



فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

صفحه: ۳۲ تا ۵۸

تهیه کننده: احمد فرخ وند

لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ، مُحَمَّدٌ رَسُوْلُهُ
بِأَمْرِ اللَّهِ وَكَانَ الْيَوْمَ يَوْمُ الْحُكْمِ
مَنْ يَنْصُرِ اللَّهَ يَنْصُرْهُ وَمَنْ خَالَاهُ خَالَاهُ
(سورة بقره، آیه ۲۵۵)



بارش برف از آسمان رحمت الهی را یاد به زمین می‌آورد و در حین حلقه‌های زیبای زمستانی است که
شاید بگویید برف یکدست است که این برف‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلف مشاهده کرد. برف یکدست
و یکدست را هم می‌توان به شکل‌های مختلف مشاهده کرد. برف یکدست و یکدست را هم می‌توان به شکل‌های مختلف مشاهده کرد.

۳۲

درس اوّل: استدلال

فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید :

۱- امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه من باخت کرده است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ **خیر، زیرا منطقی نیست و اعتبار ندارد.**

۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتیمتر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتیمتر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است. **مقدار بیسکویت مربع شکل بیشتر است.**

مساحت مستطیل $4 \times 8 = 32$

مساحت مربع $6 \times 6 = 36$



۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان تر است.

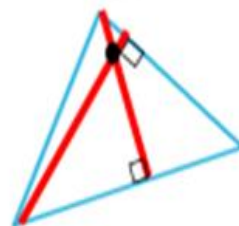
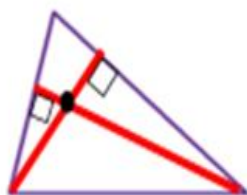
((استدلال)) یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می کنیم. راه های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می گوئیم.

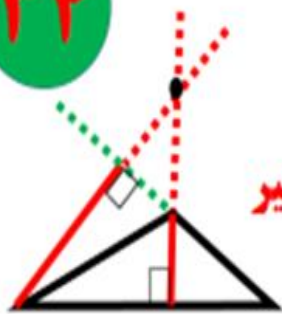


کار در کلاس

- ۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه ای می گیرد که درست نیست. **من امروز درس نخوانده ام پس حتماً معلم از من درس می پرسد.**
- ۲- دو ارتفاع از هر یک از مثلث های زیر، رسم کنید:



آیا با این مثال ها می توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟ **خیر** یک مثال بزنید که نتیجه بالا را **نقض** کند.



اگر فردی با رسم ارتفاع های موردنظر در مثلث ها چنین نتیجه گیری کند که محل برخورد ارتفاع های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟ **استدلال محسن**

۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس های پنج گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع

کافی است؟ چرا؟ **خیر، زیرا ممکن است حواس پنجگانه خطا کنند. مثل خطای دید در مثال های قبل.**

هرچند به طور معمول در ریاضیات و به ویژه در هندسه به کار بردن شکل ها، ترسیم آنها و استفاده از شهود به تشخیص راه حل ها و ارائه حدس های درست کمک زیادی می کند، باید توجه کرد به تشخیصی که براساس این روش ها بوده است، نمی توانیم به طور کامل اطمینان کنیم.

کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می کند. در مورد نتایجی که از این مثال ها می گیرید با یکدیگر بحث کنید.

اگر در سه لیوان به ترتیب آب سرد، ولرم و گرم بریزیم و هم زمان انگشت یک دست را در آب سرد و انگشت دست دیگر را در آب گرم فرو ببریم و پس از یک دقیقه هر دو انگشت را همزمان در آب ولرم فرو ببریم. با یک دست آب لیوان را گرم و با دست دیگر آن را سرد حس خواهیم نمود.

تمرین

۱- در شکل های زیر عمود منصف های سه ضلع مثلث ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل ها می توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟

۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند. وزنه برداری قصد بلند کردن وزنه ای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال های متفاوتی می کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال نتوانست وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام. او هیچ گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال نیما، چون منطقی تر است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال ها بحث کنید.

۳- چون من تا به حال هیچ وقت تصادف نکرده‌ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.
این استدلال مشابه کدام یک از استدلال‌های زیر است؟

(الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.
(ب) همه فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود، پس فیلم جنگی بوده است.

(ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه خاله کوچکم هم دختر خواهد بود. ✓
(د) چون همه قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- حمید و وحید می‌دانستند که علی، حسن، حسین و باقر برادرند و: علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

حمید: در تمام خانواده‌هایی که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، علی فرزند بزرگ‌تر بوده است.

وحید: چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسین بزرگ‌تر است. **استدلال وحید، چون منطقی است.**
استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید.



درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا ارائه مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلال‌مان از اطلاعات مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.



۱- به گفت و گوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه های روبه رو با هم برابر است؟
سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی الاضلاع زاویه های روبه رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

فرض : شکل لوزی است.

حکم : **زاویه های روبه رو** برابر است.

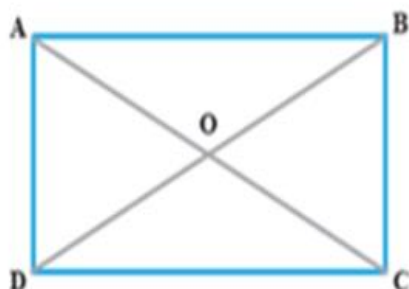
استدلال :

$$\left. \begin{array}{l} \text{لوزی نوعی متوازی الاضلاع است.} \\ \text{در متوازی الاضلاع زاویه های روبه رو برابر است.} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{در لوزی زاویه های روبه رو برابرند.}$$

۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می دانستیم. در مسئله زیر فرض، واقعیت های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت ها را کامل کنید :

فرض : ABCD مستطیل است.

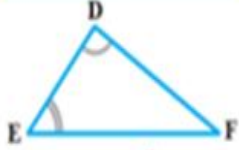
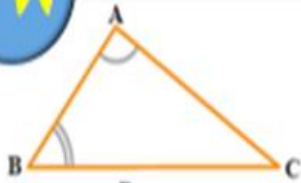
حکم : قطر های مستطیل، مساوی است.



