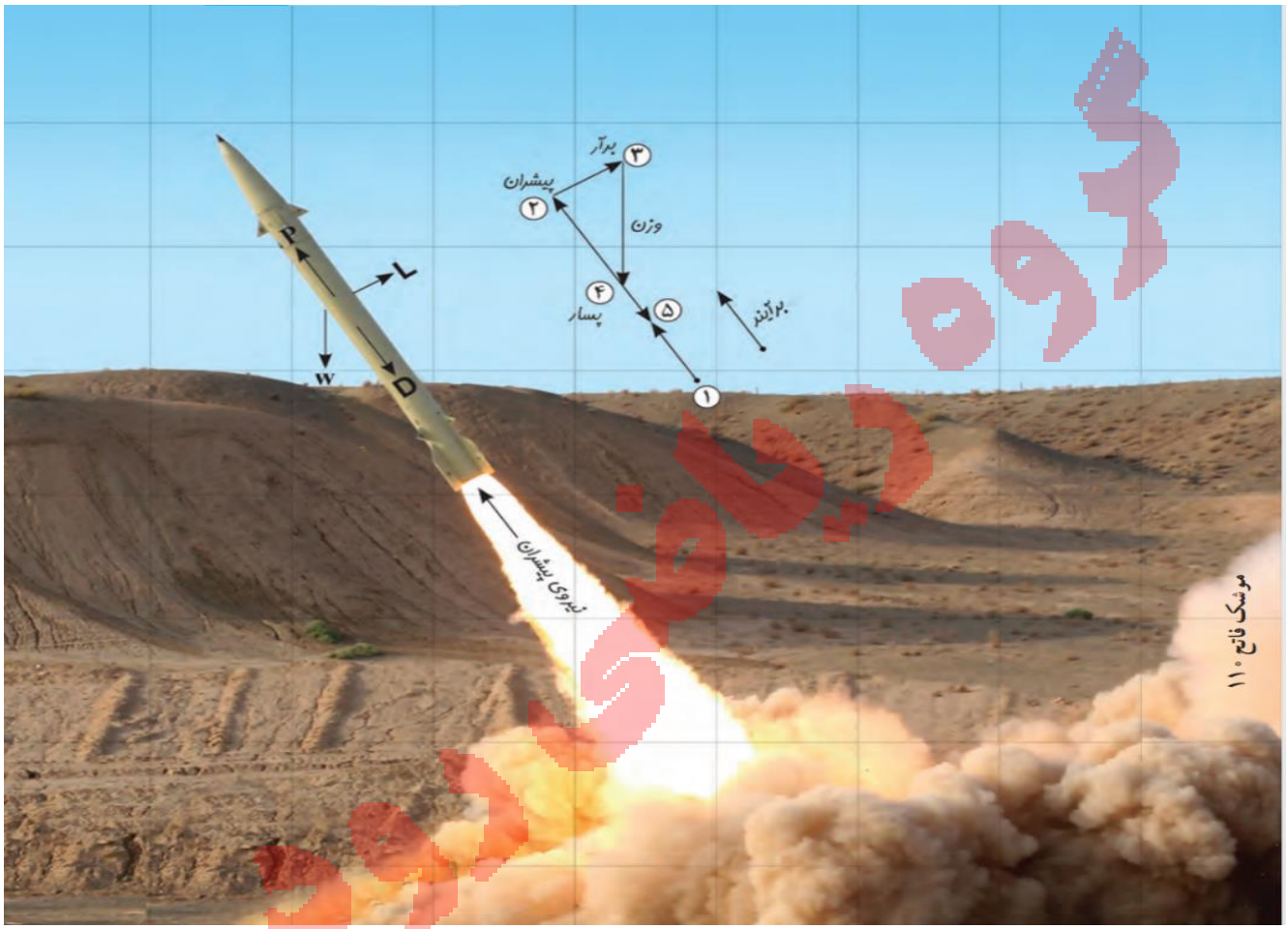
فصل ۵ بـــــردار



هدف کلی

آشنایی با عنوان بردار و مختصات که شامل مباحثی همچون جمع بردارها (بـرآیند) بردارهای مساوی، حاصل جمع بردار، بردارهای قرینه، تجزیه بردارها، ضرب عدد در بردار، محل معادله مختصاتی، بردارهای واحد مختصات و ..... است که در پایان فصل انتظار می رود دانش آموزان این مباحث را درک کرده باشند.

