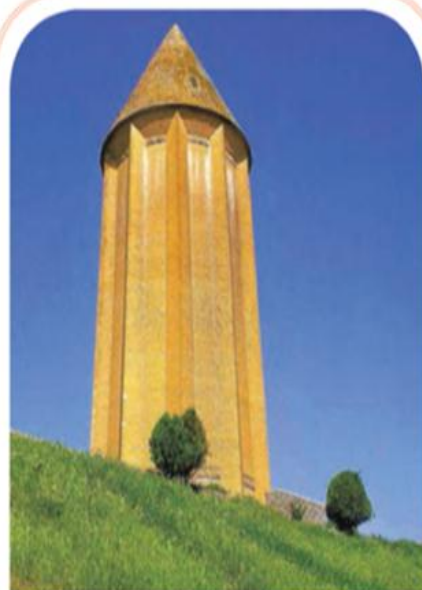




گنبد قابوس بنایی تاریخی از سده چهارم هجری است که در شهر گنبد کاووس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است ۵۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بدنه استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شهاب‌ساز این قوسل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شود.

ریاضی : نهم

فصل هشتم: حجم و مساحت

صفحه: ۱۳۰ تا ۱۳۴

تهیه کننده: احمد فرخ وند

درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شدند: منشوری، کره و هرمی.

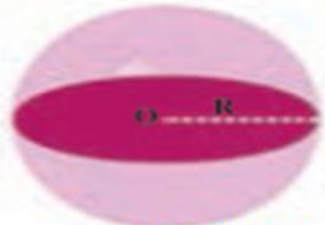


کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کره‌ای است. چند نمونه دیگر از حجم‌های

کره‌ای را نام ببرید. **توپ فوتبال - باب - ساچمه‌ها - کره ماه**

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید :

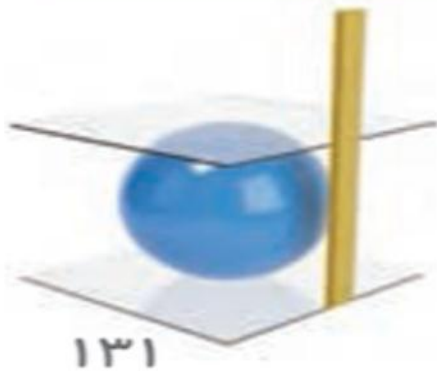
دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.



با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.

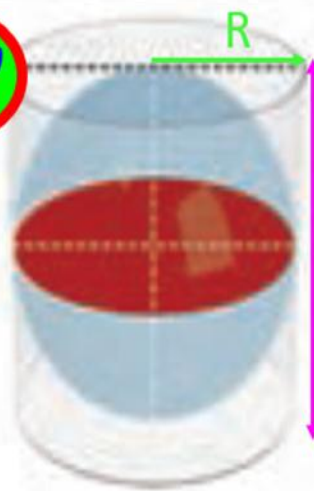
همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان فضا به نام

کره مجموعه **نقاطی** از فضا است که **شعاع کره** می‌گوییم. به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه **شعاع کره** می‌گوییم.



۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

- یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.
- مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر کره را اندازه بگیرید.



● مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

$2R$: ارتفاع استوانه

R : شعاع قاعده استوانه

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

۱۳۲



● توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را بپرسید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود با دو نیم کره، فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.

الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟ **۳ برابر**

ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟ **۱/۵ برابر**

ج) بنابراین حجم کره $\frac{2}{3}$ برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

$$\text{حجم کره} = \frac{2}{3} \times \text{حجم استوانه} = \frac{2}{3} \times \pi R^2 \times R = \frac{2}{3} \pi R^3$$

حجم کره‌ای به شعاع R از دستور $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ به دست می‌آید.

کار در کلاس

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتیمتر محاط شده است.



الف) حجم کره را به دست آورید.

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{14} \times 5^3 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{14} \times 125 = \frac{1570}{3} = 523\frac{1}{3}$$



ب) حجم استوانه را به دست آورید.

$$\text{حجم استوانه} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = (5 \times 5 \times \frac{3}{14}) \times 10 = \frac{5}{78} \times 10 = 785$$



ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

$$\text{حجم فضای بین کره و استوانه} = 785 - 523\frac{1}{3} = 261\frac{2}{3}$$



۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را به دست آورید.

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{14} \times 10^3 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{14} \times 1000 = \frac{6280}{3} = 2093\frac{1}{3}$$

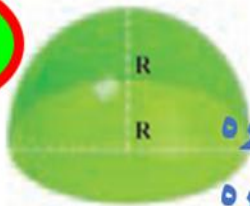


۱- مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بپوشاند.