فرض :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = DC, \quad AD = BC \\ AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC \end{array} \right.$$

قطر های مستطیل برابرند. حکم : $AC =$



$$\hat{A} = \hat{D}$$

$$\hat{B} = \hat{E}$$

فرض:

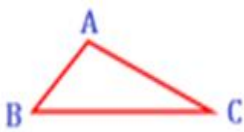
$$\hat{C} = \hat{F}$$

حکم:

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید:

۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.

۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از،



$$\hat{A} > \hat{C}$$

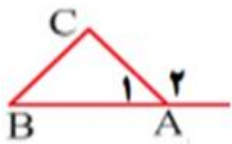
فرض:

$$BC > AB$$

حکم:

ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

۳- نشان دهید در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن



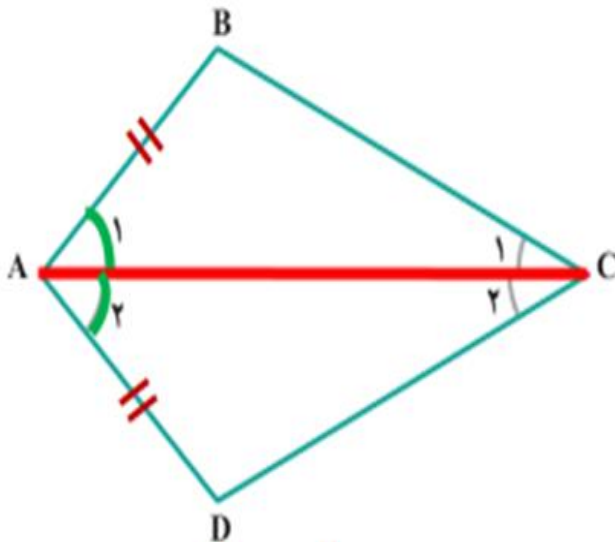
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$$

فرض:

$$\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

حکم:

برابر است.



۱- در مسئله زیر، فرض و حکم را بنویسید و

اشکال استدلال داده شده را بیابید، سپس استدلال

درستی برای آن بنویسید.

مسئله: در شکل مقابل پارخط AC نیمساز

زاویه A است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید

مثلث‌های مثلث ABC و ADC هم‌نهشت‌اند.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$AB = AD$$

فرض:

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC$$

حکم:

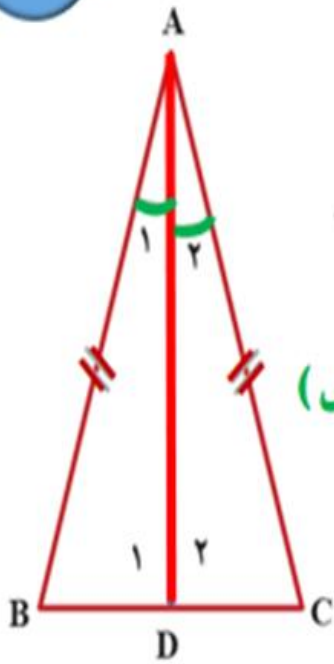
استدلال: چون AC نیمساز است، داریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و از طرفی AC نیز ضلع مشترک

$$AC = AC$$

(ض ض ض)

در هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند.

۲- مثلث زیر متساوی الساقین و AD نیمساز وارد بر قاعده آن است. با استدلال زیر نشان داده ایم که نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می باشد.



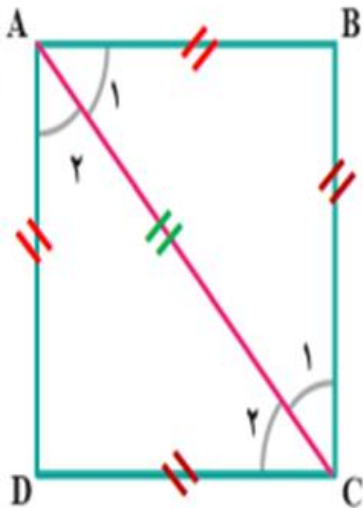
$$\begin{cases} AB = AC & \text{(ساق های برابر)} \\ A_1 = A_2 & \text{(AD نیمساز است)} \\ AD = AD & \text{(ضلع مشترک)} \end{cases} \Rightarrow ABD \cong ACD \Rightarrow BD = CD$$

(ض ض)

لذا نقطه D وسط BC است و AD میانه است.

آیا در مثلث ABC می توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می توان خاصیت اثبات شده برای

نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد؟ **چون ویژگی و شرایط زاویه A و زاویه B مثل هم نیست.**



۳- با استدلال زیر به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که

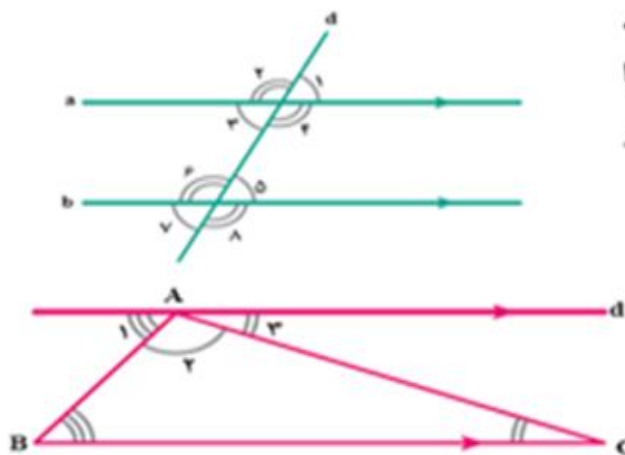
قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع هم نهشت اند و زوایای

متناظر با هم برابرند؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است.

آیا می توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به طور کلی در

مربع هر قطر نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است؟ **بله**

استدلال رضا: رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\triangle ABC$ را در نظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با

شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویه A_2 همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_3$ پس با جای گذاری

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ \quad \hat{A} \text{ و } \hat{A}_3 \text{ به ترتیب به جای } \hat{C} \text{ و } \hat{B} \text{ خواهیم داشت:}$$

استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

دربارۀ معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید.