@riazicafe

بردار:

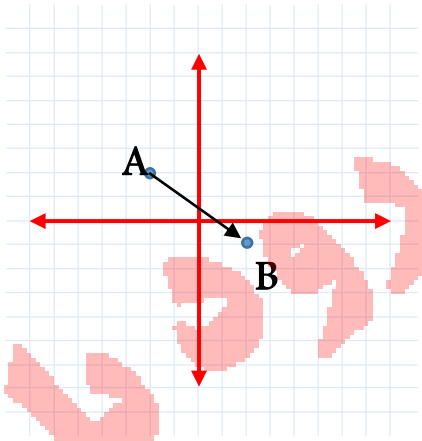
یک پاره خط جهت دار است که سه چیز در آن دیده می شود:

۱ نقطه شروع بردار که ابتدا نام دارد.

۲ اندازه ی بردار که نقطه نیست بلکه یک آدرس است که به ما می گوید چند حرکت در جهت x و چند حرکت در جهت y و در چه جهتی انجام دهیم تا به نقطه انتهای بردار برسیم.

۳ نقطه انتهایی بردار که همان مقصد ما است.

مثال: بردار $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$ را با ابتدای نقطه $A = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ رسم کنید.



نکته: در هر بردار: انتها = اندازه + ابتدا

$$\begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

A AB B

مثال: اگر $M = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix}$ و $N = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$ باشد اندازه بردار $\overrightarrow{MN}$ را به دست آورید.

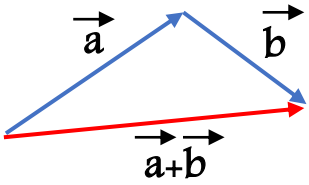
پاسخ: اگر ابتدا و انتهای بردار مشخص باشد برای پیدا کردن اندازه بردار از این رابطه استفاده می کنیم

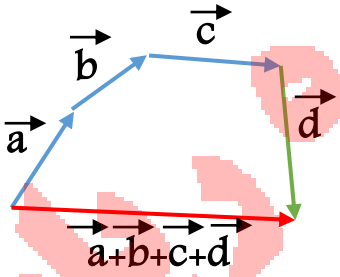
اندازه بردار $= \begin{bmatrix} -۳ \\ -۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix}$ ← اندازه = ابتدا – انتها

جمع دو بردار:

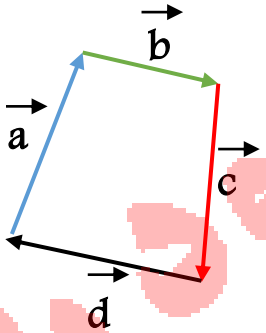
جمــع بردار های متــوالی (روش مثلثــی):

اگر دو یا چند بردار پشت سر هم قرار گیرند یا متوالی باشند یعنی ابتدای یکی بر انتهای دیگری منطبق باشد برای رسم بردار حاصل جمع آنها کافی است از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر وصل کنیم.





مثال: مسیر حرکت یک لاک پشت در سفری به صورت بردارهای متوالی رسم شده است حاصل جمع بردارها را بیابید.



پاسخ: چون لاک پشت دوباره به سر جای خودش برگشته است

عملا جا به جایی نداشته است و حاصل جمع بردارها برابر برداری به اندازه صفر می باشد.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$$

تعریـــف جابـــجایـــی:

اگر نقطه شروع حرکت را مبدا حرکت قرار بدیم نزدیک ترین فاصلمون از این نقطه میشه مقدار جا به جایی ما: پس در مثال بالا لاک پشت با وجودی که مسیر طولانی داشته اما چون به مبدا رسیده صفر می باشد چون برگشته همون جایی که بوده

نتیجه: بردارها در دستگاه مختصات بیانگر مقدار جا به جایی ما نسبت به مبدا حرکت هستند.