این دو دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حدامکان، کاغذها روی هم قرار نگیرد و سطح نیم کره نیز دیده نشود!

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بپوشانید؟ **خیر**
در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید.

۲- ثابت می‌شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع R ، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).



الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با: $2\pi R^2 = \text{مساحت دایره} \times 2 = \text{مساحت نیم کره}$
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: $4\pi R^2 = \text{مساحت دایره} \times 4 = \text{مساحت کره}$

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با: $S = 4\pi R^2$

کاردرکلاس



۱- مساحت یک کلاه (عرق‌چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع 10 سانتیمتر را پیدا کنید.

$$2\pi R^2 = \text{مساحت دایره} \times 2 = \text{مساحت نیم کره} = 2 \times 3/14 \times 10 \times 10 = 628$$

۲- می‌خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع 10 سانتیمتر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت

رنگ شده را پیدا کنید. $3\pi R^2 = \text{مساحت دایره} \times 3 = \text{مساحت نیم کره چوبی توپر} = 3 \times 3/14 \times 10 \times 10 = 942$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق‌چین چه تفاوتی هست؟ **نیم کره چوبی قاعده هم دارد.**

۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

$$۱۲۸۰۰ = ۱/۲۸ \times ۱۰^۴ \quad \text{شعاع زمین (کیلومتر)} \quad ۱۲۸۰۰ \div ۲ = ۶۴۰۰ = ۶/۴ \times ۱۰^۴$$

ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید.

$$۱۲۸۰۰ \text{ متر} = ۱/۲۸ \times ۱۰^۴ \times ۱۰^۳ = ۱/۲۸ \times ۱۰^۷ \quad \text{شعاع زمین (متر)} \quad ۶/۴ \times ۱۰^۴ \times ۱۰^۳ = ۶/۴ \times ۱۰^۷$$

ج) مساحت تقریبی روبه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.

$$۵/۱۴ \times ۱۰^۸ = ۵۱۴ \times ۱۰^۶ = ۴ \times ۳/۱۴ \times (۶/۴ \times ۱۰^۳)^۲ = \text{مساحت تقریبی کره زمین (کیلومتر مربع)}$$

$$۵/۱۴ \times ۱۰^۸ = ۵۱۴ \times ۱۰^۶ = \text{مساحت تقریبی کره زمین (متر مربع)}$$

د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱/۶۴۸/۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت

ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

$$\text{مساحت ایران (کیلومتر)} \quad ۱۶۴۸۰۰۰۰ = ۱/۶۴۸ \times ۱۰^۶ \quad x = \frac{1/648 \times 10^6}{5/14 \times 10^8} = \frac{1/648}{5/14} = 0/32 = \text{درصد } ۳۲$$

۲- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک

استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده

کپسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر

حسب متر مکعب به دست آورید.

۱۳۴



قطر کره = قطر شعاع استوانه = ۰/۳ (متر)

ارتفاع استوانه (متر) = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷

$$v = sh \quad \text{حجم استوانه} \quad (3/14 \times 0/3 \times 0/3) \times 0/7 = 0/19782$$

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{2}{3} \times 3/14 \times 0/3^3 = \frac{0/16956}{3} = 0/05652$$

$$\begin{aligned} &+ 0/19782 \\ &+ 0/05652 \\ &= 0/25434 \end{aligned} \quad \text{حجم کپسول گاز}$$

اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم

رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم

رنگ نیاز داشته باشد.

$$۰/۵۶۵۲ = ۲ \times ۳/۱۴ \times ۰/۳^۲ = \text{مساحت نیم کره}$$

$$۰/۲۸۲۶ = ۰/۳ \times ۰/۳ \times ۳/۱۴ = \text{مساحت قاعده استوانه}$$

$$۱/۳۱۸۸ = (۰/۶ \times ۳/۱۴) \times ۰/۷ = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی استوانه}$$

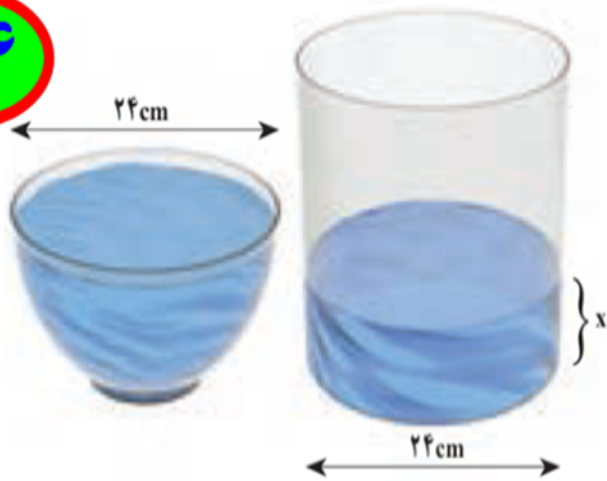
$$۲/۱۶۶۶ = ۰/۵۶۵۲ + ۱/۳۱۸۸ + ۰/۲۸۲۶ = \text{مساحت کل کپسول گاز (متر مربع)}$$

$$۱۰۰ \text{ گرم} = ۰/۱ \text{ کیلوگرم}$$

$$۰/۲۱۶۶۶ = ۲/۱۶۶۶ \times ۰/۱ = \text{رنگ مورد نیاز (کیلوگرم)}$$

دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار

۱۳۴



۳- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۴ سانتیمتر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