استدلال حامد و حسین معتبر نیست چون با مثال یا یک حالت خاص نمی‌توان حکم کلی را نتیجه گرفت مهدی و رضا برای هر مثلثی حکم را ثابت کرده اند پس استدلال آن‌ها معتبر است.

فعالیت

مسئله: حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$$P_h + P_b = 5000$$

$$\Rightarrow P_s + P_b = P_h + P_b \Rightarrow P_h = P_s$$

$$P_h = \text{پول حمید} \quad P_b = \text{پول بهرام} \quad P_s = \text{پول سعید}$$

$$P_s + P_b = 5000$$

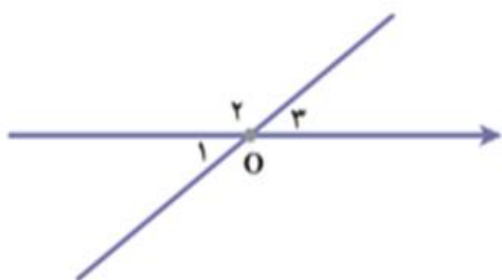
بین استدلالی که برای مسئله قبل و مسئله بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟

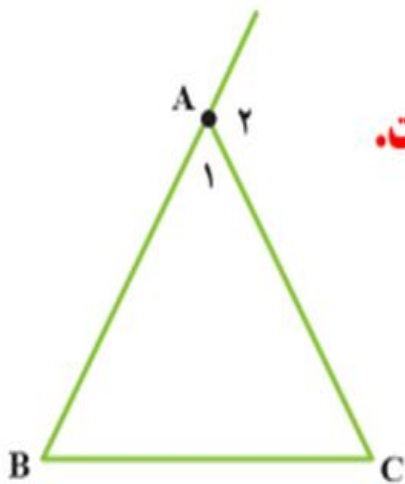
روش استدلال هر دو مسئله یکی است.

مسئله: نشان دهید زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابر است.

فرض کنیم $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_3 + \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$





۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. **خیر، چون برای حالت خاص متساوی الاضلاع ثابت شده است.**

مسئله: در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

اثبات: مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر کدام 60° است، بنابراین

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی‌های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می‌توان بدین صورت هم آورد: «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره‌خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چندضلعی را به هم وصل می‌کند، به‌طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص‌های دو دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

نرگس: چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد.

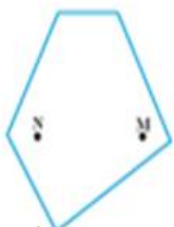
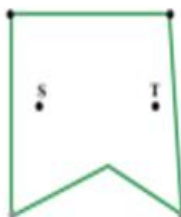
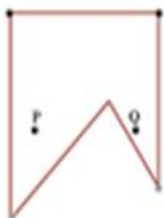
درست، چون با یک مثال نقض می‌توان حکم کلی را رد کرد.

مهدیه: چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط S و T درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.

نادرست، چون با یک مثال نمی‌توان حکم کلی را ثابت کرد.

مریم: چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.

نادرست، چون با یک مثال نمی‌توان حکم کلی را ثابت کرد.



۳- آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف) $ABCD$ مستطیل است $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.} \\ \text{چهارضلعی } ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع است.} \end{cases}$

نادرست، چون لوزی هم متوازی‌الاضلاع است و ممکن است لوزی باشد.

(ب) $ABCD$ مربع نیست $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{مربع } ABCD \end{cases}$

نادرست، چون ضلع‌های لوزی هم برابرند و ممکن است لوزی باشد.

(ج) $ABCD$ مربع نیست $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهارضلعی } ABCD \text{ ضلع‌ها برابر نیستند.} \end{cases}$

درست، ضلع‌های مساوی نیست، پس مربع نیست.

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

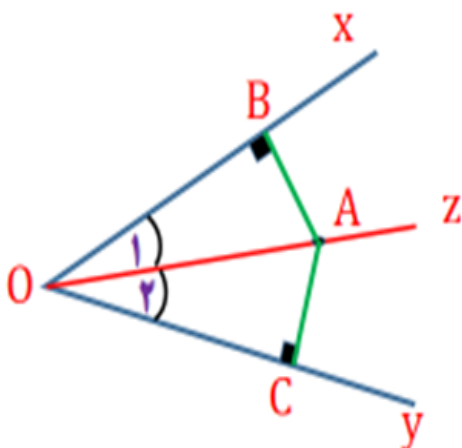
یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط

عمود می‌شود.

راهنمایی: یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز

مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این

نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{B} = 90^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OA \text{ وتر مشترک} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \triangle OAC \cong \triangle OAB \\ \text{(وتر و یک زاویه تند)} \end{array} \Rightarrow OB = OC$$

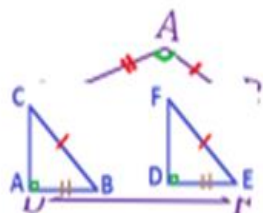
۲ حالت خاص هم نهشتی مثلث قائم الزاویه



$$\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$$

$$BC = EF$$

$$\hat{B} = \hat{E} \quad (\text{وتر و زاویه تند})$$



$$\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$$

$$AC = ED$$

$$BC = EF$$

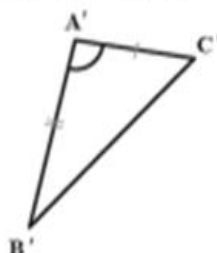
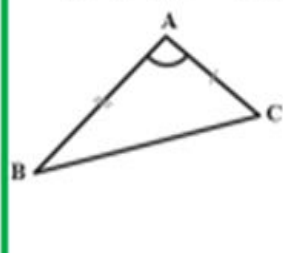
$$\hat{A} = \hat{E}$$

$$AB = DE$$

$$AD = EF$$

(وتر و یک ضلع)
(ض ض ض)

با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت همنهشتی (ض ض ض) را این گونه نمایش می‌دهیم:



$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

برای یادآوری، دو حالت دیگر همنهشتی مثلث‌ها و دو حالت همنهشتی ویژه مثلث‌های

قائم الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

۳ حالت کلی هم نهشتی مثلث‌ها

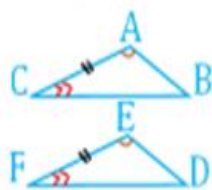


$$AB = EF$$

$$BC = FD$$

$$AC = ED$$

(ض ض ض)



$$\hat{C} = \hat{F}$$

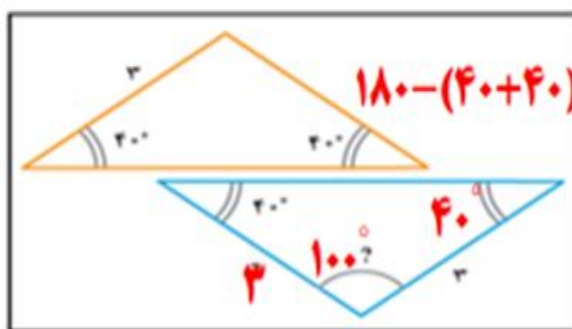
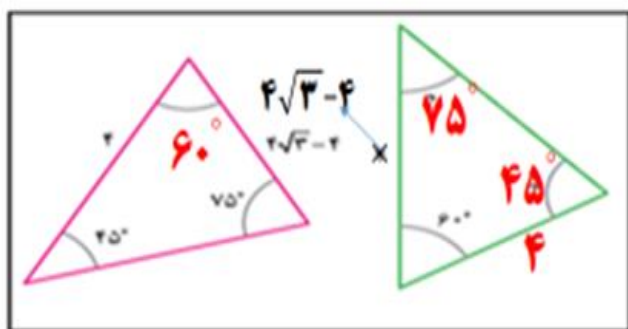
$$AC = ED$$

$$\hat{A} = \hat{E}$$

(ض ض ز)

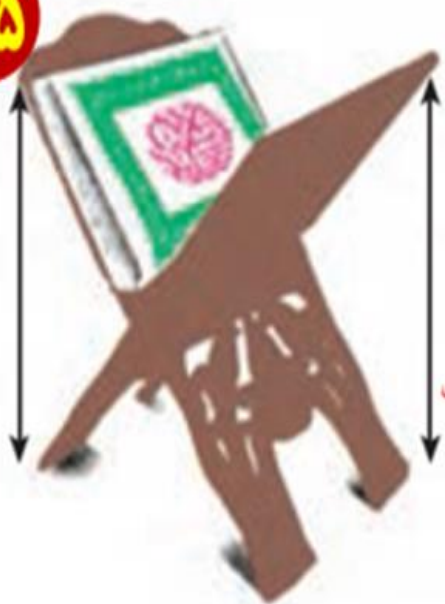
فعالیت

۱- در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر همنهشت‌اند. اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید:

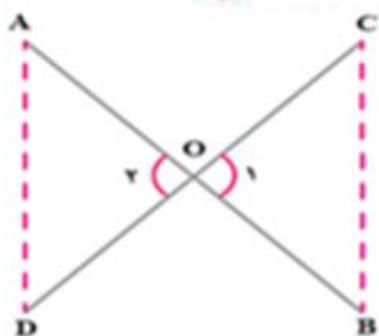


۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر همنهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های همنهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).

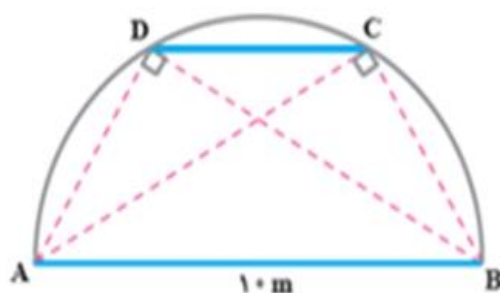
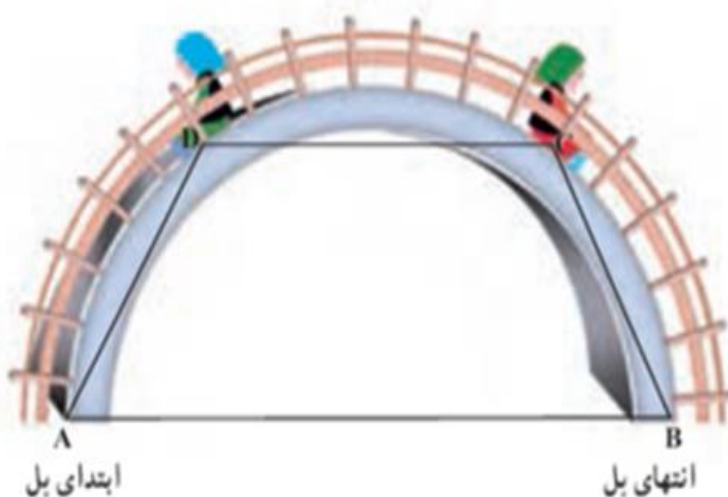




مثال : بارحل های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایه چوبی آن از وسط هم گذشته است. می خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که : $OA=OB$ و $OC=OD$ (چرا؟) و حکم این است که : $AD=BC$. زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند (چرا؟)، پس مثلث های OBC و OAD همنهشت هستند و از آنجا درستی حکم به دست می آید، یعنی :

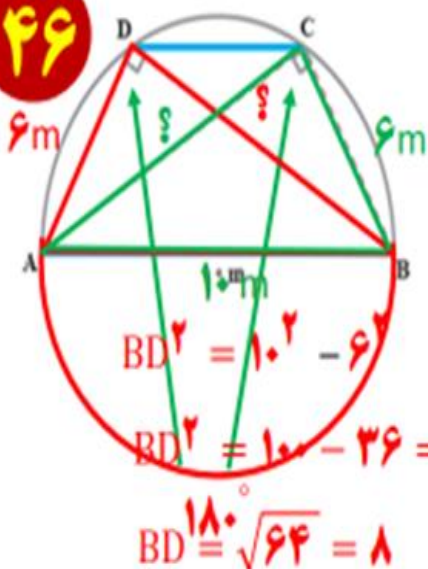


$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC$$



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم دایره هست که بچه ها برای بازی از پله های آن بالا می روند. می دانیم فاصله ابتدای پل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ۱۰ متر است. ترانه روی پله C نشسته است که از انتهای

پل ۶ متر فاصله دارد ($BC=6$) و شهرزاد روی پله D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می زنند که باید فاصله شان از پایه های مقابل برابر باشند؛ یعنی $AC=BD$. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.



۱- نشان دهید زاویه‌های $\hat{D}$ و $\hat{C}$ در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک

قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC=BD$

چون زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{B}$ محاطی و مقابل قطر هستند پس قائمه می‌باشند.

$$AC^2 = 10^2 - 6^2$$

$$AC^2 = 100 - 36 = 64$$

$$AC = \sqrt{64} = 8$$

$$BD^2 = 10^2 - 6^2$$

$$BD^2 = 100 - 36 = 64$$

$$BD = \sqrt{64} = 8$$

$$\Rightarrow AC = BD$$

۲- به کمک همبستگی مثلث‌های ADB و ACB، نشان دهید $AC=BD$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} = 90^\circ \\ AB = AB = 10 \\ AD = BC = 6 \end{array} \right. \text{وتر}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ABC$$

(وتر و یک ضلع)



$$AC = BD$$

اجزاء متناظر

فعالیت

در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های

اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

۱- با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$\text{فرض} \left\{ \begin{array}{l} AD = AB = DC = BC, \quad BN = NC \\ \hat{A} = \hat{C}, \quad \hat{B} = \hat{D}, \quad DM = MC \end{array} \right.$$

$$\text{حکم: } \triangle ADM \cong \triangle ABN$$

۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اول ثابت کنید مثلث‌های ADM و ABN

همبست‌اند.

$$\left\{ \begin{array}{l} AD = AB \\ \hat{D} = \hat{B} \\ DM = BN \end{array} \right.$$



$$\triangle ADM \cong \triangle ABN$$

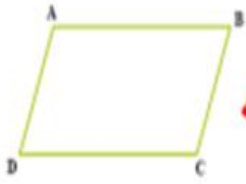
(فرض)

۳- حال با توجه به همبستگی دو مثلث ADM و ABN، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$$\text{اجزاء متناظر} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$\hat{M}_1 = \hat{N}_1$$

$$AM = AN$$



فرض های مسئله

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{D} = \hat{B} \\ AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

حکم مسئله

$$\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$$

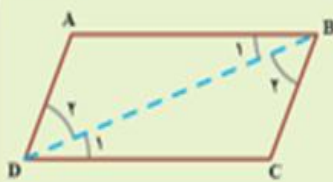
می خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی الاضلاع مانند شکل روبه‌رو، ضلع های مقابل، همواره با هم برابر است. مفروضات و داده های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله در ادامه، نظر دو دانش آموز را ببینید و با توجه به سؤال ها پاسخ دهید.

شبنم: در تعریف متوازی الاضلاع، برابری ضلع های روبه‌رو را می دانستیم. علاوه بر آن با اندازه گیری هم می توانیم این موضوع را نشان دهیم.

شهرزاد: معلوم است که ضلع های روبه‌رو با هم مساوی است، با چشم هم می توان دید!

● آیا می توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ خیر، چون چشم انسان خطا می کند.

● به تعریف متوازی الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده ایم؟ چرا؟



ترانه: به نظر من باید دو مثلث همنهشت بیایم و با اثبات همنهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی الاضلاع برسیم. اما در شکل دو مثلث نداریم. پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطرها، دو مثلث ایجاد می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AD \parallel BC, \text{ مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = BD \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ (ز.ض.ز)}$$

با توجه به همنهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی های زیر را کامل کنید.

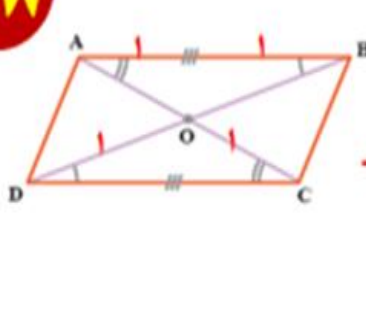
$$AD = BC \quad \text{دیدیم که } \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \text{ بنابراین داریم:}$$

$$AB = DC \quad \text{و } \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \text{ بنابراین داریم:}$$

● چرا برای اثبات همنهشتی مثلث های ایجاد شده، نمی توانیم از حالت های (ض.ض.ض) و (ض.ض.ض) استفاده کنیم؟ **چون تساوی ضلع ها حکم مسئله بودند و باید آن را ثابت کنیم.**

● با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به دست آوریم؟ **بله**

● از همنهشتی مثلث های ایجاد شده در متوازی الاضلاع به جز برابری ضلع های مقابل، نتیجه دیگری هم درباره زاویه های متوازی الاضلاع به دست می آید؛ این نتیجه را بنویسید. ● در هر متوازی الاضلاع **زاویه های** روبه‌رو، مساوی اند.



$$\left\{ \begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ AB = DC \\ \angle B = \angle D \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle ODC \quad (\text{ز ض ز})$$

۱- ثابت کنید قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA = OC$ و $OB = OD$.

$$\Rightarrow OB = OD \quad OA = OC$$

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است!)



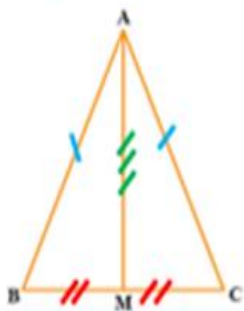
$$\left\{ \begin{array}{l} DC = DC \\ \angle D = \angle C = 90^\circ \\ AD = BC \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC \quad (\text{ض ض ض})$$

$$\Rightarrow BD = AC$$

۳- در مثلث متساوی الساقین ABC، میانه AM را رسم کرده ایم. مثلث های AMB و AMC به چه حالتی همبسته هستند؟ چرا AM نیمساز

زاویه A است؟ چرا AM بر BC عمود است؟



$$\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ MB = MC \\ AM = AM \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM \quad (\text{ض ض ض})$$

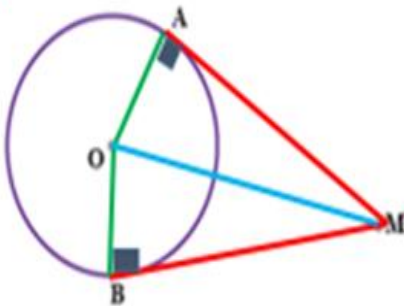
$$\Rightarrow \angle M_1 = \angle M_2 = 90^\circ \quad \angle A_1 = \angle A_2$$

۴- از نقطه M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم

کنید. آیا اندازه این دو مماس با هم برابر است؟

درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از

مرکز دایره به نقطه های M، A و B وصل کنید.)



نکته: شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. پس OA بر AM و OB بر BM عمود است. $\angle A = \angle B = 90^\circ$

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB \quad (\text{شعاع}) \\ OM = OM \quad (\text{وتر}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow$$

$$\triangle OAM \cong \triangle OBM \quad (\text{وتر و یک ضلع})$$

$$\Rightarrow AM = BM$$

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد؛ اما می‌توان مراحل را مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه، آنها را توصیه می‌کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می‌کنیم.

مثال: دو روستای A و B با یک جادهٔ خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جادهٔ آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جادهٔ آسفالتی درست از وسط جادهٔ خاکی عبور می‌کرد. ادارهٔ راه‌سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جادهٔ آسفالتی با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن تا جادهٔ اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جادهٔ مستقیم، عمود بر این جادهٔ اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ساخت جادهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است؛ یعنی $AH=BH'$.

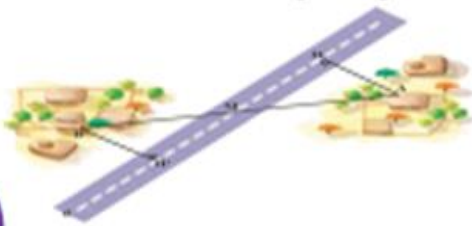


قدم‌های حل مسئله

۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟

۲- اگر مسئله فاقد شکل است با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید:

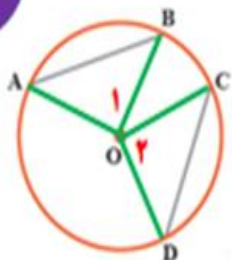
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی $MA=MB$ و AH و BH' بر d عمود و حکم این است که: $AH=BH'$



فرض	$MA=MB$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟ با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} MA=MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویه حاده)} \\ \triangle AMH \cong \triangle BMH \\ \Rightarrow AH = BH' \end{array}$$

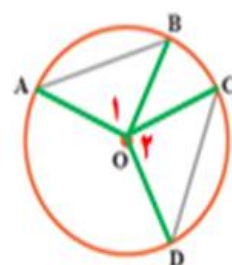


در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی است.

۱- نشان دهید کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ مساوی است.

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = DC \text{ (فرض)} \\ OB = OC \text{ (شعاع)} \\ OA = OD \text{ (شعاع)} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

(ض ض ض)



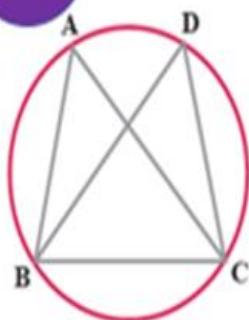
۲- در شکل مقابل کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ مساوی است. $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OC \text{ (شعاع)} \\ OA = OD \text{ (شعاع)} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow AB = DC$$

(ض ض ض)

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها باهم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز باهم برابرند.



در شکل مقابل می‌دانیم $AB = CD$ ،

(چون در یک دایره اگر دو وتر با هم مساوی باشد، کمان‌های مقابل آن دو وتر با هم برابرند.)

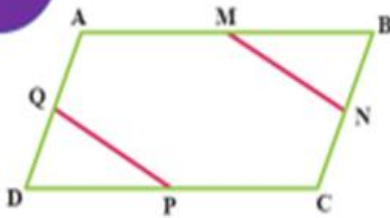
۱- چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟

۲- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{BC} = \widehat{BC} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC} \Rightarrow \underline{AB = DC}$$

۳- چرا $AC = BD$ ؟

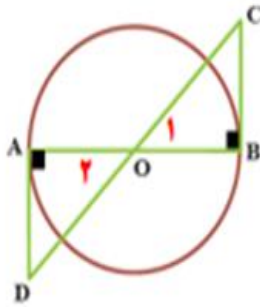
(چون در یک دایره اگر دو کمان با هم مساوی باشد، وترهای مقابل آن دو کمان با هم برابرند.)



۱- در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی الاضلاع است، ثابت کنید: $MN=PQ$

$$\begin{aligned} AD = BC &\Rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow DQ = BN \\ AB = DC &\Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2} \Rightarrow MB = DP \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \angle B = \angle D \\ MB = DP \\ DQ = BN \end{cases} \Rightarrow \triangle DQP \cong \triangle MNB \Rightarrow MN = PQ$$

(ض ز ض)

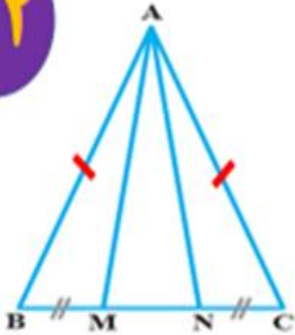


۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس است، نشان دهید که BC و AD برابرند.

$$\begin{cases} \angle O_1 = \angle O_2 \\ OA = OB \text{ (شعاع)} \\ \angle A = \angle B = 90^\circ \text{ (فرض)} \end{cases} \Rightarrow \triangle OAD \cong \triangle OBC \Rightarrow AD = BC$$

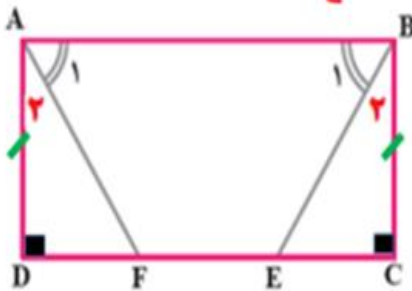
(ض ض ز)

۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM=NC$. نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.



$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle B = \angle C \\ MB = NC \end{cases} \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACN \Rightarrow AM = AN$$

(ض ض ض) (یعنی مثلث AMN متساوی الساقین است)



۴- در مستطیل ABCD، پاره‌های AF و BE طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند، ثابت کنید BE و AF مساوی‌اند.

$$\begin{aligned} \angle A_1 + \angle A_2 &= \angle B_1 + \angle B_2 \\ \angle A_1 &= \angle B_1 \\ \angle D &= \angle C = 90^\circ \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \angle A_2 = \angle B_2 \\ \angle D = \angle C = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ADF \cong \triangle BEC \Rightarrow AF = BE$$

(ض ض ز)

۵۲

۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر

نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است:

$$MB=MC$$



$$\left[\begin{array}{l} AB = AC \quad (\text{فرض}) \\ \angle A_1 = \angle A_2 \quad (\text{فرض}) \\ AM = AM \quad (\text{مشترک}) \end{array} \right. \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM \quad (\text{ض ض ض}) \Rightarrow MB = MC$$

۵۳

درس پنجم: شکل های متشابه

== در تصویرهای زیر، دو گل شبیه به هم را می بینید. آیا هر دو گل به طور کامل مثل هم است؟



== در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟

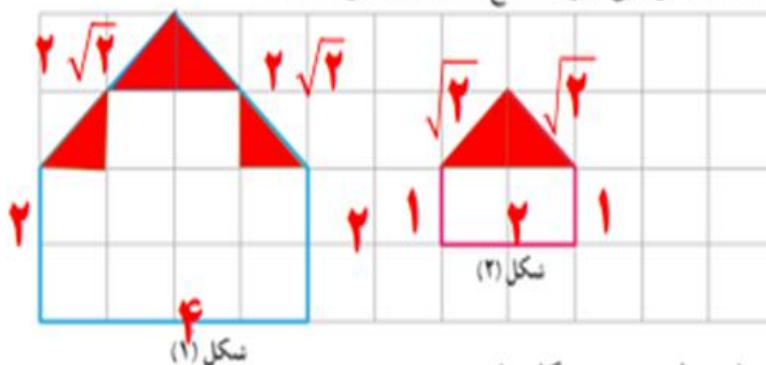


== تصویرهای زیر، عکس هایی از میدان آزادی تهران است. کدام یک به برج آزادی شبیه تر است؟



از نظر ریاضی شکل های متشابه: شکل هایی هستند که تعداد ضلع های آنها برابر و اندازه زاویه های آنها مساوی و اندازه ضلع های آنها متناسب باشد.

۱- مربع های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتیمتر است :



اندازه ضلع ها و زاویه های هر دو شکل را بنویسید :

دو برابر هم دیگرند.

مساویند.

چه رابطه ای بین ضلع های متناظر دو شکل وجود دارد؟

چه رابطه ای بین زاویه های متناظر دو شکل وجود دارد؟

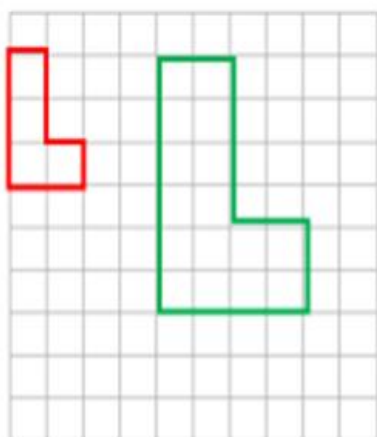
اندازه ضلع های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع های

شکل (۲) است؟ **دو برابر هم دیگرند.**

در صفحه شطرنجی مقابل یک چند ضلعی رسم کنید

و چند ضلعی دیگری مانند آن بکشید به طوری که اندازه

ضلع هایش ۲ برابر شکل اول باشد.



۲- در تصویر زیر، نقشه قسمتی از شهر تهران را می بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است:

یعنی هر یک سانتیمتر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتیمتر مقدار واقعی برابر است. فاصله دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.



$$\frac{1}{100000} = \frac{5}{x}$$

$$x = \frac{100000 \times 5}{1} = 500000$$

۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده ایم. عدد روی دستگاه ۵٪ را نشان می داد.

تصویر خروجی را شما رسم کنید.



هرگاه در دو چند ضلعی همه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده ، و یا بدون تغییر باشد) و اندازه زاویه ها تغییر نکرده باشد ، آن دو چند ضلعی با هم متشابهند.

۱- آیا دو مربع زیر متشابه است؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای

بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ **بله، اندازه ضلع‌ها دو برابر شده ولی زاویه‌ها تغییر نکرده اند.**

آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابه‌اند؟ چرا؟

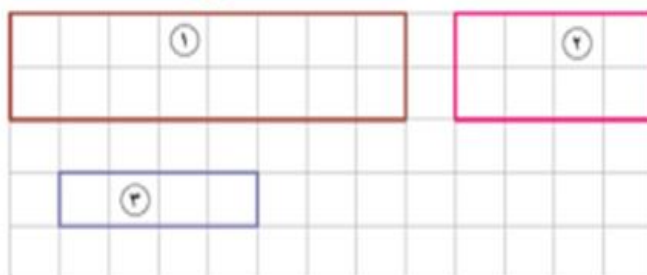
بله، چون ضلع‌های مربع مساوی‌اند، اگر یک ضلع تغییر کند، ضلع‌های دیگر هم به همان نسبت تغییر می‌کنند. و زاویه‌های مربع همیشه ۹۰ درجه است.



شماره ۳ و ۱، چون اندازه ضلع‌ها دو برابر شده اما زاویه‌ها تغییر نکرده اند.

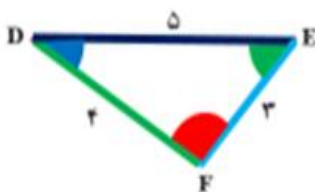
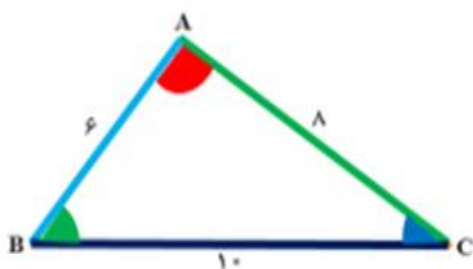
۲- از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابه‌اند؟ چرا؟

آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه است؟ **خیر**



دو مثلث زیر با هم متشابه است. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را هم‌رنگ کنید. نسبت

ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟ **بله**



$$\frac{AB}{EF} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\angle C = \angle D$$

$$\frac{AC}{DF} = \frac{8}{4} = 2$$

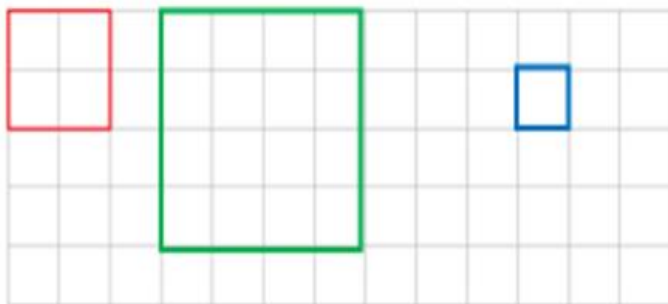
$$\angle B = \angle E$$

$$\frac{BC}{ED} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\angle A = \angle F$$

به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

۱- با توجه به مربع صفحه بعد، مربع دیگری رسم کنید به گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{1}{4}$ باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟



۲ جواب، زیرا می‌توان مربع دیگر را کوچکتر یا بزرگتر در نظر گرفت.

۲- در صفحه مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید:

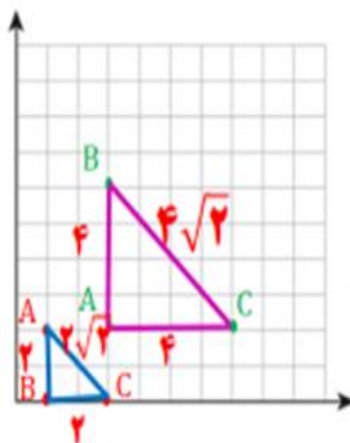
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } ABC$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } A'B'C'$$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت تشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

$$\frac{4}{2} = 2$$

متشابه هستند. زیرا هر دو یک زاویه 90° درجه و دو زاویه 45° درجه دارند. و نسبت ضلع‌های دو مثلث ۱ به ۲ است.



۱- آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ **بله متشابه هستند.**

در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ **نسبت تشابه آنها ۱ به ۱ است.**

۲- آیا هر دو لوزی متشابه‌اند؟ چرا؟

خیر، زیرا ممکن است زاویه‌های دو لوزی دلخواه مساوی نباشد.

۳- در یک نقشه، مقیاس $200:1$ است. فاصله دو نقطه روی نقشه $3/5$ سانتیمتر است. فاصله

این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟

$$\frac{1}{200} = \frac{3/5}{x} \quad x = \frac{200 \times 3/5}{1} = 120 \text{ cm}$$



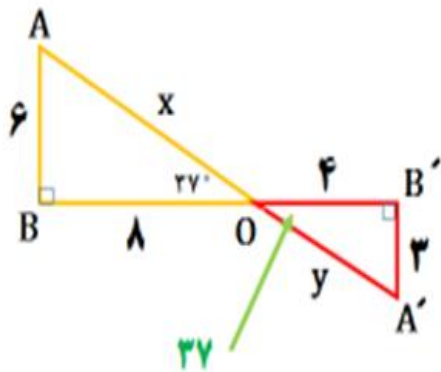
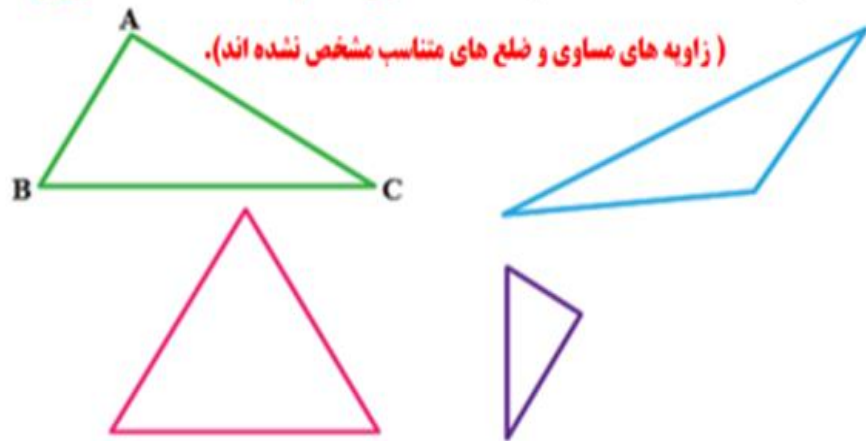
۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ **بله. چون سه ضلع مثلث متساوی الاضلاع مساوی است اگر یک ضلع تغییر کند بقیه ضلع ها هم به همان نسبت تغییر می کند و زاویه ها همیشه ۶۰ درجه است.**
۶- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟

خیر، زیرا ممکن است زاویه های آن ها مساوی نباشد.

۷- مثلث ABC به ضلع های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-1$ و 10 و $x+7$ با هم متشابه هستند (اندازه ضلع های مثلث ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را پیدا کنید.

$$\frac{8}{x+7} = \frac{5}{10} = \frac{4}{x-1} \Rightarrow 5(x-1) = 40 \Rightarrow 5x = 40 + 5 = 45 \Rightarrow x = \frac{45}{5} = 9$$

۸- کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟ **هیچ کدام اطلاعات مسئله کافی نیست.**



۸- در شکل زیر

الف) مقادیر x و y را بیابید (به کمک رابطه فیثاغورس)

$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

$$x^2 = 36 + 64 = 100$$

$$x = \sqrt{100} = 10$$

$$y^2 = 4^2 + 3^2$$

$$y^2 = 16 + 9 = 25$$

$$y = \sqrt{25} = 5$$

ب) اندازه زاویه های A و A' چند درجه است؟

$$\hat{A} = 180 - (90 + 37) = 53$$

$$\hat{A}' = 180 - (90 + 37) = 53$$

ج) آیا دو مثلث AOB و A'B'O متشابه اند؟ چرا؟

بله زیرا ضلع ها متناسب و زاویه ها مساوی هستند.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{OA}{O'A'}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\hat{A} = \hat{A}' = 53^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$$

$$\hat{O} = \hat{O}' = 37^\circ$$