

## فصل چهارم: توان و ریشه

صفحه: ۵۹ تا ۷۷

**تہیہ کنندہ: احمد فرخ وند**

وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ  
هر چیز زندی را از آب پدید آوریم  
(سوره انبیاء آیه ۳۰)



یک قطره آب شامل حدود ۲۲ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر ۲۲.....مولکول است که می توان آن را به صورت  $60 \times 10^{23}$  تعاریف داد. هر گونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بشناسیم.

٦٠

## درس اوّل: توان صحیح

عددهای صحیح  $\dots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به‌طور مثال می‌دانید:

$$2^r = 8 \quad \text{و} \quad (-5)^r = 25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^r = \frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{32}$$

همچنین می دانید که اگر  $a$  عددی غیر صفر باشد،  $a^0 = 1$ . **مثال**  $(5-)^0 = 1$  یا  $7^0 = 1$

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل  $2^{-3}$  چیست؟ به کمک فعالیت زیر

پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد:

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

|       |       |       |       |       |               |                               |                               |                                |                                |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| ۱۶    | ۸     | ۴     | ۲     | ۱     | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$ |
| $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | $2^{-1}$      | $2^{-2}$                      | $2^{-3}$                      | $2^{-4}$                       | $2^{-5}$                       |

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارد؟ **از چپ به راست بر ۲ تقسیم شده اند.**

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟ **مقدار هر عدد تواندار بالای آن نوشته شده است.**

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا  $2^0$  با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟ **از چپ به راست بر ۱ واحد کم شده اند.**

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

ه) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید :

$$2^{-2} = \frac{1}{4} \quad 2^{-4} = \frac{1}{16} \quad 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

به طور کلی اگر  $a$  یک عدد غیر صفر باشد و  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آن گاه :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

**توان منفی اعداد :** اگر عددی توان منفی داشته باشد **پایه** را **معکوس**

می کنیم تا به **توان مثبت** تبدیل شود.

مثال :

الف)  $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ج)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

ب)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

د)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان دار با توان

الف)  $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

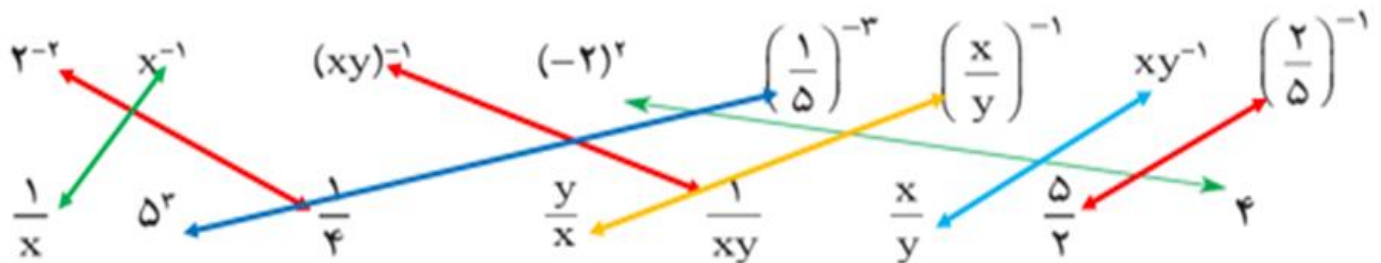
ب)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج)  $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = \frac{1}{-216} = -\frac{1}{216}$

د)  $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{7}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{2401}} = \frac{2401}{16} = \left(-\frac{7}{2}\right)^4$

به طور کلی اگر  $n$  یک عدد طبیعی و  $a \neq 0$  آن گاه:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- عبارت‌های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید:  $(x \neq 0, y \neq 0)$



۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = (-3)^4 = 81$

ب)  $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$

ج)  $-(-5)^2 = -(+25) = -25$

د)  $-(-5)^{-2} = -\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{1}{25}$

هـ)  $-5^{-2} = -\left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{1}{25}$

اگر توان منفی باشد پایه را معکوس می‌کنیم تا توان مثبت شود.

و)  $1^{-2} = \frac{1}{1^2} = 1$

ز)  $\frac{(-3)^{-1}}{3} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$

ح)  $-\frac{1}{2^{-2}} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$

ط)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$

ی)  $2^0 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

اگر  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی، و  $a$  یک عدد دلخواه باشد، داریم:  $a^m \times a^n = a^{m+n}$

آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟

با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عددهای صحیح هم حدس زد.

اگر  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح، و  $a$  یک عدد دلخواه (غیر صفر) باشد، رابطه زیر برقرار است.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

## در ضرب عددهای توان دار با پایه مساوی: پایه را می نویسیم و توان ها را با هم جمع می کنیم.

به حاصل ضرب های زیر توجه کنید، چه نتیجه ای می گیرید؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

$$5^2 \times 5^{-7} = \dots \text{ } 5^{-5}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

اگر  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشد، و  $a$  یک عدد دلخواه (غیر صفر)، رابطه زیر برقرار است.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:

$$2^2 \times 2^{-3} \times 2^{-4} = 2^{2-3-4} = 2^{-5}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^2) \times (4x^3) = 24x^{-1+2+3} = 24x^4 \quad (x \neq 0)$$

