

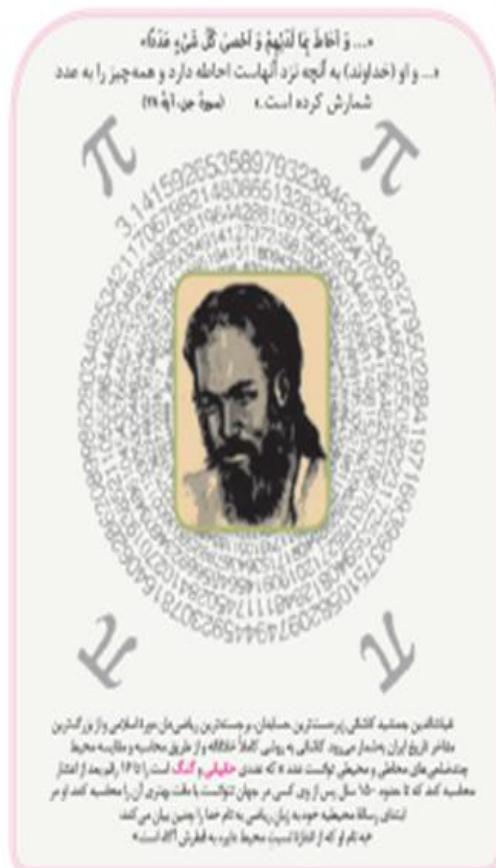


ریاضی نهم

فصل دوم: عددهای حقیقی

صفحه: ۱۸ تا ۳۱

تهیه کننده: احمد فرخ وند



۱۸

درس اول: عددهای گویا

فعالیت

۱۹

۱- در فصل گذشته با نمایش های مختلف مجموعه های اعداد آشنا شدید. عبارت های زیر را مانند

نمونه کامل کنید :

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N} x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی کوچک تر یا مساوی ۲	$\{x \in \mathbb{W} x \leq 2\}$ $\{0, 1, 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین -۳ و ۲	$\{x \in \mathbb{Z} -3 < x < 2\}$ $\{-2, -1, 0, 1\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگ تر از -۱	$\{x \in \mathbb{Z} x > -1\}$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	

نامساوی $x \geq 3$ برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟ ۳، ۴، ۵

۱، ۲، ۳، ۴، ۵

۲- می‌خواهیم بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار	روش مریم
مخرج مشترک و استفاده از کسرهای مساوی $\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$ $\frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6}$ $\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$ $\frac{6}{18} < \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$	استفاده از محور و کسرهای مساوی $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

روش عطیه	روش مهناز
استفاده از میانگین کسرها $\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$	استفاده از محور و میانگین کسرها $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

با استفاده از محور هر قسمت از محور را می‌توان به بیشمار قسمت کوچک‌تر تقسیم کرد.

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بیشمار کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟
خیر، چون بین هر دو عدد گویا بیشمار عدد وجود دارد.

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟ **بله**

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

۱- بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

$$\frac{3}{4} < \frac{2}{5}$$

$$\frac{15}{20} < \frac{14}{20} < \frac{13}{20} < \frac{12}{20} < \frac{11}{20}$$

روش اول: برای کسر ها مخرج مشترک می گیریم و کسر ها را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب می کنیم. (چون سه کسر پیدا شد لازم نیست در ۴ ضرب کنیم).

روش دوم (روش سریع): صورت ها را با هم و مخرج ها را با هم جمع می کنیم بین دو کسر می نویسیم و برای کسر های جدید دوباره همین کار را انجام می دهیم.

$$\frac{3}{4} < \frac{5}{9} < \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{8}{13} < \frac{5}{9} < \frac{7}{14} < \frac{2}{5}$$

۲- بین $-\frac{1}{4}$ و -1 دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

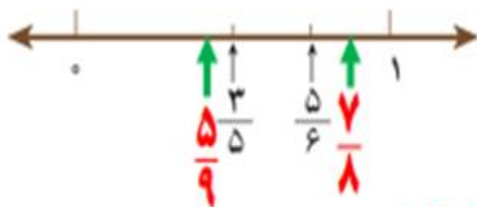
$$-\frac{1}{4} < -\frac{2}{3} < -1$$

$$-\frac{1}{4} < -\frac{3}{4} < -\frac{2}{3} < -\frac{3}{5} < -1$$

روش دوم (روش سریع): صورت ها را با هم و مخرج ها را با هم جمع می کنیم بین دو کسر می نویسیم و برای کسر های جدید دوباره همین کار را انجام می دهیم.

