاطی برابر است با نصف کمان روبروی آن



۱- کار در کلاس کار در کلاس ۱- اندازه زاویه ها و کمان های خواسته شده را پیدا کنید.

۱۴۸

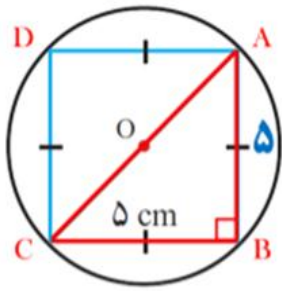


۲- در شکل روبه‌رو، همهٔ رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر

روی دایره قرار دارد.

چون زاویه‌های محاطی روبرو به قطر دایره ۹۰ درجه اند نتیجه لوزی که یک زاویه قائمه داشته باشد مربع است

چرا این لوزی، مربع است؟



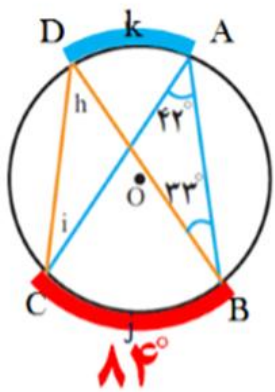
$$AC^2 = 5^2 + 5^2$$

قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

$$AC^2 = 25 + 25 = 50 \quad AC = \sqrt{50}$$

۱۴۸

تمرین ۱- اندازهٔ زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.

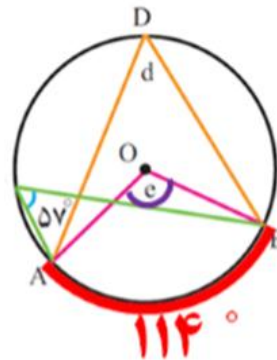


$$\hat{j} = 2 \times 42 = 84^\circ$$

$$\hat{h} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{84^\circ}{2} = 42^\circ$$

$$\hat{k} = 2 \times 33 = 66^\circ$$

$$\hat{i} = \frac{\widehat{DA}}{2} = \frac{66^\circ}{2} = 33^\circ$$



$$\widehat{AB} = 2 \times 57 = 114^\circ$$

$$\hat{d} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{114^\circ}{2} = 57^\circ$$

$$\hat{e} = 114^\circ$$

۲- در شکل زیر زاویهٔ مرکزی AOB برابر با ۷۲ درجه است. اندازهٔ کمان AB چند درجه

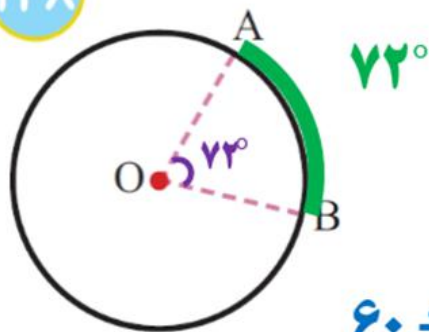
$$\widehat{AB} = 72^\circ$$

است؟

اگر، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ AB باز کنیم و با شروع

از نقطهٔ B، پی‌درپی کمان‌هایی بزنیم، به این ترتیب

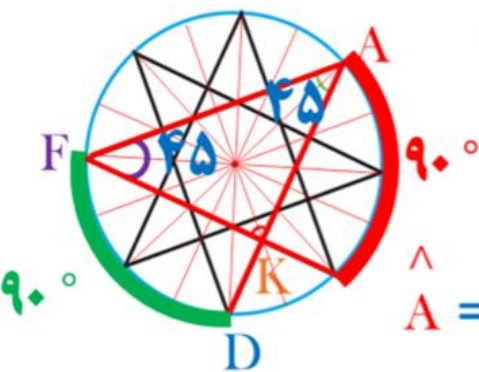
چند کمان مساوی روی دایره جدا می‌شود؟ **۵ کمان** $60 \div 72 = 5$



۳- در شکل روبه‌رو، دایره‌ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.

الف) شکل چند خط تقارن دارد؟ **۸ خط تقارن**

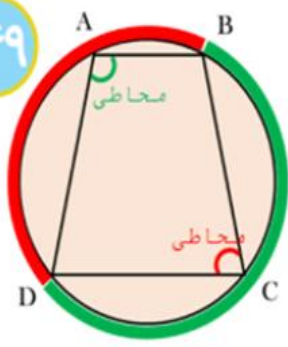
ب) اندازهٔ دو زاویهٔ مشخص شده روی شکل را پیدا کنید و بنویسید.



$$\hat{A} = \frac{\widehat{FD}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \quad 360^\circ \div 8 = 45^\circ \quad \text{اندازه هر کمان}$$

$$\hat{E} = 45^\circ$$

$$\hat{K} = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$$



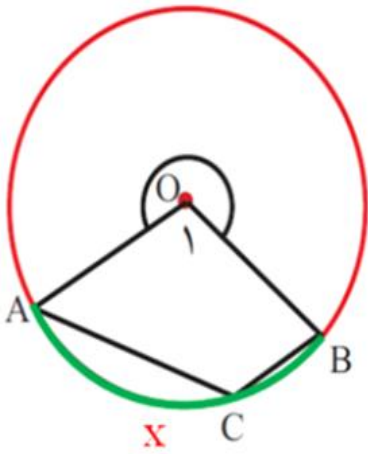
۴- دایره‌ای بکشید. سپس، چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

چرا مجموع دو زاویه روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر 180° درجه است؟

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت: $\hat{B} + \hat{D} = 180$

۵- در شکل روبه‌رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.



الف) اندازه زاویه O_1 را بر حسب x بنویسید. $\hat{O}_1 = x^\circ$

ب) اندازه کمان قرمز رنگ را بر حسب x بنویسید. $360^\circ - x$

ج) اندازه زاویه C را بر حسب x بنویسید. $\hat{C} = \frac{360^\circ - x}{2} = 180^\circ - \frac{x}{2}$

زاویه C مخاطی است پس برابر است با نصف کمان روبروی آن

۶- در شکل زیر، پره‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخ ایجاد کرده‌اند.

شعاع چرخ 30° سانتی متر است $360 \div 12 = 30$ هر کمان 30° درجه

الف) طول TX چقدر است؟ همان قطر دایره است $= 60$ سانتیمتر

ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ متساوی الاضلاع

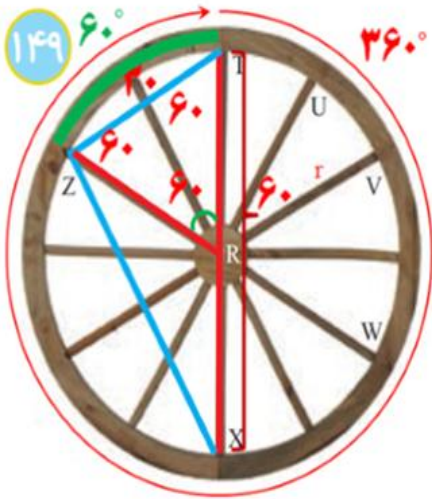
چون سه زاویه 60° دارد.

ج) طول ZT چقدر است؟ 30 سانتیمتر

د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ قائم الزاویه

چون یک زاویه آن مخاطی و مقابل قطر است و 90° درجه است.

ه) طول ZX چقدر است؟



$$ZX^2 = 60^2 + 30^2 \quad ZX^2 = 3600 - 900 = 2700 \quad ZX = \sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$$

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند، مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- خط مماس
- زاویه مرکزی
- زاویه محاطی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند، با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- پیدا کردن مرکز دایره
- رسم چندضلعی منتظم به کمک زاویه مرکزی

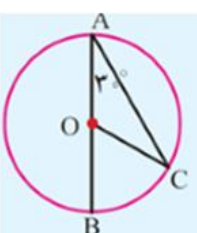
- تساوی کمان‌ها و وترهای متناظر
- پیدا کردن زاویه محاطی با توجه به کمان روبه‌روی آن

کاربرد

رسم چندضلعی‌های منتظم به کمک مفاهیم زاویه مرکزی یکی از کاربردهای مهم این درس در طراحی شکل‌های تزئینی و معماری است.

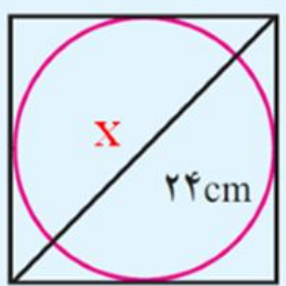
تمرین‌های ترکیبی

۱- با توجه به شکل روبه‌رو، اندازه زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.



$\hat{C} = 30^\circ$, $\widehat{COB} = 60^\circ$, $\widehat{BC} = 60^\circ$

۲- کاغذی مربعی شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید. قطر = x

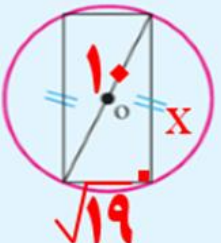


می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید. قطر = x

$x^2 + x^2 = 24^2$ $x^2 = \frac{576}{2} = 288$

$2x^2 = 576$ $x = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$

۳- الف) در شکل زیر ضلع‌های روبه‌رو به هم در چهارضلعی با هم برابرند.



زاویه محاطی روبرو به قطر ۹۰ درجه است

متوازی الاضلاعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است

چرا چهارضلعی مستطیل است؟

ب) شعاع دایره برابر ۵ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{19}$ سانتی‌متر است.

طول مستطیل را به دست آورید.

$x^2 = 10^2 - \sqrt{19}^2$ $x^2 = 100 - 19 = 81$ $x = \sqrt{81} = 9$