مثال:

الف) بردار $\vec{x}=\begin{bmatrix}-۴\\-۲\end{bmatrix}$ را با نقطه ابتدایی $A=\begin{bmatrix}۳\\۳\end{bmatrix}$ و بردار $\vec{y}=\begin{bmatrix}۶\\-۲\end{bmatrix}$ را از انتهای بردار $\vec{x}$ رسم کنید.

ب) اندازه بردار حاصل جمع $\vec{x}+\vec{y}$ را محاسبه کنید و آن را رسم کنید.

پاسخ الف) پس از پیدا کردن انتهای بردار $\vec{x}$ به سراغ بردار $\vec{y}$ می رویم در حالی که می دانیم انتهای بردار $\vec{x}$ می شود ابتدای بردار $\vec{y}$

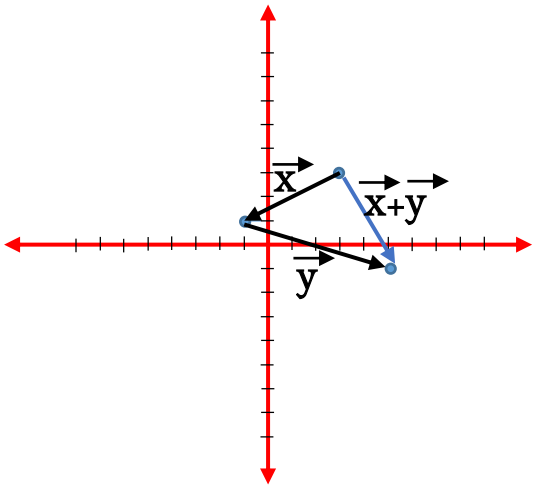
انتها = اندازه + ابتدا

$$\begin{bmatrix}۳\\۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۴\\-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\-۱\end{bmatrix}$$

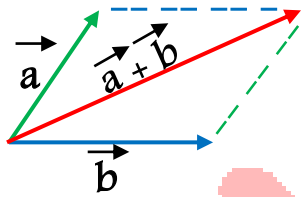
پاسخ ب) اندازه بردار حاصل جمع

$$\vec{x}+\vec{y}=\begin{bmatrix}-۴\\-۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\-۴\end{bmatrix}$$



جمـــع بـــردارها به روش متـــوازی الاضـــلاع:

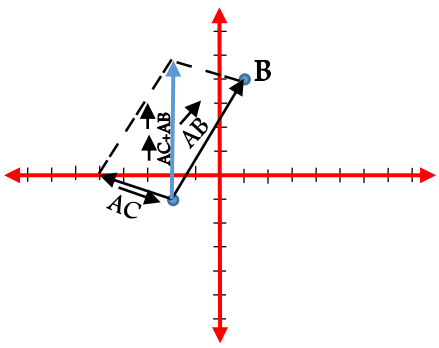
اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از یک نقطه شروع شوند بردار $\vec{a}+\vec{b}$ برابر است باقطر متوازی الاضلاعی که این دو بردار اضلاع آن هستند.



مثال: الف) بردار $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}+۳\\+۵\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}-۳\\+۱\end{bmatrix}$ را ابتدا در دو نقطه $\vec{A}=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix}$ رسم کنید

ب)بردار حاصل جمع $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ را بدست آورید و آن را رسم کنید.

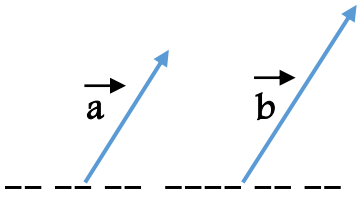
$$AB+AC=\begin{bmatrix}+۳\\+۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳\\+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\+۶\end{bmatrix}$$



دو بـــردار هم راستـــا:

دو بردار را هم راستا گوییم اگر زاویه بین خطی که بردار روی آن قرار دارد و خط افق (محور xها) برای هر دو بردار یکسان باشد.