۱- می خواهیم کسر های $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. روش های مختلفی را که دانش آموزان به کار برده اند با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در صورت لزوم کامل کنید.

روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسر های $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟



خبر، زیرا اعدادها به هم خیلی نزدیک هستند و تقریب زدن آن ها دشوار است

روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسر ها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسر ها، آنها را

مقایسه می کند. توضیح دهید که عدد 360 چگونه به دست می آید. کار مرتضی را کامل کنید: 360 کوچک ترین مضرب مشترک مخرج ها است.

$$\frac{5}{9} = \frac{200}{360}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{315}{360}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{300}{360}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{216}{360}$$

روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{5}{9} = 0.55$$

$$\frac{7}{8} = 0.87$$

$$\frac{5}{6} = 0.83$$

$$\frac{3}{5} = 0.60$$

در مورد روش های مختلف و ویژگی های هر کدام در کلاس گفت و گو کنید.

۲- با استفاده از تقسیم نمایش اعشاری کسرها را بنویسید:

$$\frac{3}{8} = 0.37$$

$$\begin{array}{r} 3/00 \overline{) 8} \\ 24 \\ \underline{60} \\ 56 \\ \underline{48} \\ 80 \\ \underline{72} \\ 80 \\ \underline{72} \\ 80 \\ \underline{72} \\ 80 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = 0.33$$

$$\begin{array}{r} 1/00 \overline{) 3} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{7}{6} = 1.16$$

$$\begin{array}{r} 7/00 \overline{) 6} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

الف) بین مقدارهای اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟

بعضی از آن ها رقم های اعشاری بی پایان دارند.

$$1 \div 3 = 0.33333$$

در نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به طور متناوب تکرار می شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{5}$ متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم های اعشاری آن مشخص است و به انتها می رسد. از نماد زیر برای نمایش عدد های اعشاری متناوب استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{3} = 0.3333... = 0.\overline{3}$$

$$\frac{7}{6} = 1.1666... = 1.\overline{16}$$

علامت متناوب که بر روی رقم های تکراری قرار می گیرد.

کار در کلاس

نمایش اعشاری هر یک از کسرها را بنویسید:

$$\frac{5}{11} = 0.4545... = 0.\overline{45}$$

$$\frac{7}{9} = 0.777... = 0.\overline{7}$$

$$\frac{5}{6} = 0.8333... = 0.\overline{83}$$

$$\frac{7}{22} = 0.31818... = 0.\overline{318}$$

$$\frac{7}{20} = 0.35$$

$$\frac{5}{16} = 0.3125$$

اگر به نمایش اعشاری کسرها با دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارد.

نکته مهم تمرین: اگر مخرج کسری فقط بر ۲ یا ۵ یا هر دو بخش پذیر باشد آن کسر مختوم است.

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و تا حد امکان ساده کنید:

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right) = -\frac{9}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{10}{9}$$

$$= \frac{4}{6} \times \left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$= \frac{-17}{6} + \frac{7}{2} = \frac{-17+21}{6} = \frac{4}{6}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-3-3+4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{5}{6} \times \frac{7}{7} \times \frac{7}{5} = -\frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{5}{4} \div \left(-\frac{3}{4}\right) \div \frac{16}{3} = -\frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{16} = -\frac{5}{16}$$

$$\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} = -4$$

$$-\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$= -\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{1}{4} = +\frac{3}{4}$$

نکته: حاصل تقسیم عدد ۱ بر هر کسری برابر معکوس آن کسر است.

۲۲

کوچکترین

بزرگترین

کوچکترین

الف) $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$

$-3\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 2$

روش دوم با استفاده از مخرج مشترک ۲۴

$-\frac{92}{24}, -\frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{21}{24}, \frac{48}{24}$

الف) $\frac{10}{11}, \frac{12}{13}, \frac{10}{11}, \frac{22}{24}, \frac{12}{13}$

$\frac{10}{11}, \frac{32}{35}, \frac{22}{24}, \frac{34}{37}, \frac{12}{13}$

صورت ها را با هم و مخرج ها را با هم جمع می کنیم.