حجم استوانه $v = sh$ $= (3/14 \times 12 \times 12) \times x = 452/16 x$

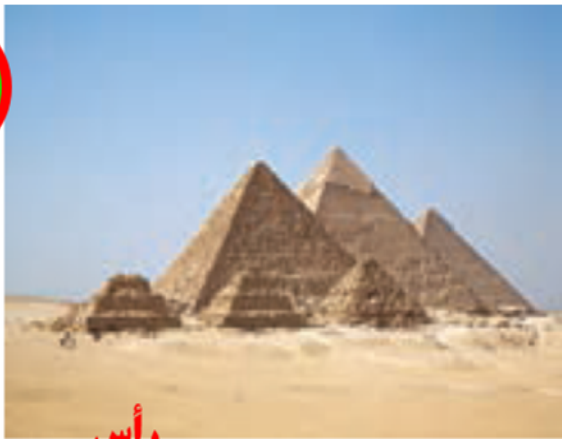
حجم نیم کره $= \frac{2}{3} \times 3/14 \times 12^3 = \frac{10851/84}{3} = 3617/28$

$\rightarrow 452/16 x = 3617/28$

ارتفاع آب (سانتی متر) $x = \frac{3617/28}{452/16} = 8$

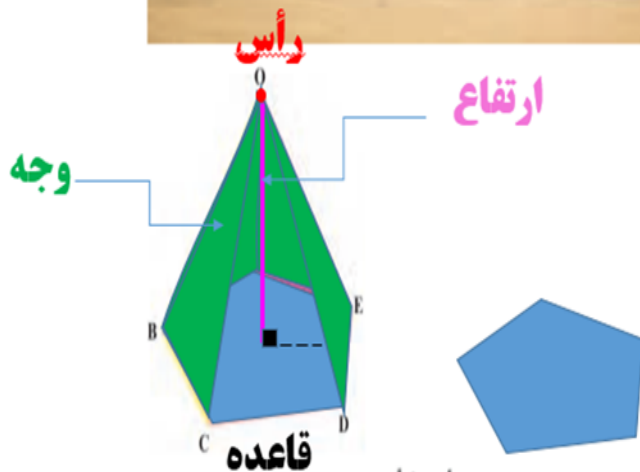
۱۳۴

۱۳۵



درس دوم: حجم هرم و مخروط

یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. نمونه دیگری از شکل‌های هرمی را نام ببرید. **درخت کاج - شیر پاکتی سه گوش - چادر مسافرتی**



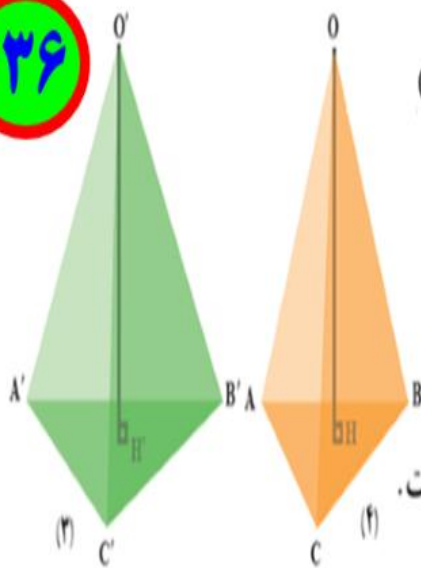
هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل، نام رأس: تعداد وجه‌ها: **مثلاً** شکل وجه‌ها: شکل قاعده: **ضلعی**. نام قاعده: **ضلعی**

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل، OH بر قاعده ABCDE عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری



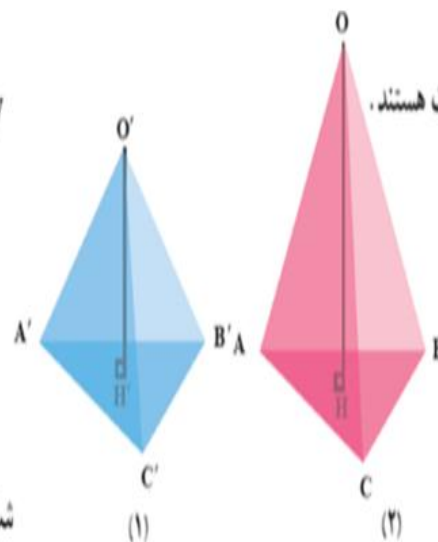
۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشد، هرم را منتظم می‌گوییم.
در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد.
در هرم منتظم مقابل، نام رأس: ارتفاع: OH.
شکل قاعده: مربع. شکل وجه‌های جانبی: مثلث. تعداد وجه‌ها: ۴.

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در



$$O'H' = OH \text{ و } S_{ABC} = S_{A'B'C'} \Rightarrow V = V$$

شکل‌های (۳) و (۴) ارتفاع‌ها برابر است.



$$O'H' < OH \Rightarrow V < V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقداری وابسته است؟ **ارتفاع و قاعده**

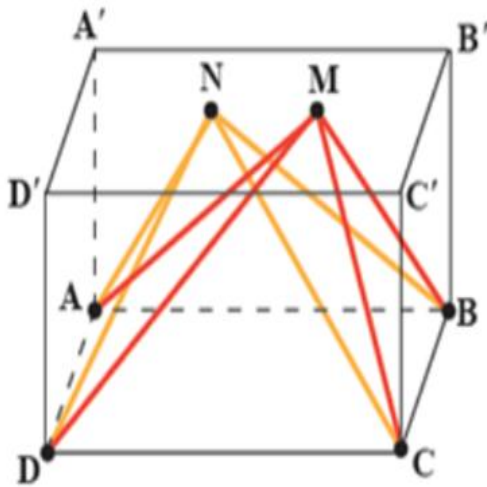
ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقداری استفاده می‌کردید؟ **ارتفاع و قاعده**

برای محاسبه حجم هرم چه حدسی می‌زنید؟ **ارتفاع و قاعده**

د) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، درباره حجم‌های

آنها چه می‌توانید بگویید؟ **حجم آن‌ها برابر است**

**اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند،
حجم‌های آن‌ها با هم برابر است.**



در شکل مقابل، $ABCD$ یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل $(A'B'C'D')$ است. چرا هرم های $MABCD$ و $NABCD$ دارای حجم های یکسان است؟

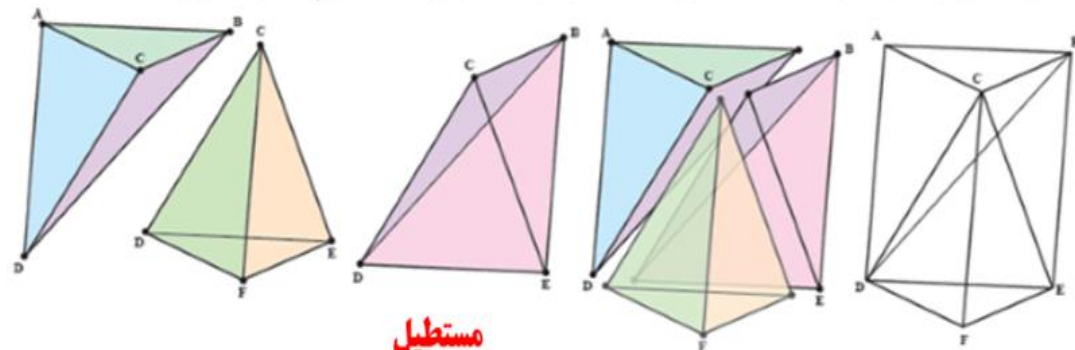
چون قاعده و ارتفاع آن ها برابر است.

به این ترتیب چند هرم می توان ساخت که با هرم های بالا حجم یکسان داشته باشند؟ **بی شمار**

فعالیت

محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشور با دو قاعده $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ را ملاحظه می کنید. نقطه C را به نقطه های E و D و نقطه B را به نقطه D وصل می کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.

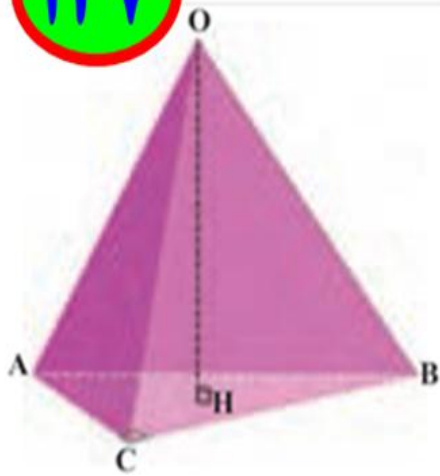


مستطیل

- ۱- چهار ضلعی $ABED$ ، چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا مثلث های ABD و BDE هم مساحتند؟
- ۲- چرا هرم های $CBED$ و $CBAD$ دارای حجم های برابر هستند؟ **چون قاعده و ارتفاع آن ها برابر است.**
- ۳- چرا مثلث های ABC و DEF هم مساحتند؟ **چون قاعده و ارتفاع آن ها برابر است.**
- ۴- چرا هرم های $CDEF$ و $DABC$ دارای حجم های برابر هستند؟ **چون قاعده و ارتفاع آن ها برابر است.**
- ۵- با توجه به پاسخ سؤال های ۲ و ۴ چه نتیجه ای می گیریم؟ **حجم هرم یک سوم حجم منشور است.**

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

حجم هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با:



در شکل مقابل هرم OABC دارای قاعده ABC است که در آن $AC = 6\text{cm}$ و $BC = 10\text{cm}$ و زاویه $\hat{ACB} = 90^\circ$ و ارتفاع OH و $OH \perp BC$ است. با کامل کردن عبارات زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{6 \times 10}{2} = 30\text{cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 30 \times 5 = 50\text{cm}^3$$

فعالیت

۱- در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه های جانبی آن همگی مثلث هایی متساوی الساقین و طول ساق های آنها 10cm و M وسط BC است.

الف) پاره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ **نیم ساز- میانه - ارتفاع است**

ب) مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ **قائم الزاویه است.**

ج) اگر طول ضلع قاعده، 12cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس

در مثلث OBM طول OM را حساب کنید. $OM = \sqrt{64} = 8$ $OM^2 = 10^2 - 6^2$ $100 - 36 = 64$

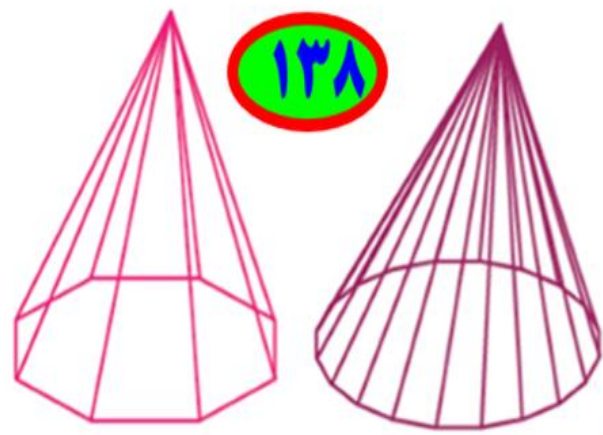
د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ **قائم الزاویه** طول MH چقدر است؟ **6cm**

ه) به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را

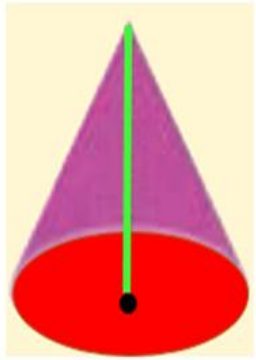
$$OH = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

به دست آورید.

$$V = \frac{1}{3} \times 144 \times 2\sqrt{7} = 96\sqrt{7}$$



۲- هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و حال تعداد ضلع های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می شود؟ **دایره** هرم به چه شکلی نزدیک می شود؟ **مخروط**



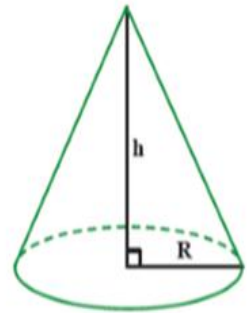
مخروط، شکلی شبیه هرم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

139

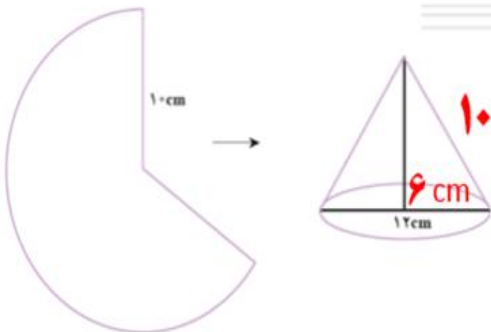
از اینجا نتیجه می شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می آید :

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

ارتفاع $\times$ (شعاع $\times$ شعاع $\times \pi$) $\times \frac{1}{3}$ = حجم مخروط



کار در کلاس



$$100 - 36 = 64$$

$$h^2 = 10^2 - 6^2$$

$$h = \sqrt{64} = 8$$

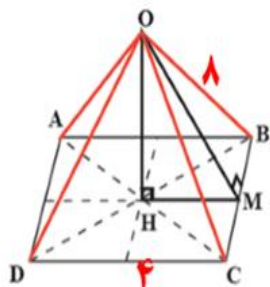
علی با قسمتی از دایره ای به شعاع ۱۰ cm مخروطی به قطر قاعده ۱۲ cm ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.

حجم مخروط $V = \frac{1}{3} \times (6 \times 6 \times \pi) \times 8 = 96\pi$

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر باشد.

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times (6 \times 5) \times 10 = \frac{300}{3} = 100$$

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴ cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی الساقینی به ساق‌های ۸ cm باشد.

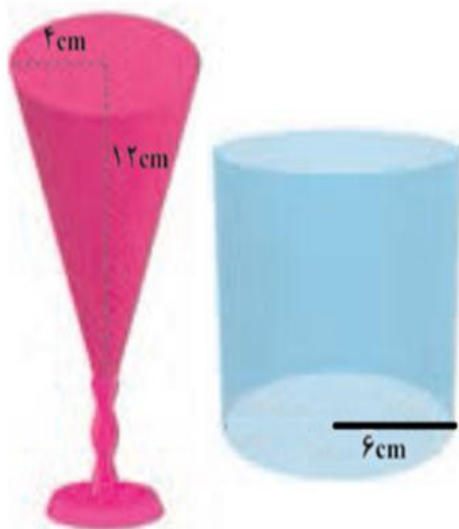


$$OM^2 = 8^2 - 4^2 \quad 64 - 16 = 48 \quad OM = \sqrt{48}$$

$$OH^2 = \sqrt{48}^2 - 2^2 \quad 48 - 4 = 44 \quad OH = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$\text{حجم هرم} \quad V = \frac{1}{3} \times 16 \times 2\sqrt{11} = \frac{32}{3} \sqrt{11}$$

۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶ cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

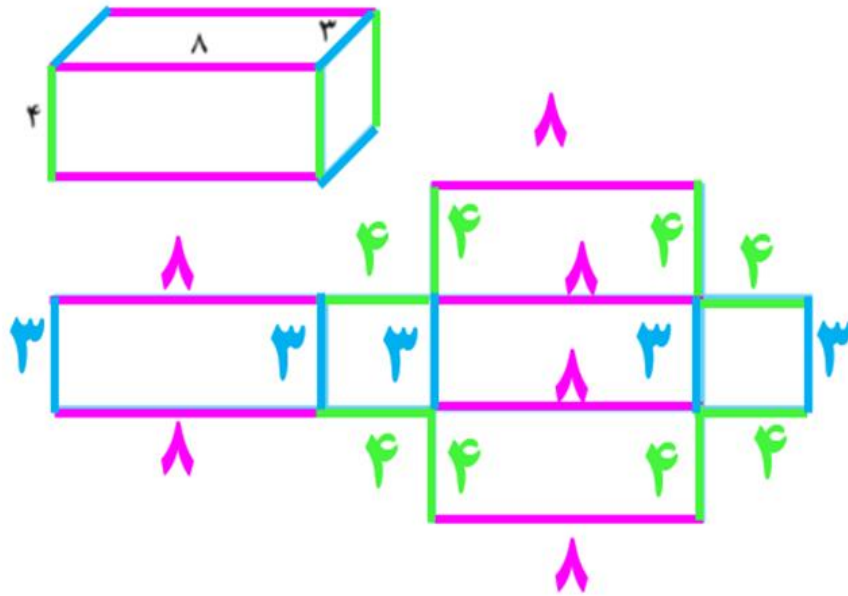
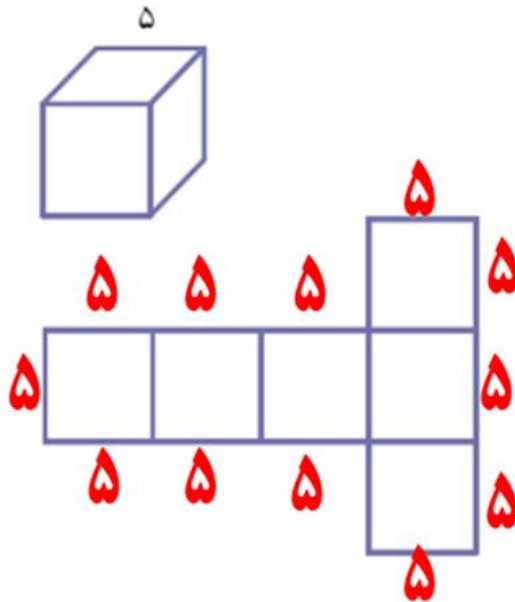


$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times (4 \times 4 \times \pi) \times 12 = 64\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = (6 \times 6 \times \pi) \times h$$

$$h = \frac{64\pi}{36\pi} = \frac{64}{36} = 1\frac{1}{9}$$

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام مشخص کنید.



۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

$$h^2 = 8^2 - 2^2$$

$$64 - 4 = 60$$

$$h = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$\text{مساحت کل} = 16 + \frac{2\sqrt{15} \times 4}{2} = 16 + 4\sqrt{15}$$

$$h^2 = 10^2 - 5^2$$

$$100 - 25 = 75$$

$$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت کل} = \frac{5\sqrt{3} \times 10}{2} = 25\sqrt{3}$$

۳- $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع

۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک

آن یک سطح مخروطی شکل درست

کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟

B چه رابطه‌ای بین طول کمان AB

و محیط دایره قاعده مخروط وجود

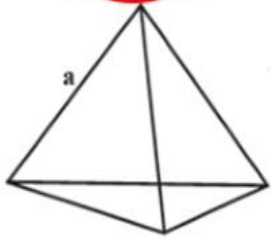
دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.

$$\text{طول A} = \frac{3}{4} \times 2 \times 10 \times \pi = 15\pi$$

$$15\pi = 2r\pi$$

$$r = \frac{15\pi}{2\pi} = 7.5$$

۱۴۱



۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همه یال های

آن a است.

مساحت کل هرم برابر مساحت ۴ مثلث متساوی الاضلاع

به ضلع a است

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\text{مساحت کل} = 4 \times \left(\frac{a \sqrt{3} \times a}{2} \right) = 2a^2 \sqrt{3}$$

۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده شش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم،

مساحت جانبی هرم برابر مساحت ۶ مثلث متساوی الساقین به ساق ۲۰ و قاعده ۱۰ است



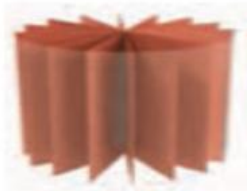
$$h^2 = 20^2 - 5^2$$

$$400 - 25 = 375$$

$$h = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$$

$$\text{مساحت کل} = 6 \times \left(\frac{5\sqrt{15} \times 10}{2} \right) = 150\sqrt{15}$$

فعالیت



۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی

به دست می آید؟

شعاع قاعده شکل حاصل :^۳ ارتفاع شکل حاصل :^{۱۰} حجم شکل حاصل را پیدا کنید.

$$V = (3 \times 3 \times \pi) \times 10 = 90\pi$$

حجم استوانه



۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل،

دوران دهیم، چه شکلی به دست می آید؟ حجم آن را پیدا کنید.

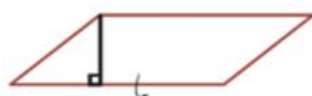
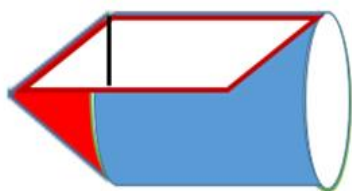
شعاع قاعده شکل حاصل :^۳ ارتفاع شکل حاصل :^{۱۰}

$$V = \frac{1}{3} \times (3 \times 3 \times \pi) \times 10 = 30\pi$$

حجم مخروط

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل

را توصیف کنید.



استوانه و مخروط



کره



کوزه



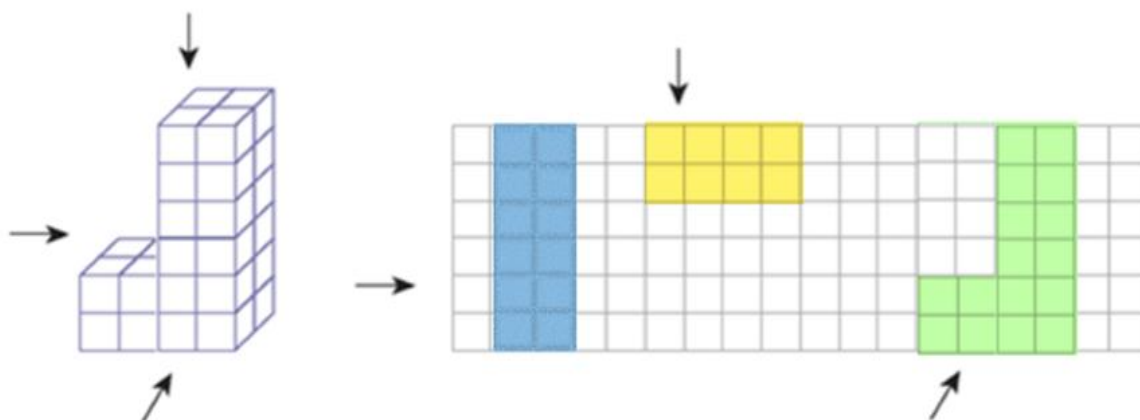
حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.

$$V = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times (5 \times 5 \times 5 \times \pi) = \frac{500}{3} \pi$$

حجم نیم کره

فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.



۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

ج) هرم منتظم با قاعده مثلث
مثلث متساوی الاضلاع

ب) هرم منتظم با قاعده مربع
مربع

الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی
۶ ضلعی



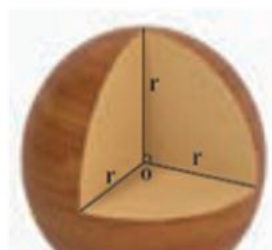
دایره

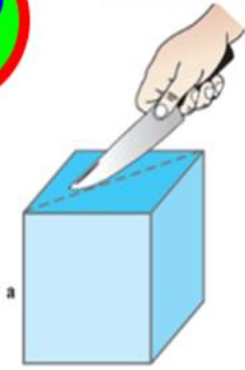
۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟
در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟

در صورتی که به ۲ نیم کره مساوی تقسیم شود.

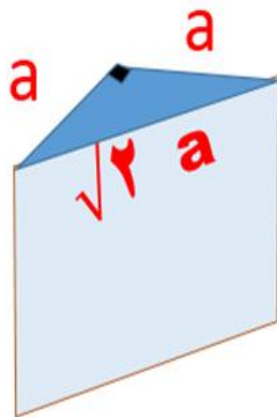
۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

از نیم کره بالا $\frac{1}{4}$ بریده شده است از کل شکل $\frac{1}{8}$





یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.



رابطه فیثاغورس

$$x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$x = \sqrt{2}a$$

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

مکعب به ضلع a

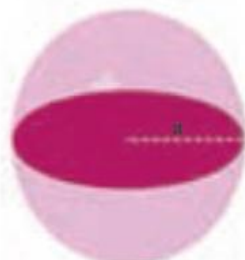


$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

$$\frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

کره به شعاع a

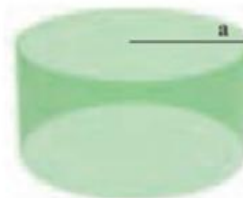


$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

$$\frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده a



$$V = \pi a^2 \times a = \pi a^3$$

$$S = 2(\pi \times a^2) + (2a \times \pi) \times a = 4\pi a^2$$

$$\frac{V}{S} = \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$$

استوانه به ارتفاع و قطر قاعده a



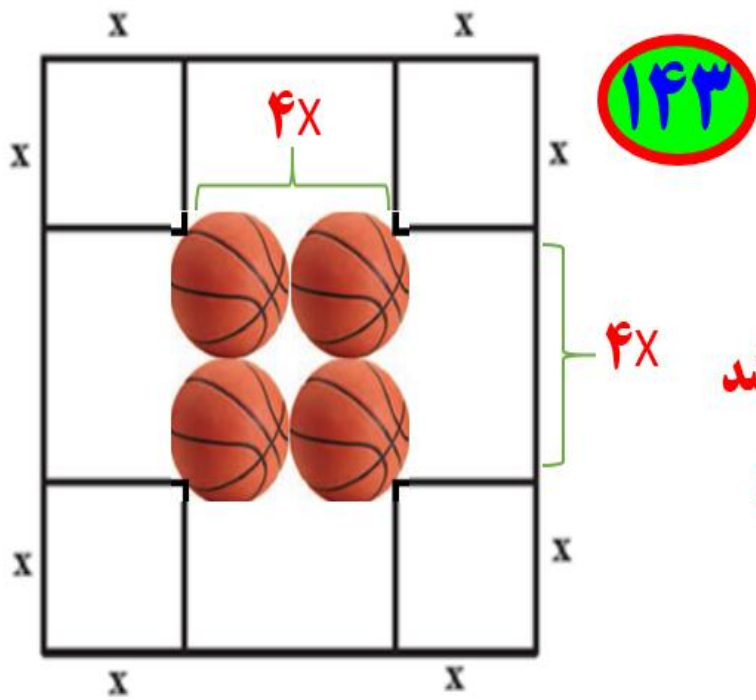
$$V = \left(\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \pi\right) \times a = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$S = 2\left(\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \pi\right) + (a \times \pi) \times a = \frac{5}{2}\pi a^2$$

$$\frac{V}{S} = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{5}{2}\pi a^2} = \frac{a}{10}$$

شکل کره

در هر مورد، نسبت حجم به سطح $\left(\frac{V}{S}\right)$ را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟
دانلود از اپلیکیشن رایگان همیار



۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.

**شعاع کره x است پس قطر یک کره $2x$ می باشد
و طول و عرض داخل جعبه باید $4x$ باشد تا دو
کره در کنار هم قرار گیرد.**

$$a - 2x = 4x \quad a = 2x + 4x \quad a = 6x$$

۱۴۳