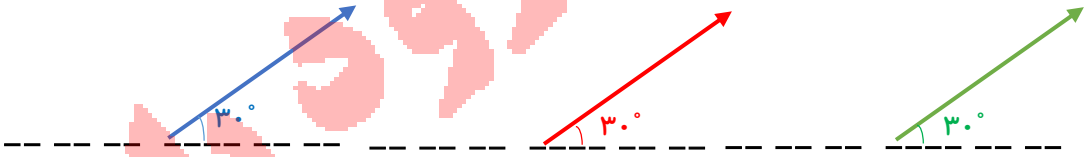
مثال:



دو بـــردار هم سنـــگ(بـــرابـــر):

دو بردار هم سنگ یا برابر، دو برداری هستند که جهت (یعنی نوک پیکان) راستا و مقدار عددی یکسان دارند و با هم هیچ فرقی ندارند.

مثال:

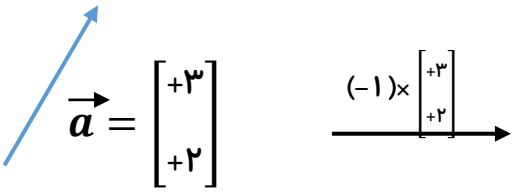


این بردارها که جهت راستا و مقدار یکسان دارند هم سنگ هستند.

دو بـــردار قـــرینـــه:

بردارهایی که راستا و مقدار یکسان دارند اما جهت آنها فرق می کند.

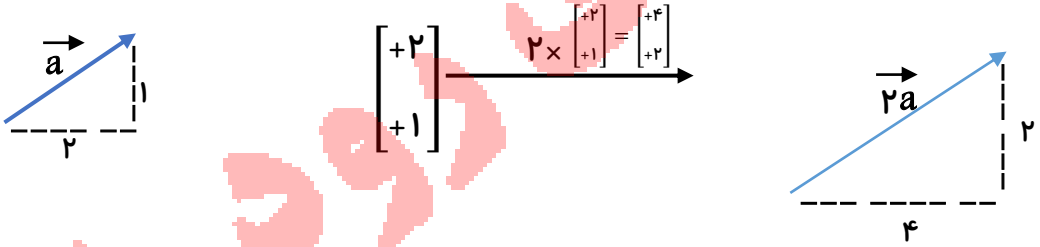
نکته: قرینه یک بردار همان بردار است که در (۱-) ضرب شده است و جهت آن نسبت به بردار اصل عوض شده است.



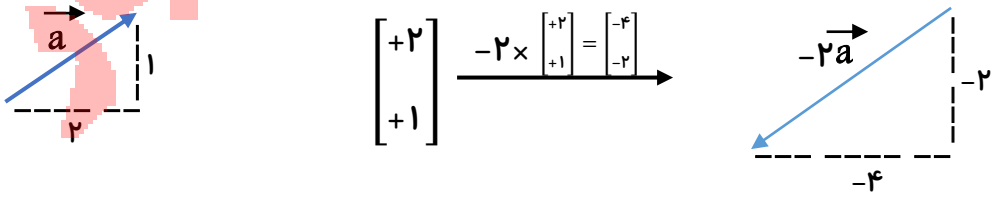
$a + (-a) = ۰$

ضـــرب عـــدد در بـــردار:

اگر عدد مثبتی را در بردار ضرب کنیم فقط اندازه ی آن بردار تغییر می کند



ولی اگر عدد منفی باشد علاوه بر مقدار (اندازه) جهت را نیز تغییر می دهد

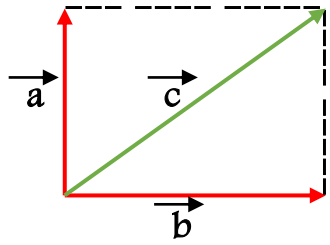


نکته: ولی در هر دو حالت، راستا یا زاویه بردار با خط افق تغییر نمی کند.