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید:  $(b, x, y \neq 0)$

$$5^{-4} \times 5^{10} = 5^6$$

$$(-4)^{-6} \times (-4)^{-1} = (-4)^{-7}$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} = \left(\frac{-3}{8}\right)^{-7}$$

$$(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$b^{-2} \times b^{-2} = b^{-4}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد مخالف صفر و  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشد، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; \quad a^0 = 1$$

الف)  $\frac{7^3}{7^5} = 7^{-2}$

ب)  $2^{-2} \times 5^{-2} = 10^{-2}$

ج)  $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} = \left(-\frac{24}{3}\right)^{-3} = (-8)^{-3}$  د)  $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{+2}$

هـ)  $\frac{2^8 \times 5^{10}}{2^4 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^4} \times \frac{5^{10}}{5^6} = 2^4 \times 5^4 = 10^4$

و)  $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} = x^7 y^{-5} z^{-2} = \frac{x^7}{y^5 z^2} \quad x, y, z \neq 0$

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف)  $3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \\ -6 \end{cases}$    
 اگر توان منفی باشد، پایه را معکوس می‌کنیم  
 $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

ب)  $3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$    
 اگر توان منفی باشد، پایه را معکوس می‌کنیم

ج)  $3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \\ 7^{-1} \end{cases}$    
 اگر توان مساوی باشد، پایه‌ها را ضرب می‌کنیم

د)  $3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 7^{-1} \end{cases}$    
 اگر توان منفی باشد، پایه را معکوس می‌کنیم

هـ)  $5^{-2} \begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \end{cases}$    
 اگر توان منفی باشد، پایه را معکوس می‌کنیم  
 $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

و)  $(-2)^3 \begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \end{cases}$    
 -۲ را سه بار ضرب می‌کنیم.  
 $(-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود  $10^{-24}$  گرم است. جرم یک وزنه  $100$  کیلوگرمی چند برابر

۶۴

جرم یک اتم هیدروژن است؟  $10^{-24} \times 100 = 10^{-22}$   $\Rightarrow \frac{10^{-22}}{10^{-24}} = 10^{-22} \times 10^{24} = 10^2 = 100$

۳- عددهای  $16^2$  و  $8^4$  و  $2^{11}$  را با یکدیگر مقایسه کنید.

$$8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$$

$$16^2 = (2^4)^2 = 2^8$$

برای مقایسه اعداد توان دار، در صورت امکان پایه ها را برابر می کنیم.

$$\Rightarrow 8^4 \otimes 2^{11} \otimes 16^2$$

۴- در جاهای خالی علامت  $<$ ،  $>$  یا  $=$  قرار دهید:

اگر توان منفی باشد، پایه را معکوس می کنیم

الف)  $3^{-1} \otimes 3^{-2}$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{9}$$

ب)  $2^0 \otimes 2^{-5}$

$$1 \quad \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

هر عدد (غیر صفر) به توان صفر برابر یک است.

ج)  $(0/5)^{-1} \otimes (0/6)^{-2}$

$$\frac{1}{0/5} = \frac{1}{0/25} = \frac{100}{25} \quad \frac{1}{0/6} = \frac{1}{0/36} = \frac{100}{36}$$

اگر صورت دو کسر برابر باشد کسری که مخرفش کوچک تر باشد آن کسر بزرگتر است.

د)  $5^{-1} \otimes 5^0$

$$\frac{1}{5}$$

ه)  $\left(\frac{-8}{15}\right)^0 \otimes 1$

و)  $-5^{-2} \otimes (-5)^{-2}$

$$-\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25} \quad \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$$

طرف چپ چون پراتنز ندارد فقط برای ۵ است.

۶۴

$$x + (-3) = 4$$

الف)  $5^x \times 5^{-2} = 5^4$

در ضرب اگر پایه مساوی باشد، توان ها را جمع می کنیم.

$$x = 4 + 3$$

$$x = 7$$

۵- در هر یک از تساوی های زیر  $x$  چه عددی است؟

ب)  $5^x \div 5^{-2} = 5^4$

$$x - (-3) = 4 \quad x + 3 = 4 \quad x = 4 - 3$$

در تقسیم اگر پایه مساوی باشد، توان ها را از آنها می کنیم.

$$x = 1$$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

ه)  $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 4$

$$1 + 3 = 4$$



و)  $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$

در ضرب اگر توان مساوی باشد، پایه ها را ضرب می کنیم و یکی از توانها را می نویسیم.



ز)  $6^{-2} = -\frac{2}{6}$

$$\frac{1}{6^2}$$

اگر توان منفی باشد، پایه را معکوس می کنیم



ح)  $3^{-1} < 3^{-1}$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$$



الف)  $a^7 \times a^0 = a^{7^0} = a^9$

در ضرب اگر پایه مساوی باشد، توان ها را جمع می کنیم و یکی از پایه ها را می نویسیم.



ب)  $a^7 \times a^0 = a^7$

اگر عدد توان دار داخل پراتنز باشد و توان دیگر داشته باشد توان ها ضرب را می کنیم.