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

ب) $\frac{16}{7}, -\frac{3}{4}, \frac{2}{75}, -\frac{5}{6}, 4\frac{3}{5}, \frac{56}{13}$

$-\frac{5}{6}, -\frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \frac{2}{75}, 4\frac{4}{13}, 4\frac{3}{5}$

کوچکترین

بزرگترین

۴- بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

ب) $0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ مخرج مشترک ۳

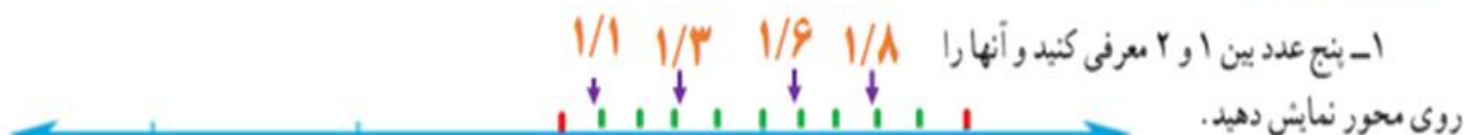
دو کسر در ۴ ضرب می کنیم $\frac{0}{12}, \frac{-4}{12}, \frac{4}{12}$

$\frac{0}{12}, \frac{-1}{12}, \frac{-2}{12}, \frac{-3}{12}, \frac{-4}{12}$

۲۳

درس دوم: عددهای حقیقی

فعالیت

۲- با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ مساوی $1/4$ است، آن را روی محور نشان دهید.

۳- معلم از دانش آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{2}$ را بنویسند. با توجه به اینکه دانش آموزان از ماشین حساب های مختلف استفاده می کردند، تعداد رقم هایی که نوشته بودند متفاوت بود. سه نمونه از صفحه نمایش ماشین حساب ها را در زیر می بینید. با توجه به آنها به سؤال های زیر پاسخ دهید :

1.4142136 1.414213562

1.41421356237



— چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد.

چون در ماشین حساب ۸ رقمی رقم نهم بیشتر از ۴ است و عدد به سمت بالا گرد شده است.

1.414213 6237 1.414213

— چرا این تفاوت در ماشین حساب‌های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی‌شود؟

چون در ماشین حساب ۱۰ رقمی عدد به سمت پایین گرد شده است.

1.41421356 1.41421356 37

— با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می‌دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در

رقم‌های اعشاری دیده می‌شود؟ **خیر**

— مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ ، تا ۱۵ رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:

1.414213562373095

آیا در ۱۵ رقم نشان‌داده شده برای $\sqrt{2}$ ، تناوبی می‌بینید؟ **خیر**

عدد هایی مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\dots$ ، $0.100100010000100001\dots$ و π را، که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار و دارای دوره تناوب نیست، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم. و آن را با Q' یا Q^c نمایش می‌دهیم.

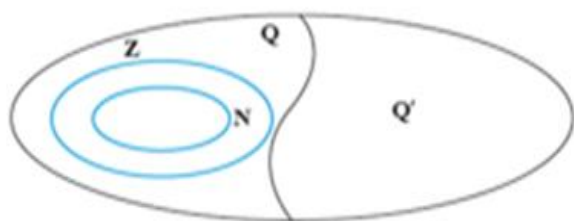
$\sqrt{2}$ عددی گنگ است. اثبات این مطلب را در سال‌های آینده می‌خوانید.



عدد π نیز گنگ است. در زیر عدد π تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است؛ اعداد محاسبات، معمولاً تا

دو رقم اعشار π استفاده می‌شود: $\pi = 3.141592653589793238462643383279$

اگر عدد n مربع کامل نباشد، $\sqrt{n}$ گنگ است؛ مانند $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، ... (عددهایی مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... مربع کامل است).



مثال: مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و Q و Q' به کمک نمودار ون، مشخص شده است.

مثال: $-\frac{3}{4} \notin Q'$ $\sqrt{3} \in Q'$ $\sqrt{0/49} \notin Q'$ $0 \in Q$ $0.200200020000200002\dots \in Q'$

کار در کلاس یادآوری: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ اعداد صحیح $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ اعداد طبیعی

$Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ اعداد گویا Q' اعداد گنگ

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

$Q \cap Q' = \emptyset$ ✓ $\mathbb{N} \subseteq Q'$ ✗ $\mathbb{Z} \subseteq Q$ ✓ $\mathbb{Z} \subseteq Q'$ ✗

الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می‌توان نوشت؟ **بی شمار**

ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور

می‌توان پیدا کرد؟ **بی شمار**

تقریباً ۱/۴



ج) روی محور نقطه نمایش $\sqrt{2}$

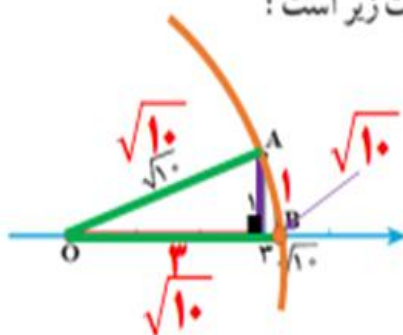
را پیدا کنید. **چون مقدار دقیق $\sqrt{2}$ مشخص نیست نمی‌توان به روش اعداد گویا آن را روی محور نشان داد**

د) اگر نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می‌دهد، آیا همه نقاط پاره خط AB رنگ

می‌شود؟ **خیر** آیا $\sqrt{2}$ نیز رنگ می‌شود؟ **خیر** آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عدد گویا است، یک پاره خط

به وجود می‌آورد؟ چرا؟ **خیر چون بین این اعداد عدد هایی هست که گنگ هستند و در آن نقاط پاره خط بریده می‌شود.**

مثال: نقطه نمایش عدد گنگ $\sqrt{10}$ روی محور به صورت زیر است:



به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می‌کنیم. نقطه B

روی محور عدد $\sqrt{10}$ را نمایش می‌دهد.

$$OA^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow OA = \sqrt{10}$$

مثال: $\sqrt{7}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد.

می‌دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی:

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

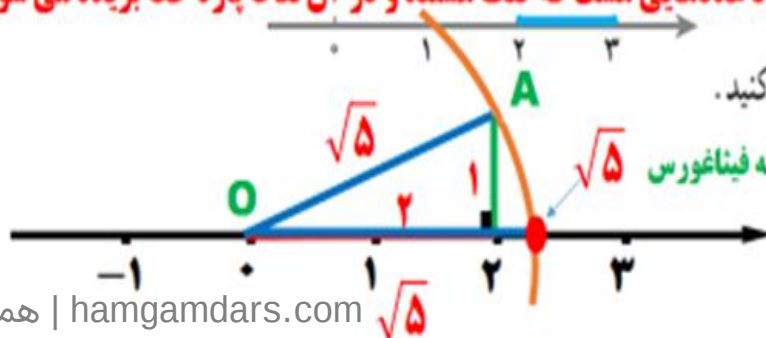
کار در کلاس

۱- بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید. $\sqrt{6/5}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{8}$

۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید. $\sqrt{2/1}$ $\sqrt{2/2}$ $\sqrt{2/3}$ $\sqrt{2/4}$

۳- الف) مجموعه A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به

صورت زیر درست است؟ **چون بین این اعداد عددهایی هست که گنگ هستند و در آن نقاط پاره خط بریده می‌شود.**

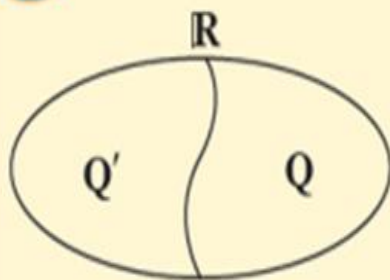


ب) نقطه نمایش $\sqrt{5}$ را روی محور مشخص کنید.

$$OA^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

$$OA = \sqrt{5}$$

عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته‌بندی می‌شود. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. تساوی $\mathbb{R} = Q \cup Q'$ بین سه مجموعه Q و Q' و $\mathbb{R}$ برقرار است.



مثال:

$$\begin{array}{llll}
 0 \in \mathbb{R} & \sqrt{1} \in \mathbb{R} & -\frac{5}{6} \in Q & 0.75 \in \mathbb{R} \\
 0.02022022202222... \in \mathbb{R} & \pi \in \mathbb{R} & & \frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

کار در کلاس

۱- داخل $\circ$ علامت $\in$ یا $\notin$ بگذارید:

$$\begin{array}{llll}
 2 \in \mathbb{Z} & 0.2 \in Q & \sqrt{18} \in \mathbb{R} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \\
 -5 \in \mathbb{R} & -\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z} & 5 = \sqrt{25} \notin Q' & 0 \in \mathbb{R} \\
 \sqrt{3/5} \in Q' & \sqrt{0/9} \in Q' & 0.3 = \sqrt{0.09} \in Q & -9 = \frac{9}{-1} \in \mathbb{Z}
 \end{array}$$

۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.



با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$$



با توجه به مجموعه A چرا نقطه ۲ روی محور توپر و نقطه ۳ روی محور توخالی است؟

چون $x \leq 2$ یعنی عددهای بزرگتر و مساوی ۲ (عدد ۲ عضو مجموعه A است). ولی ۳ عضو A نیست.

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$



$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$$



۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$$



(الف)

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$$



(ب)

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$$



(ج)

۲- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

$$0.75 \in A \quad \checkmark$$

$$0.252552555... \in B \quad \checkmark$$

$$\sqrt{13} \in A \quad \checkmark$$

$$\sqrt{7} \in C \quad \times$$

$$\sqrt{1} \in A \quad \checkmark$$

$$-1000 \in C \quad \checkmark$$

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟

$$\{-1, 0, 1, 2, 3\} \quad \text{(الف)}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\} \quad \text{(ب)}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\} \quad \text{(ج)}$$



رقم های آن انتها ندارد و متناوب هم نیست.

۱- با توجه به مجموعه های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید :

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	۰	π	$-\frac{3}{4}$	۰/۲۹۲۲۹۲۲۹....	-۱۰	$\frac{6}{2}=3$
$\mathbb{N}$ طبیعی	x	x	x	x	x	x	x	✓
$\mathbb{W}$ حسابی	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓
$\mathbb{Z}$ صحیح	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✓
$\mathbb{Q}$ گویا	✗	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✓
$\mathbb{Q}'$ گنگ	✓	✗		✓	✗	✓	✗	✗
$\mathbb{R}$ حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هر یک از حالت های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

مجموعه A همه اعداد بین ۱/۵ و ۵ عضو هستند ولی در مجموعه B اعداد گنگ عضو نیستند.

ب) $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

مجموعه C فقط ۵ عضو دارد ولی مجموعه B بی شمار عضو دارد.

۳- طرف دوم تساوی های زیر را کامل کنید :

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

۴- عدد $1 + \sqrt{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟
 $\sqrt{5} \approx 2/2 \Rightarrow 1 + 2/2 \approx 3/2 \Rightarrow$ بین ۳ و ۴

۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

د) $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$	ج) $\sqrt{3}, 6$	ب) ۶ و ۷	الف) ۵ و -۲
$\sqrt{2/1} \quad \sqrt{2/7} \quad \sqrt{3/1} \quad \sqrt{3/5}$	$\sqrt{3/1} \quad \sqrt{3/5}$ $\sqrt{4/1} \quad \sqrt{5/5}$	$\sqrt{6/1} \quad \sqrt{6/2}$ $\sqrt{6/5} \quad \sqrt{6/8}$	$\sqrt{1/1} \quad \sqrt{4/9}$ $-\sqrt{2} \quad -\sqrt{3/5}$

۶- عبارات درست را با $\checkmark$ و عبارات نادرست را با $\times$ مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید.

۱ ☒ عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. اعداد صحیح زیر مجموعه اعداد گویا هستند.
مثال ۲- هم صحیح است و هم گویا

۲ ☐ عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد. اعداد گنگ و اعداد گویا عضو مشترک ندارند.

۳ ☒ عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. اعداد گنگ زیر مجموعه اعداد حقیقی هستند.
مثال $\sqrt{15}$ هم گنگ است و هم حقیقی

۴ ☒ عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. اعداد طبیعی زیر مجموعه اعداد حقیقی هستند.
مثال عدد ۱۲ هم طبیعی است و هم حقیقی

۷- در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{10}$ و عدد $\frac{3}{11}$ چه تفاوتی هست؟

$$\sqrt{10} = 3.16227766...$$

عدد $\sqrt{10}$ گنگ است و رقم‌های اعشاری آن انتها

$$\frac{3}{11} = 0.272727... = 0.\overline{27}$$

ندارد و متناوب هم نیست اما $\frac{3}{11}$ عددی متناوب است.

درس سوم: قدر مطلق و محاسبه تقریبی

فعالیت

۱- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید:

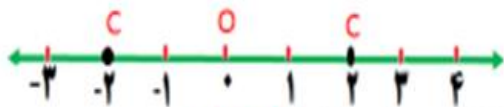


نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهد؟ ۳ و -۳

فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟ ۳ واحد

فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟ ۳ واحد

می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشند.



۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان یافت؟ ۲ نقطه

علامت قدر مطلق

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید

قدر مطلق a) نمایش می‌دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می‌توان نوشت: $|-2| = |2| = 2$

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ تا مبدأ برابر $\frac{2}{3}$ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد

$\frac{2}{3}$ و $(-\frac{2}{3})$ برابر $\frac{2}{3}$ است؛ یعنی: $|\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$
دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

مثال: قدر مطلق $\sqrt{5}$ را به صورت $|\sqrt{5}|$ نشان می‌دهیم که مساوی $\sqrt{5}$ است. قدر مطلق $\frac{4}{100}$ را به صورت $|\frac{4}{100}|$ نشان می‌دهیم که مساوی $\frac{4}{100}$ است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

مثال: به محاسبات زیر توجه کنید:

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

کار در کلاس

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------|
| الف) دو عدد a و b مثبت است. | ۱) $a > 0, b < 0$ |
| ب) عدد a نامنفی است. | ۲) $a > 0, b > 0$ |
| ج) دو عدد a و b منفی است. | ۳) $a \geq 0$ |
| د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. | ۴) $a < 0, b < 0$ |
| ه) عدد a نامثبت است. | ۵) $a \leq 0$ |

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید:

- | | |
|---------------------|------------------------|
| الف) $a > 0, b > 0$ | ۱) $ab < 0$ |
| ب) $a < 0, b < 0$ | ۲) $ab > 0, a + b > 0$ |
| ج) $a < 0, b > 0$ | ۳) $ab > 0, a + b < 0$ |

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید :



۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلق آنهاست.
 $|ab| = |a||b|$ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند:

$$|4 \times (-3)| = |-12| = 12 = |4| \times |-3| = 4 \times 3 = 12$$

۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق های آن دو عدد، کوچک تر یا مساوی است.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند:

$$|-7 + 10| = |3| = 3 \quad |-7| + |10| = 7 + 10 = 17 \Rightarrow 3 \leq 17$$

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$$\sqrt{2} \approx 1/4 \quad \sqrt{3} \approx 1/7 \quad \sqrt{5} \approx 2/2 \quad \sqrt{6} \approx 2/4 \quad \sqrt{7} \approx 2/6 \quad \sqrt{8} \approx 2/8$$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید :

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل : $\sqrt{2} \approx 1/4$ پس $1 - \sqrt{2}$ عددی منفی می شود :

$$۱) |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

دلیل : $\sqrt{3} \approx 1/7$ پس $2 - \sqrt{3}$ مثبت می شود :

$$۲) |\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - \sqrt{7}$$

دلیل : $\sqrt{7} \approx 2/6$ و $\sqrt{8} \approx 2/8$ پس $\sqrt{7} - \sqrt{8}$ منفی می شود :

$$۳) |2\sqrt{5} - \sqrt{5}| = 2\sqrt{5} - \sqrt{5}$$

دلیل : $\sqrt{5} \approx 2/2$ و $2\sqrt{5} \approx 4/4$ پس $2\sqrt{5} - \sqrt{5}$ مثبت می شود :

$$۴) |-4 - \sqrt{3}| = -(-4 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$$

دلیل : $\sqrt{3} \approx 1/7$ پس $-4 - \sqrt{3}$ منفی می شود :

مثال: اگر $a = \frac{1}{4}$ و $b = \sqrt{2}$ و $c = -3$ باشد، حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به دست می آوریم:

$$|a+b+c| = \left| \frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3) \right| = \left| -2\frac{1}{4} + \sqrt{2} \right|$$

چون $-2\frac{1}{4} + \sqrt{2}$ عددی منفی است ($\sqrt{2} \approx 1/4$)، پس حاصل عبارت مساوی با $-(-2\frac{1}{4} + \sqrt{2})$ یعنی $2\frac{1}{4} - \sqrt{2}$ است.

$$\underbrace{|3 - \sqrt{5}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|-2 - \sqrt{5}|}_{\text{منفی}} = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5})$$

$$= 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

جدول زیر را کامل کنید:

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	۳	۳	۶	۶	۷	۱۲۷	۳۲۵

از فعالیت بالا چه نتیجه ای می گیرید؟ **هر رادیکال به توان ۲ مساوی مقدار مثبت عدد زیر رادیکال است.**

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق، می توانیم بنویسیم: $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال: برای محاسبه $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|1-\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1-\sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

۱- عبارات‌های زیر را با هم مقایسه کنید:

طرف چپ

طرف راست

الف	$ (-7)^2 $	$\stackrel{=}{=}$	$ -7 ^2$	$\Leftarrow$	$(-7)^2 = 49$	$ 49 = 49$	$ -7 = 7$	$7^2 = 49$
ب	$ -8 + 5 $	$<$	$ -8 + 5 $	$\Leftarrow$	$ -8 + 5 = -3 = 3$		$ -8 + 5 = 8 + 5 = 13$	
ج	$ 3 - 9 $	$>$	$ 3 - 9 $	$\Leftarrow$	$ 3 - 9 = -6 = 6$		$ 3 - 9 = 3 - 9 = -6$	

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید: کسرهایی بین صفر و یک وقتی به توان عدد مثبت برسند کوچکتر می شوند.

$ 0 = 0$	$ -\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$	$ 7^2 - 7^4 = -(7^3 - 7^4) = 7^4 - 7^3$	$ 0.25 - 0.26 = 0.26 - 0.25$
		منفی	مثبت

۳- حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف	$\sqrt{(-2595)^2} = -2595 = -(-2595) = 2595$	ب	$\sqrt{(1394)^2} = 1394 = 1394$
ج	$\sqrt{(-3 + \sqrt{10})^2} = \underbrace{-3 + \sqrt{10}}_{\text{مثبت}} = -3 + \sqrt{10}$	د	$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \underbrace{2 - \sqrt{5}}_{\text{منفی}} = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$

۱- اگر $a = 0/25$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = 2\frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$|a+b| + 2|a-b-c| = \left| 0/25 - \frac{1}{4} \right| + 2 \left| 0/25 - \left(-\frac{1}{4} \right) - 2\frac{1}{2} \right| = 0 + 2 \times |-2| = 4$$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید:

الف) $|-3\sqrt{5}| = -(-3\sqrt{5}) = 3\sqrt{5}$

ج) $|0 + \sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

ب) $|7 - 5\sqrt{3}| = -(7 - 5\sqrt{3}) = -7 + 5\sqrt{3}$ منفی می شود: $5\sqrt{3} \approx 8/5$ پس $7 - 5\sqrt{3}$ منفی می شود: $\sqrt{3} \approx 1/7$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید:

$$|5-12| > 1 + \boxed{4}$$

$$|-7| = 7$$

هر عدد کوچکتر از ۶ را می توان در جای خالی قرار داد
(بی شمار جواب دارد).

۴- مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a = -2$, $a = 0$ و $a = 2$ به دست آورید. آیا می توانید عددی حقیقی به جای a قرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟

$$a = -2 \Rightarrow |a|+a = |-2|+(-2) = 2-2 = 0 \quad a = 0 \Rightarrow |a|+a = |0|+0 = 0+0 = 0$$

$$a = 2 \Rightarrow |a|+a = |2|+2 = 2+2 = 4$$

خیر $|a|+a$ همیشه بزرگتر یا مساوی صفر است.

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.
برای عددهای منفی این رابطه نادرست است. اعداد منفی جذر ندارند چون

$$\sqrt{(-5)^2} \neq -5$$

هیچ عددی به توان ۲ منفی نمی شود.

۶- حاصل عبارات روبه رو را به دست آورید:

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1 \quad \leftarrow \quad \sqrt{2}=1/4 \text{ پس } \sqrt{2}-1 \text{ مثبت است.}$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{10})^2} = |1-\sqrt{10}| = -(1-\sqrt{10}) = \sqrt{10}-1 \quad \leftarrow \quad \sqrt{10}=3/1 \text{ پس } 1-\sqrt{10} \text{ منفی است.}$$