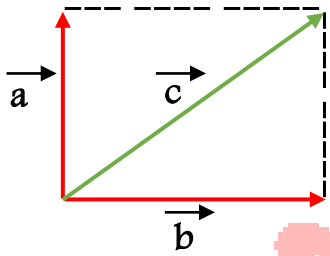
تجزیـــه بـــردارها:

اگر بردار حاصل جمع را داشته باشیم از انتهای آن بردار به موازات دو محور رسم می کنیم هر جا محور یا امتداد محور را قطع کرد انتهای دو بردار بدست می آید.

مثال: بردار $\vec{c}$ را در امتداد های رسم شده تجزیه کنید.



تساوی جبری: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$



تساوی جبری: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

$$\begin{bmatrix}0\\+2\end{bmatrix}_{\vec{a}}+\begin{bmatrix}+2\\0\end{bmatrix}_{\vec{b}}=\begin{bmatrix}+2\\+2\end{bmatrix}_{\vec{c}}$$

طول $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با هم جمع کنیم برابر طول بردار $\vec{c}$

عرض $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با هم جمع کنیم برابر عرض بردار $\vec{c}$

یعنی اینکه بردار $\vec{c}$ به دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ شده و برایند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می شود بردار $\vec{c}$

نشان دادن اندازه بردار به شکل بردارهای یکّه:

ما می توانیم هر واحد از محور x را به صورت چند بردار $\vec{i}$ و هر واحد از محور y را به صورت چند بردار $\vec{j}$ نشان می دهیم بنابراین می توانیم به جای $\vec{a}=\begin{bmatrix}+۳\\+۲\end{bmatrix}$ بنویسیم $\vec{a}=۳\vec{i}+۲\vec{j}$

سوال:

الف) مختصات هر بردار را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ (بردارهای یکه) بنویسید.

$\vec{a}=\begin{bmatrix}-۵\\۰\end{bmatrix}=-۵\vec{i}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۳\\+۵\end{bmatrix}=-۳\vec{i}+۵\vec{j}$ $\vec{c}=\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}=۲\vec{j}$

ب) اگر بردار $a=-۲i+j$ و $b=۵i-۶j$ باشند حاصل $۳a+b$ را بیابید.

$$۳a=۳\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}$$
$$b=\begin{bmatrix}۵\\-۶\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow ۳a+b=\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\-۳\end{bmatrix}$$

معادله مختصاتی:

در تساوی مختصاتی، بعضی از بردارها مجهول هستند و مقدار بعضی از بردارها معلوم است. اینجا هم مثل معادلات معمولی مجهول ها را در یک طرف و معلوم ها را در طرف دیگر معادله قرار می دهیم و معادله را حل می کنیم تا مقادیر مجهول را بدست آیند.

مثال:

$$۳x - ۴\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix} = x + \begin{bmatrix}-۲\\+۴\end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$۳x - ۴\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix} = x + \begin{bmatrix}-۲\\+۴\end{bmatrix} \rightarrow ۳x - x = \begin{bmatrix}-۲\\+۴\end{bmatrix} + ۴\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix} \rightarrow ۲x = \begin{bmatrix}۱۰\\۱۲\end{bmatrix} \rightarrow$$

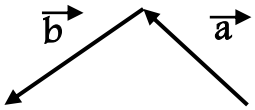
$$x = \frac{\begin{bmatrix}۱۰\\۱۲\end{bmatrix}}{۲} = \begin{bmatrix}\frac{۱۰}{۲}\\\frac{۱۲}{۲}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۵\\۶\end{bmatrix}$$

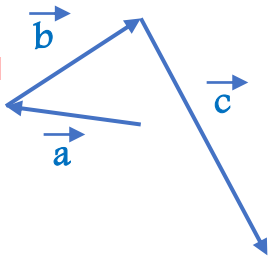
گروه ریاضی رودبار

۱ دو نقطه $A=\begin{bmatrix}۳\\۷\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix}$ را روی محور های مختصات مشخص کنید و سپس بردار $\overrightarrow{AB}$ را معلوم کنید.