ج)  $(a^m)^n = (a^n)^m \quad a > 0$

$$a^{nm} = a^{mn}$$



د)  $3^{-2} = -9 \quad \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

۶۴

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times 7^{-3} = 3^{10} \times 7^{-3} = 3^{10} \times 3^{-9} = 3$  ب)  $(0/2)^{-2} \times 25^{-2} = 0/2^{-4} \times 5^{-4} = 5^{-4} = 1^{-4} = 1$

$$(5^2)^{-2} = 5^{-4}$$

$$= 1^{-4} = 1$$

$$\left(\frac{14}{15}\right)^4$$

ج)  $\left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^4 = \left(\frac{14}{15} \times \frac{45}{28}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

د)  $(-5^{-2})^{-1} = -5^2$

اگر عدد داخل پرانتز توان داشته باشد و به توان عدد دیگری برسد توان ها را ضرب می کنیم.

برای مقایسه این اعداد بهتر است مقدار آن ها را حساب کنیم.

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$   $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$   $(-2)^2 = 4$   $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$   $1^{-9} = 1$   $(-1)^{21} = -1$   $(-7)^2 = 49$   $-2^{-2} = -\frac{1}{4}$

$$(-1)^{21} < -2^{-4} < 5^{-3} < 2^{-3} < 1^{-9} < \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} < 2^3 < (-7)^2$$

۶۴

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(0/987)^{10} < 1^0$  ✓  $(1/2)^7 < (1/0.2)^7$  ✗  $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < (0/7)^2$  ✗  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 > (0/75)^2$  ✓

**اعداد بین ۰ و ۱ اگر به توان مثبت برسند کوچکتر می شوند.**

۱۰- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3}{-2^{-3}} = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 \times 2^3 = -\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{1}\right)^3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

ب)  $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} = -\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}$

اگر عدد اعشاری در توان های ۱۰ ضرب شود ممیز آن به تعداد صفر ها (توان ۱۰) به جلو جا به جا می شود.

اگر عدد اعشاری بر توان های ۱۰ تقسیم شود ممیز آن به تعداد صفر ها (توان ۱۰) به عقب جا به جا می شود.

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان های ۱۰ یا حاصل تقسیم آنها بر توان های ۱۰ خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می کند؟

| تقسیم بر        | ضرب در          | تقسیم بر        | ضرب در          | تقسیم بر | ضرب در | تقسیم بر | ضرب در | تقسیم بر | ضرب در | عدد   |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|-------|
| ۱۰ <sup>۵</sup> | ۱۰ <sup>۵</sup> | ۱۰ <sup>۴</sup> | ۱۰ <sup>۴</sup> | ۱۰۰۰     | ۱۰۰۰   | ۱۰۰      | ۱۰۰    | ۱۰       | ۱۰     |       |
| ۰/۰۰۰۱۵         | ۱۵۰۰۰۰          | ۰/۰۰۱۵          | ۱۵۰۰۰           | ۰/۰۱۵    | ۱۵۰۰   | ۰/۱۵     | ۱۵۰    | ۱/۵      | ۱۵۰    | ۱۵    |
| ۰/۰۰۰۰۰۰۲       | ۲۰۰۰۰۰۰۰        | ۰/۰۰۰۰۰۰۲       | ۲۰۰۰۰۰۰         | ۰/۰۰۰۰۰۲ | ۲۰۰۰۰  | ۰/۰۰۰۰۲  | ۲۰۰۰   | ۰/۰۰۰۲   | ۰/۰۰۲  | ۰/۰۰۲ |
| ۰/۰۰۰۰۰۰۹۳      | ۹۳۰۰۰۰۰۰        | ۰/۰۰۰۰۰۹۳       | ۹۳۰۰۰۰          | ۰/۰۰۰۹۳  | ۹۳۰۰   | ۰/۰۰۹۳   | ۹۳۰    | ۰/۹۳     | ۹۳     | ۹/۳   |

۲- سرعت نور ۳۰۰،۰۰۰،۰۰۰ متر بر ثانیه است. فاصله ای که نور در ۱۰۰ ساعت می پیماید، چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که حل چگونه به دست آمده است.

فاصله ای که نور در ۱۰۰ ساعت می پیماید  $300000000 \times 360000 =$  ثانیه  $3600 = 1$  ساعت  
 ثانیه  $360000 = 100$  ساعت

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد ۱۰ نمایش می دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می گویند، بنابراین:

$$300000000 = 3 \times 10^8 \Rightarrow 3 \times 10^8 \times 360000 = 360000000000 = 36 \times 10^{10}$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است.

این گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان تر می کند و در ضمن نوعی نظم و

هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می آید.

$$۱۲۴۰۰۰ = ۱/۲۴ \times ۱۰^۵$$

$$۱۷۰۰۰۰۰۰۰ = ۱/۷ \times ۱۰^۹$$

$$۱۳۹۳ = ۱/۳۹۳ \times ۱۰^۳$$

$$۹۲۰۴۰۰۰ = ۹/۲۰۴ \times ۱۰^۶$$

$$۱۲۵/۳۹ = ۱/۲۵۳۹ \times ۱۰^۲$$

قطر متوسط یک سلول گلوبول قرمز  $۷/۰۰۰۰۰۰$  میلیمتر است. همانند عددهای بزرگ، عددهای کوچک مانند  $۷/۰۰۰۰۰۰$  را هم می‌توان به صورت نماد علمی نمایش داد؛ یعنی:  $۷/۰۰۰۰۰۰ = ۷ \times ۱۰^{-۶}$

ضخامت یک برگه کاغذ حدود  $۰/۰۰۱۶$  سانتیمتر است که با نماد علمی، آن را به صورت  $۱/۶ \times ۱۰^{-۲}$  نمایش می‌دهیم.

به‌طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت  $a \times ۱۰^n$  است که در آن  $۱ \leq a < ۱۰$  و  $n$  عددی صحیح است.

مثال:

$$۰/۰۰۰۰۰۱۲۷۵ = ۱/۲۷۵ \times ۱۰^{-۵}$$

$$۱۲۳ = ۱/۲۳ \times ۱۰^۲$$

$$۰/۰۱۳۷ = ۱/۳۷ \times ۱۰^{-۲}$$

$$۲۹۰۰۰ = ۲/۹ \times ۱۰^۴$$

۱- هریک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید:

$$۲۴۵۰۰۰ = ۲/۴۵ \times ۱۰^۵$$

$$۱۵۰۰۰۰۰۰۰ = ۱/۵ \times ۱۰^۸$$

$$۰/۰۰۰۵ = ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

$$۰/۰۰۰۰۶۱ = ۶/۱ \times ۱۰^{-۵}$$

$$۱۴۰۴ = ۱/۴۰۴ \times ۱۰^{-۳}$$

$$۰/۱۲۷۵ = ۱/۲۷۵ \times ۱۰^{-۱}$$

۲- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید: اگر توان ۱۰ منفی باشد ممیز را به عقب و اگر مثبت باشد ممیز را به جلو می‌بریم

$$۵/۲ \times ۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۵۲$$

$$۷/۳۰۴ \times ۱۰^{-۵} = ۰/۰۰۰۰۷۳۰۴$$

$$۲/۲۸ \times ۱۰^۸ = ۲۲۸۰۰۰۰۰۰$$

$$۹/۴۶۱۲ \times ۱۰^۹ = ۹۴۶۱۲۰۰۰۰۰۰$$

$$۶/۰۲ \times ۱۰^{-۲} = ۰/۰۰۶۰۲$$

$$۱/۱ \times ۱۰^۴ = ۱۱۰۰۰$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف)  $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}} = \frac{3^{-5} \times 25}{6^{-5}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \times 25$   
 $= 2^5 \times 25 = 32 \times 25 = 800$

ب)  $\frac{1^{-1} \times 4^2}{2^{-2} \times \frac{1}{8}} = \frac{1 \times 4^2}{2^{-2} \times \frac{1}{8}} = 4^2 \times 2^4 = 2^4 \times 2^4 = 2^8$

✗  $1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$  (رقم ۵)

✓ کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟  
 $5/9 \times 10^{-1} = 0.59$

✓  $4/3 \times 10^2 = 4300$  (رقم ۳)

✗  $7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$  (رقم ۲)

✓  $6/18 \times 10^7 = 61800000$  (رقم ۷)

✓  $82570 \times 10^4 = 825700000$  (رقم ۴)

۳- شعاع خورشید تقریباً ۶۹۵۰۰۰ کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید

$695000 = 6/95 \times 10^5$  (رقم ۵)

۴- اندازه یک باکتری ۰.۰۰۰۰۰۰۵ متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

$0.0000005 = 5 \times 10^{-7}$  (رقم ۷)

۵- قطر خورشید حدود  $1/4 \times 10^9$  متر و قطر زمین حدود  $1/3 \times 10^7$  متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

$\frac{1/4 \times 10^9}{1/3 \times 10^7} = 1/0.77 \times 10^2$

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید :

$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9 = 8 \times 10^2$

$\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-11}} = 0.5 \times 10^{15} = 5 \times 10^{14}$

















٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

٩٨

ریشه‌های دوم عدد  $\frac{4}{9}$ ، اعداد  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  هستند. ریشه‌های دوم ۷، عددهای  $\sqrt{7}$  و  $-\sqrt{7}$  هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم  $\sqrt{0} = 0$ .

به طور کلی اگر  $b$  یک عدد حقیقی مثبت باشد،  $\sqrt{b}$  و  $-\sqrt{b}$  را ریشه‌های دوم  $b$  می‌نامند. همان طور که می‌دانید عددهای منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

|                        |   |    |    |     |    |                 |                |     |                 |   |
|------------------------|---|----|----|-----|----|-----------------|----------------|-----|-----------------|---|
| عدد                    | ۲ | -۲ | ۳  | -۳  | ۴  | $\frac{1}{5}$   | $-\frac{1}{2}$ | ۵   | $-\frac{2}{3}$  | ۰ |
| مکعب عدد<br>(توان سوم) | ۸ | -۸ | ۲۷ | -۲۷ | ۶۴ | $\frac{1}{125}$ | $-\frac{1}{8}$ | ۱۲۵ | $-\frac{8}{27}$ | ۰ |

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی  $2^3 = 8$ . ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می‌شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{8} = 2$ . همچنین چون  $(-2)^3 = -8$  ریشه سوم عدد -۸ برابر -۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{-8} = -2$ ؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر ۴... و ریشه سوم عدد  $-\frac{8}{27}$  عدد  $-\frac{2}{3}$ ... است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید:

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \quad (\sqrt[3]{8})^3 = 8$$

به طور کلی اگر  $b$  یک عدد حقیقی مثبت باشد، ریشه سوم آن را با  $\sqrt[3]{b}$  نمایش می‌دهیم. هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید: یادآوری: هر رادیکال به توان ۲ مساوی مقدار مثبت (قدر مطلق) زیر رادیکال است.

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{4^2} = 4$$

$$\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4 \quad \sqrt{-1} = -1$$

یادآوری: ریشه سوم هر عدد به توان ۳ مساوی همان عدد است.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt[3]{6^3} = 6$$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10}$$

$$\sqrt[3]{(-7)^3} = -7$$

۲- به کمک رابطه  $\sqrt{x^2} = |x|$ ، که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$$

$$\sqrt{8^2} = 8$$

$$\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$$

$\sqrt{2}$  از ۱ بزرگ‌تر است

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \quad \text{منفی}$$

$$\sqrt{(2-9)^2} = \sqrt{(-7)^2} = |-7| = -7$$

$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \left|1-\frac{1}{3}\right| = 1-\frac{1}{3} \quad \text{مثبت}$$

۳- حاصل عبارت  $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$  را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها حل شده است.

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x + y$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x + y$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x - y$$

(الف)  $x$  و  $y$  هر دو مثبت هستند  $(x > 0, y > 0)$ .

$$|x| = x$$

$$|y| = y$$

(ب)  $x$  مثبت و  $y$  منفی است  $(x > 0, y < 0)$ .

$$|x| = x$$

$$|y| = -y$$

(ج)  $x$  منفی و  $y$  مثبت است  $(x < 0, y > 0)$ .

$$|x| = -x$$

$$|y| = y$$

(د)  $x$  و  $y$  هر دو منفی هستند  $(x < 0, y < 0)$ .

$$|x| = -x$$

$$|y| = -y$$

## ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت  $a$  و  $b$  رابطه‌های زیر را یاد گرفتید :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرار است :

### فعالیت

با توجه به عددهای داده شده  $a$  و  $b$  جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟

| $a$ | $\sqrt[3]{a}$ | $b$           | $\sqrt[3]{b}$ | $ab$                                   | $\sqrt[3]{ab}$ | $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$     |
|-----|---------------|---------------|---------------|----------------------------------------|----------------|--------------------------------------|
| ۸   | ۲             | ۱۲۵           | ۵             | ۱۰۰۰                                   | ۱۰             | $2 \times 5 = 10$                    |
| ۲۷  | ۳             | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $27 \times \frac{1}{8} = \frac{27}{8}$ | $\frac{3}{2}$  | $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ |
| -۸  | -۲            | ۲۷            | ۳             | $-8 \times 27 = -216$                  | -۶             | $-2 \times 3 = -6$                   |

به طور کلی برای هر دو عدد  $a$  و  $b$  داریم :  $\sqrt[3]{ba} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$  ، همچنین اگر

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad b \neq 0 \text{ داریم:}$$

### کار در کلاس

$$2+3 \quad \sqrt[3]{35} \approx 3/3$$

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8+27}$$

$$5 \neq 3/3$$

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید. **خیر**

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.  
«سمت چپ تساوی برابر ۵ می‌باشد، در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است.»

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$3\sqrt[3]{-2} \times 5\sqrt[3]{4} = 15\sqrt[3]{-8} = 15 \times (-2) = -30$$

ابتدا عددهای ضرب (۳ و ۵) را ضرب می‌کنیم  
و سپس ریشه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{5}$$

برای ساده کردن ریشه‌ها باید عددها را طوری تجزیه کنیم، که حداقل ریشه یک قسمت از ضرب

مربع یا مکعب کامل باشد و آن را حفظ باشیم. مثال  $5 \times 4 = 20$  یا  $64 \times 2 = 128$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

هر عدد مثبت دو ریشه دوم دارد.

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

| عدد             | ریشه‌های دوم                   |
|-----------------|--------------------------------|
| $\frac{49}{16}$ | $\frac{7}{4}$ و $-\frac{7}{4}$ |
| $\frac{1}{9}$   | $\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{3}$ |
| ۱۵              | $\sqrt{15}$ و $-\sqrt{15}$     |
| ۱۴۴             | ۱۲ و -۱۲                       |
| ۱۲              | $\sqrt{12}$ و $-\sqrt{12}$     |
| ۱۸              | $\sqrt{18}$ و $-\sqrt{18}$     |

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

| عدد               | ریشه سوم       |
|-------------------|----------------|
| ۲۱۶               | ۶              |
| $7^3$             | ۷              |
| -۵                | $\sqrt[3]{-5}$ |
| $-\frac{216}{64}$ | $-\frac{6}{4}$ |
| ۱۰                | $\sqrt[3]{10}$ |

هر عدد مثبت یا منفی فقط یک ریشه سوم دارد.

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$\sqrt{(-1)^2} = -1$  ❌  $\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$  ✓  $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$  ✓  $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$  ✓  
**چون رادیکال داخل پرانتز است اولویت با جذر است ولی اعداد منفی جذر ندارند.**  
 $-\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$  ✓  $\sqrt{1/44} = 1/2$  ✓  $(\sqrt{-1})^2 = 1$  ❌  $\sqrt[3]{-64} = -4$  ✓

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$\sqrt[3]{125} \times \sqrt{36}$  → ۳  
 $\sqrt[3]{-1} \times \sqrt{81}$  → ۳۰  
 $\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$  → ۹  
 $\sqrt[3]{27}$  → ۳  
 $\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$  → -۵  
 $\sqrt[3]{-125}$  → -۵

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست باشد :

$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4}$   $\sqrt[3]{a} < 2$   
 چون ریشه سوم ۸ برابر ۲ است هر عدد کمتر از ۸ رami توان به جای a قرارداد.

۴، ۵، ۶، ۷، ...

۶- رابطه  $\sqrt{(-x)^2} = x$  به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.  
 به شرطی که  $0 \leq x$  باشد  $|(-x)| = x$ .  
 $\sqrt{(-8)^2} = 8$

۷- اگر مساحت کل یک مکعب  $96a^2$  باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

مکعب مربع ۶ وجه مربع شکل یکسان دارد.

حجم مکعب  $(4a)^3 = 64a^3$   
 $\sqrt{16a^2} = 4a$   
 $96a^2 \div 6 = 16a^2$

اندازه یک ضلع مکعب مساحت یک وجه مکعب

دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

۷۲

۸- اگر  $x > 0$  و  $y < 0$  باشد، حاصل  $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$  را ساده کنید و بدون قدر مطلق بنویسید.

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = x - (-y) = x + y \quad |y| = -y \quad |x| = x$$

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید:  $\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

برای ساده کردن ریشه‌ها باید عددها را طوری تجزیه کنیم که حداقل ریشه یک قسمت از ضرب مربع یا مکعب کامل باشد و آن را

حفظ باشیم. مثال  $5 \times 4 = 20$  یا  $64 \times 2 = 128$

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \times 6} = 5\sqrt{6}$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

$$150 = 5^2 \times 2 \times 3$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{125^2} = (\sqrt[3]{-125})^2 = (-5)^2 = 25$$

ابتدا ریشه سوم را حساب می‌کنیم و بعد به توان ۲ می‌رسانیم

۷۲

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2 \quad \checkmark$$

✗

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4} \quad \checkmark$$

اعداد منفی ریشه سوم دارند، و ترتیب اولویت توان و ریشه یکی است.

ابتدا عددهای ضریب (۲ و ۳) را ضرب می‌کنیم و سپس ریشه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

۱۱- حاصل را به دست آورید:

$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} = 6\sqrt[3]{64} = 6 \times 4 = 24$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{\frac{60}{5}} = \sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{216} = 6$$

## فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن  $2\sqrt{6}$  متر است. می خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.

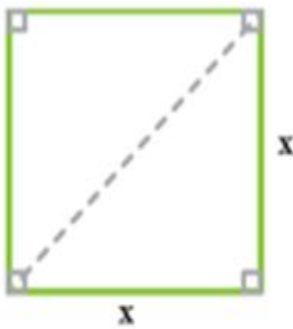
حل: به کمک رابطه **فیثاغورس** داریم:  $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه:  $2x^2 = 24$  و از آنجا  $x^2 = 12$

بنابراین **مساحت** — این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می توان نتیجه گرفت که **ضلع** — مربع  $\sqrt{12}$  متر یا  $2\sqrt{3}$  متر است.

همچنین: متر  $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$  — **محیط** مربع



اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می توان آنها

را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت  $3\sqrt{2}$  و  $7\sqrt{2}$  دارای قسمت های رادیکالی

یکسان هستند و داریم:  $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$  و  $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت های رادیکالی عبارات  $2\sqrt{5}$  و  $\sqrt{2}$  یا عبارات  $7\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  یکسان نیستند.

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$1+6=7$   
 $1+4=5$   
 $2-7=-5$   
 $3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}$   
 $2-7=-5$   
 $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$   
 $-2-\frac{2}{3}=-\frac{8}{3}$

|                        |                                |                                            |                                 |                        |                               |
|------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------|------------------------|-------------------------------|
| $3\sqrt{7}$            | $\frac{3}{2}\sqrt{2}$          | $\frac{\sqrt{5}}{2}$                       | $3\sqrt{a}$                     | $\sqrt{xy}$            | $\sqrt{2}$                    |
| $-4\sqrt{5}$           | $\sqrt{2}$                     | $2\sqrt{5}$                                | $2\sqrt{b}$                     | $2\sqrt{x}$            | $\sqrt{3}$                    |
| $8\sqrt{7}$            | $8\sqrt{2}$                    | $-\frac{2}{3}\sqrt{10}$                    | $-\frac{1}{5}\sqrt{a}$          | $-7\sqrt{x}$           | $\sqrt{5}$                    |
| $2\sqrt{5}$            | $-5\sqrt{2}$                   | $-2\sqrt{10}$                              | $-7\sqrt{b}$                    | $4\sqrt{xy}$           | $6\sqrt{2}$                   |
| $11\sqrt{7}-2\sqrt{5}$ | $\frac{9}{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{2}{3}\sqrt{10}$ | $\frac{1}{5}\sqrt{a}-5\sqrt{b}$ | $5\sqrt{xy}-5\sqrt{x}$ | $7\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ |

حاصل عبارات زیر را ساده کنید. راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:  
(جای‌های خالی را کامل کنید.)

الف)  $\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین:

ب)  $\sqrt{50} + \sqrt{24} + \sqrt{81} = \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{2^3 \times 3} + \sqrt{3^3 \times 3}$

$$= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$$

مثال ۱: حاصل  $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  را به دو روش به دست آورده ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

۷۴

الف)  $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2}$

$$= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6}$$

ب)  $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$

مثال ۲: حاصل  $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$  را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

چون  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$

۷۵

وقتی عدد زیر رادیکال ریشه دوم یا سوم صحیح ندارد آن عدد را به صورت ضرب دو عدد می نویسیم طوری که یکی از عددها ریشه دوم یا سوم صحیح داشته باشد.

کار در کلاس

حاصل عبارت های زیر را ساده کنید.

$\sqrt{49 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} + \sqrt{64 \times 2}$   
۱)  $\sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$   
 $= 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

$\sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3}$   
۲)  $\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$   
 $= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0$

$5^3\sqrt{2} + 3^3\sqrt{27 \times 2} - 4^3\sqrt{64 \times 2}$   
۳)  $5\sqrt{2} + 3\sqrt{54} - 4\sqrt{128}$   
 $5\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

۴)  $\sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{324 + 1 + 36}{81}} = \sqrt{\frac{361}{81}} = \frac{19}{9}$

۵)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

$$= 6 - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 3 = 9 + 2\sqrt{6}$$

$3 \times \sqrt{2}^2 = 2 \times 3 = 6$      $\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$

$\sqrt{2} \times (-\sqrt{3}) = -\sqrt{6}$      $\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -3$

# گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا آسان تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به طور مثال برای محاسبه  $\frac{20}{\sqrt{2}}$  باید عدد ۲۰ را بر  $\sqrt{2}$  تقسیم کنیم در حالی که می توانیم مخرج کسر را به صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

## فعالیت

اگر مخرج ریشه دوم داشت باید صورت و مخرج را در همان ریشه دوم ضرب کنیم تا رادیکال

مخرج بر داشته شود.

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل

را کامل کنید.

الف)  $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

ب)  $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$

توان ۲ چون باید جمع آن با ۱ مساوی ۳ ریشه یعنی ۳ شود

ج)  $\frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$

د)  $\frac{2\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{14}}{2} = \sqrt[3]{14}$

توان ۱ چون باید جمع آن با ۲ مساوی ۳ ریشه یعنی ۳ شود

هـ)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x} \quad (x > 0)$

و)  $\frac{5}{\sqrt[3]{z^2}} \times \frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{5\sqrt[3]{z}}{z} \quad (z \neq 0)$

اگر مخرج ریشه سوم داشت باید صورت و مخرج را در همان ریشه سوم ضرب کنیم ولی توان زیر رادیکال طوری باشد که با جمع آن بتوان

قبلی زیر رادیکال ۳ شود. تا رادیکال مخرج بر داشته شود.

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{6\sqrt[3]{2^2}}{2} = 3\sqrt[3]{2^2}$       ب)  $\frac{2}{\sqrt{32}} \times \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}} = \frac{2\sqrt{32}}{32} = \frac{\sqrt{32}}{16}$

مساوی ریشه یعنی ۳ شود

چون باید جمع آن با ۱

توان ۲

اگر مخرج ریشه سوم داشت باید صورت و مخرج را در همان ریشه سوم ضرب کنیم ولی توان زیر رادیکال طوری باشد که با جمع آن با توان قبلی زیر رادیکال ۳ شود. تا رادیکال مخرج بر داشته شود.

ج)  $\frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$       د)  $\frac{5}{\sqrt[3]{3x}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2x^2}}{\sqrt[3]{3^2x^2}} = \frac{5\sqrt[3]{9x^2}}{3x} \quad (x \neq 0)$

وقتی عدد زیر رادیکال ریشه دوم یا سوم صحیح ندارد آن عدد را به صورت ضرب دو عدد می نویسیم طوری که یکی از عددها ریشه دوم یا سوم داشته باشد.

تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف)  $2\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} + 2\sqrt{36 \times 2}$   
 $10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$

ج)  $\sqrt[3]{27^2} = 3^2 = 9$

ب)  $\sqrt{4 \times 2} + \sqrt{64 \times 2} - \sqrt{25 \times 2}$   
 $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

د)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}} = -\frac{3}{4}$

$\sqrt{2} \times \sqrt{10} = \sqrt{20} \quad \sqrt{2}^2 = 2$

بین دو پرانتز ضرب پنهان وجود دارد. هر جمله از پرانتز

اول را در همه جمله‌های پرانتز دوم ضرب می‌کنیم.

ه)  $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{20} + 2 - \sqrt{50} - \sqrt{10}$

$(-\sqrt{5}) \times \sqrt{10} = -\sqrt{50} \quad (-\sqrt{5}) \times \sqrt{2} = -\sqrt{10}$

و)  $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} = 2\sqrt{16 \times 3} - 3\sqrt{9 \times 3} = 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

۷۶

۲- اگر  $x < 0$  باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

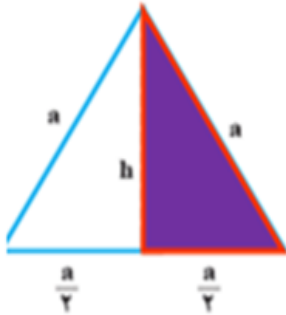
$$2\sqrt{x^2} - x = 2|x| - x = -2x - x = -3x$$

$$|x| = -x$$

۳- محیط و مساحت مربعی به طول ضلع  $3\sqrt{5}$  سانتیمتر را به دست

آورید **محیط مربع**  $4 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$  **مساحت مربع**  $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع  $a$  نشان می دهد. اندازه ارتفاع  $h$  را بر حسب  $a$  به دست آورید؛ سپس مساحت آن را بر حسب  $a$  بنویسید.



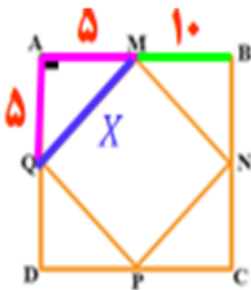
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4}{4}a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$s = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

**ارتفاع مثلث**  $\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

**مساحت مثلث**  $\frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{فایده} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۷۶



۵- نقاط  $M, N, P, Q$  وسط های اضلاع مربع  $ABCD$  هستند. اگر

مساحت مربع  $ABCD$ ،  $100$  مترمربع باشد، محیط مربع  $MNPQ$  چقدر است؟

$$X^2 = 5^2 + 5^2 \quad X^2 = 25 + 25 = 50 \quad X = \sqrt{50} = 2\sqrt{5}$$

رابطه فیثاغورس در مثلث  $AMQ$ ؛ چون اندازه وتر را می خواهیم باید توان دوم وتر و ضلع دیگر را با هم جمع کنیم و جذر بگیریم.

$$4 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

**محیط مربع MNPQ**

**ضلع مربع ABCD**

۶- در جاهای خالی علامت  $<$  یا  $=$  یا  $>$  بگذارید :

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} > \sqrt{5+4}$$

$$\approx 2/2 + 2 = 4/2 \quad \sqrt{9} = 3$$

$$4 > \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3/6$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \ominus \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \ominus 5$$

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

۷۷

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید :

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$2\sqrt{9} = 6 \quad \text{ج)}$$

$$\sqrt{100} = 10 \quad \text{الف)}$$

$$\frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3$$

$$\frac{2^{-5}}{2^8} = \sqrt{64}$$

$$\sqrt{8} = 2 \quad \text{د)}$$

در ضرب وقتی پایه ها مساوی باشد  
توان ها را جمع می کنیم.

$$\frac{m^6 \times m^{-2}}{m^3} = m$$

$$4 - x = 1 \quad \text{در تقسیم وقتی پایه ها مساوی باشد توان ها را منها می کنیم.}$$

$$x = 3$$

$$x = -8 \quad \text{در تقسیم وقتی پایه ها مساوی باشد توان ها را منها می کنیم.}$$

$$1 - 2 = -1$$

$$9\sqrt{-27} = \frac{12^3}{(-4)^3}$$

$$9 \times (-3) = -27$$

$$-27 = (-3)^3$$

در تقسیم وقتی توان ها مساوی باشد پایه ها را  
تقسیم می کنیم.

۸- مخرج کسرها را گویا کنید.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2\sqrt[3]{a}}{a}$$

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

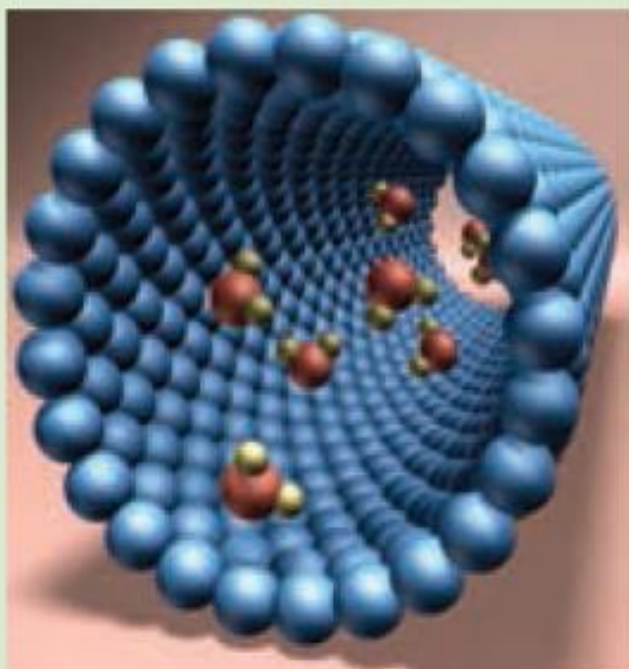
۹- آیا تساوی  $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$  همیشه درست است؟ توضیح دهید.

در صورتی که  $x$  منفی باشد  $\sqrt{x}$  بی معنی  
است، چون اعداد منفی جذر ندارند.  
مثال  $\sqrt{-7}$  بی معنی است.

الف) تساوی همیشه درست است.

ب) تساوی همیشه نادرست است.

ج) اگر  $x \geq 0$ ، تساوی درست است.



فناوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر  $10^{-9}$  متر یعنی صدهزار برابر از قطر موی سر انسان کوچک‌تر است. کشور عزیز ما ایران بین ده کشور برتر در حوزه فناوری نانو قرار دارد.