۲ اگر $O=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ مبدا مختصات باشد بردار های BO و AO و CO را با توجه به نقاط $A=\begin{bmatrix}-۳\\۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵\\-۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}$ مشخص کنید.

۳ برای هر شکل بعد از رسم بردار مجموع، یک جمع برداری متناظر با آن بنویسید.





۴ روی محور مختصات از نقطه $A=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ ابتدا با بردار $\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$ حرکت می کنیم تا به نقطه C برسیم سپس با بردار $\begin{bmatrix}-۳\\-۱\end{bmatrix}$ حرکت می کنیم تا به نقطه D برسیم.

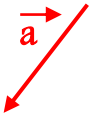
الف) شکل حرکت را رسم کنید.

ب) با چه برداری مستقیما از A به D می رسیم؟

ج) برای بردارها یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.

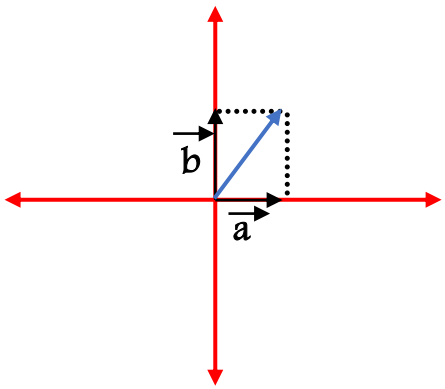
د) مختصات نقاط C و D را به دست آورید.

۵ بردار خواسته شده را رسم کنید.

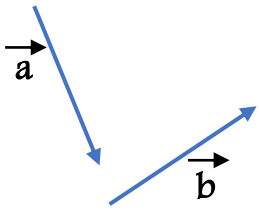


$\vec{2a} - \vec{3a} + \vec{4a} =$

۶ با توجه به تجزیه برداری بردار مورد نظر را رسم کنید.



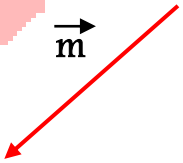
۷ دو بردار را به روش متوازی الاضلاع جمع کنید و سپس یک جمع برداری برای آن بنویسید.



۸ حاصل جمع زیر را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} -۸ \\ ۱۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱۳ \\ -۹ \end{bmatrix} =$$

۹ بردار a را با توجه به بردار مرجع رسم کنید.



$$\vec{a} = -\frac{۱}{۳}\vec{m}$$

گروه ریاضی رویدر

۱۰ حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$-۳\times\begin{bmatrix}۲\\-۲\end{bmatrix}=$$

$$-۲\times\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳\\-۵\end{bmatrix}=$$

۱۱ با توجه به بردارهای $\vec{a}=\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$ و $\vec{c}=\begin{bmatrix}-۳\\۰\end{bmatrix}$ حاصل جمع زیر را به دست آورید.

$$۲\vec{c}+۳\vec{b}-۴\vec{a}=$$

۱۲ مقدار x و y را به دست آورید.

الف) $x\times\begin{bmatrix}-۶\\+۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\-\frac{۵}{۳}\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}-۳\\۷\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷\\۱۰\end{bmatrix}$

۱۳ هر یک از مختصات های زیر را بر حسب i و j بنویسید.

الف) $\begin{bmatrix}-۳\\+۲\end{bmatrix}$

ب) $۲\begin{bmatrix}-۳\\+۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}=$

۱۴ حاصل عبارات زیر را بصورت مختصاتی بنویسید.

الف) $-۲i + ۳j$

ب) $۲j - ۵i$

ج) $+۵j$

گروه ریاضی رودبار

اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار

همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد

تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال