



استدلال و اثبات در هندسه

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 3 - استدلال و اثبات در هندسه

تهیه و تدوین: اصغر بابائی - دبیر ریاضی

درس اول: استدلال

انسان ها در زندگی روزمره خود بارها نیاز پیدا می کنند که موضوعی یا مطلبی را برای اطرافیان خود ثابت کنند . این موضوع هر لحظه از هر روز هم اتفاق می افتد و ما پس از بیان مطلبی، در مقابل این پرسش قرار می گیریم که چرا؟ وقتی مطلبی را بیان می کنیم اطرافیان مان یا به صورت مستقیم و یا غیر مستقیم ، از ما علت و دلیل مان را برای مطلبی بیان شده ، طلب می کنند و ما هم یا به صورت دقیق و یا بعضا به صورت غیر علمی دلیل هائی ارائه می کنیم که در برخی از موارد اصلا دلیل محکمی برای گفته هایمان وجود ندارد و اصطلاحا به آن مطالب ، سفسطه گفته می شود .

در زمان های قدیم انسان ها دلیل های زیادی برای پدیده هایی که اتفاق می افتادند، نداشتند، مثلا نمی دانستند که دلیل واقعی بارش باران چیست؟ برای دلیل بارش باران مطالب خنده آور هم گفته می شد و برخی از افراد هم، آن مطالب را باور می کردند مثلا در دوره ای از زمان های قدیم ، باور داشتند که خدای مخصوص باران وجود دارد و هر وقت او اراده کند باران می بارد و هر وقت نخواهد بارانی نخواهد بارید . با این تفکر هم تعدادی از افراد شروع به پرستش چنین خدایی می کردند که کارشان شرک هم هست . این موضوع در مورد علت پدیده هائی مثل : زلزله ، باد ، آتش گرفتن مواد ، طلوع و غروب خورشید ، هم به وقوع پیوسته است . شما جریان گالیله را که ادعا کرد خورشید به دور زمین نمی چرخد و زمین به دور خورشید می چرخد و برای ادعای خود هم دلیل آورد ، شاید شنیده باشید که با مخالفت عمومی حاکمان و کشیشان و مردم زمان خود روبرو شد و او را به جرم کفرگوئی به مرگ محکوم کردند ، البته او ناچار به توبه از گفته هایش شد. سال های بعد دانسته های انسان ها از علم ، باعث شد ، نظریه او به اثبات برسد . این موضوع در مورد خیلی باورها و خرافات امروزی هم صادق است که با یافتن دلیل علمی خیلی از این موضوعات ؛ اشتباهات افراد در ارائه دلیل برای کار خود ، مشخص می شود. به چند مثال زیر که افراد برای کارهای خود دلیل های غیرعلمی و خنده دار ارائه می کنند، توجه کنید :

امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می زنی؟»

محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که من به ورزشگاه رفته ام، تیم مورد علاقه ام باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ آیا دلیل محسن مورد قبول است؟

نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند. وزنه برداری می خواست وزنه ای ۱۰۰ کیلویی را بلند کند.

آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال های متفاوتی می کردند.

نیما : هفته پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود، با این حال نتوانست وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان : امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام. او هیچ گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟

چون من تا به حال هیچ وقت تصادف نکرده ام، پس در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

همه فیلم های جنگی که تاکنون دیده ام، جذاب بوده اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود، پس فیلم جنگی بوده است.

چون من امروز تکالیف درسی را ننوشته ام حتما معلم مان تکالیف را بررسی خواهد کرد. یا این که هر روز من درس هایم را مطالعه نکرده باشم ، همان روز معلم مان حتما از من درس را خواهید پرسید .

در بسیاری از موارد برای گفته هایمان دلیل قانع کننده نداریم و با گفتن مطالب مبهم و درخی از موارد مطالب غلط از ارائه دلیل ، فرار می کنیم. ریاضیات به دنبال این موضوع است که برای ارائه هر مطلبی دلیل قانع کننده علمی وثابت شده ارائه شود و هر مطلبی را به عنوان دلیل قبول نکنیم. این موضوع انسان ها را منطقی تر و معقول تر می کند و هر شخصی در برابر قانون و ارائه دلیل ، خود را مسئول می داند . در اثبات هر مساله ریاضی باید این موضوع مدنظر باشد و حتی یک مورد دلیل غیر علمی برای اثبات یک مطلب ریاضی ، مورد قبول نیست .

روش های اثبات در هندسه و ریاضیات :

4- روش استقرائی

3- روش شهودی

2- روش استنتاجی

1- روش استدلالی

1- روش استدلالی : در این روش با استفاده از دانسته های قبلی و مطالب علمی ثابت شده ، موضوعی را که برای ما مجهول است ، معلوم و ثابت می کنیم . به تعریف استدلال و اثبات توجه کنید :

«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی ، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد ، اثبات می گوئیم .

در درس دوم و ادامه مطالب با ارائه دلیل برای اثبات موضوعات ریاضی بیشتر آشنا خواهیم شد . به مثال زیر توجه کنید :
عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی متر دارد . بیسکویت باقر از همان نوع ، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی متر است . با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است .

2- روش استنتاجی :

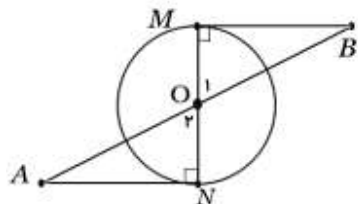
در این روش با استفاده از چند یافته قبلی ، موضوعی برای ما نتیجه می شود . شاید این موضوع چندین بار به ترتیب در یک اثبات اتفاق بیافتد که از مطلب اول ، مطلب دوم را نتیجه بگیریم و از آن مطلب هم مطلب سوم را نتیجه بگیریم و این جریان ادامه یابد .
به مثال های زیر توجه کنید :

مثال 1 :

$$a < b \quad , \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$$

در این مثال از دو تا نامساوی ، نامساوی دیگری ، نتیجه گیری شده است .

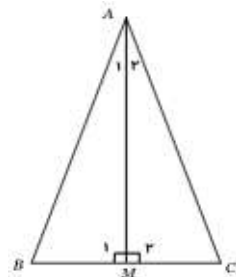
مثال 2 :



$$\triangle AON = \triangle MOB \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \hat{B}$$

در این مثال از تساوی مثلث ها تساوی دو ضلع مثلث ها ، نتیجه گیری شده است .

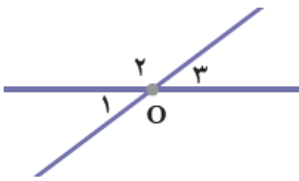
مثال 3 :



$$\triangle AMB \cong \triangle AMC \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \overline{AC} \quad \Rightarrow \quad \text{پس مثلث } ABC \text{ متساوی الساقین است.}$$

در این مثال دو موضوع به صورت پشت سر هم ، نتیجه گیری شده است .

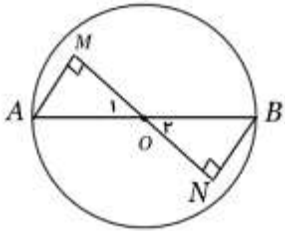
مثال 4 :



$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= 180^\circ \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

در این مثال از دو موضوع که قبلا برای ما مشخص بود ، یک مطلب جدید **نتیجه** گیری شده است .

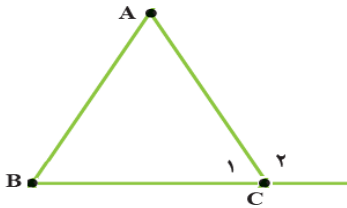
مثال 5 :



$$\left. \begin{aligned} \text{دلیل} \quad & \left\{ \begin{aligned} 1) \quad \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ \\ 2) \quad \overline{AO} = \overline{BO} \quad \text{شعاع دایره} \\ 3) \quad \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad \text{مقابل به راس} \end{aligned} \right. \\ \text{تساوی} \quad & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AMO = \triangle BNO \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 1) \quad \overline{MO} &= \overline{NO} \\ 2) \quad \overline{AM} &= \overline{BN} \\ 3) \quad \hat{A} &= \hat{B} \end{aligned} \right.$$

در این مثال از **دلیل های** ارائه شده ، ابتدا **تساوی مثلث ها** نتیجه گیری شده است و سپس تساوی اجزای دیگر مثلث ها **نتیجه** گیری شده است .

مثال 6 :



$$\left\{ \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 &= 180^\circ \\ \hat{C}_2 + \hat{C}_1 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$$

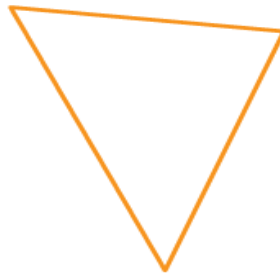
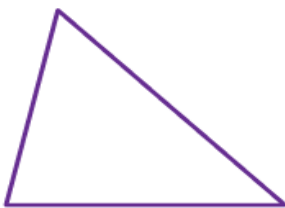
در این مثال از دو تساوی که از قبل برای ما معلوم بود ، اندازه **زاویه خارجی** مثلث را **نتیجه** گرفته ایم.

نکته مهم : آشنایی با مثال نقض

در اثبات ریاضی باید در نظر گرفت هر چند تا دلیل برای اثبات ارائه کنیم یا هر چند بار از مطالب مختلف نتیجه گیری کنیم نباید نتیجه به دست آمده توسط حتی یک **مثال نقض** شود .

یعنی اگر کسی مثالی بیاورد که **برخلاف** نتیجه گیری ما باشد در این حالت **اثبات ما باطل است** . پس با ارائه یک مثال نقض ، کل نتیجه گیری ارائه شده باید کنار گذاشته شود. علت این موضوع می تواند این باشد که دلیل های ارائه شده دقیق نبودند یا نتیجه گیری به اشتباه انجام شده است . به مثال زیر توجه کنید:

در مثلث های زیر هر سه ارتفاع مثلث را رسم کنید :



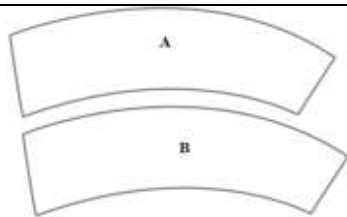
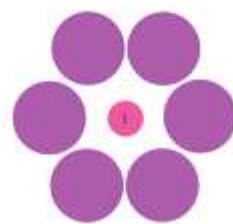
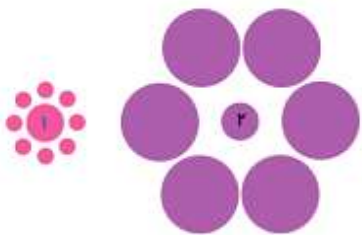
آیا با این مثال ها می توان نتیجه گرفت در هر مثلث ، محل برخورد ارتفاع های هر مثلث ، درون مثلث است؟
یک **مثال** بزنید که نتیجه بالا را **نقض** کند.

مشخص است که با رسم مثلثی که **زاویه باز** دارید و یا **مثلث قائم الزاویه** مطلب بالا ، **نقض** خواهد شد .

نتیجه : پس نمی توان با ارائه چند مثال مثل سه مثال بالا ، موضوعی را اثبات کرد . ارائه مثال برای اثبات با شرایط سخت گیرانه ای امکان دارد ولی در اغلب موارد ارائه مثال برای تایید یک مطلب را قبول نخواهیم کرد.

3- روش شهودی : در این روش تلاش می شود با مشاهده و آزمایش و اندازه گیری به وسیله ابزارهای مختلف ، درستی یک مطلب اثبات شود. مثل کارهایی که در آزمایشگاه درس علوم مشاهده کرده اید. مثلا دبیر علوم با گرم کردن یک قطعه فلز و استفاده از ابزار های مختلف اندازه گیری ، انبساط و بزرگ شدن آن را نتیجه می گیرد و یا با استفاده از کاغذ تورنسل ، اسید و باز بودن مواد را نتیجه می گیرد.

در شکل پایین سمت چپ دو نمونه از دایره ها کشیده شده و از ما خواسته اند که بگوییم کدام یک از دایره های 1 و 2 بزرگ تر است ؟
با نگاه کردن به نظر میرسد که دایره 1 کمی بزرگ تر است. این به دلیل دایره های کناری آن ها است که ما به اشتباه می اندازد ، در حالی که دو دایره با هم برابرند. با اندازه گیری قطر دودایره یا منطبق کردن آن ها در روی هم می توانید ببینید که با هم برابرند. در تصویر **سمت راست** این کار انجام شده است :



یا اشتباهی که شاید در تشخیص بزرگ یا کوچک بودن دو نوار روبرو رخ دهد. برخی از دوستان شاید با عجله بگویند که نوار B بزرگ تر از نوار A است در حالی که هر دو با هم برابرند. با منطبق کردن آن ها در روی هم، می توانید ببینید که این دو نوار با هم برابر هستند.

هرچند به طور معمول در ریاضیات و به ویژه در هندسه استفاده از شکل، ترسیم و شهود به تشخیص راه حل ها و ارائه حدس های درست کمک زیادی می کند، اما به تشخیصی که براساس این روش ها حاصل می گردد، نمی توانیم به طور کامل اطمینان کنیم.

در خیلی از موارد ما با اعتماد به حواس پنج گانه می خواهیم در مورد پدیده ها نظر بدهیم معلوم است که احتمالا اشتباهاتی هم در این بین خواهد بود. مثل این که با نگاه کردن به دو تا پنجره، بخوایم بگوئیم که دو تا پنجره با هم برابرند، و یا این که با دست زدن به دو جسم گرم، بگوئیم که کدام یک گرم تر است. یا با وزن کردن دستی دو جسم بگوئیم که کدام سنگین تر است. اگر وضعیت دمای دو جسم یا وزن آن ها تفاوت زیادی نداشته باشند، به صورت طبیعی، احتمال خطا در بیان نظرمان خیلی زیاد است. حتی اندازه گیری هم در خیلی موارد با خطای انسانی یا خطای ابزار اندازه گیری همراه است و نمی توان به نتایج حاصل از مشاهده، یا اندازه گیری اعتماد کرد.

تکالیف: حل تمرینات صفحه 35 و 36 را کتاب بنویسید.

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

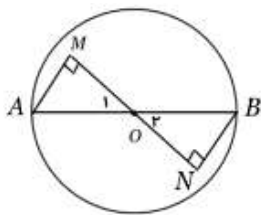
در درس گذشته آموختید که دیدن و استفاده از حواس یا ارائه مثال های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی کند و باید از دلیل های منطقی و قانع کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعات مسئله (فرض یا داده ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می کنیم.

برای چنین اثباتی باید با **فرض** و **حکم** آشنا شویم. در توضیحات زیر به این موضوع اشاره می کنیم:

فرض: به تمام اطلاعات مستقیم یا غیر مستقیم و حقایقی که در متن سوال یا شکل، ارائه شده است و از درستی آن ها اطمینان داریم، **فرض مساله** می گوئیم.
حکم: موضوعی را که سوال از ما خواسته که اثبات کنیم و از درستی آن فعلا مطمئن نیستیم، **حکم مساله** نامیده می شود.

به مثال های زیر توجه کنید:

مثال 1: در دایره مقابل، ثابت کنید که دو مثلث AOM و BON هم نهشتند؟



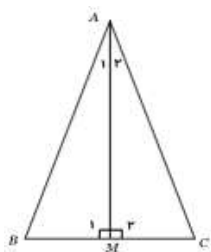
حل: توجه کنید که در روی سوال به اسم **دایره** اشاره شده و تعدادی از اطلاعات در روی شکل مشخص شده است. مثلا اندازه زاویه های M و N که قائمه هستند و یا وجود زوایای متقابل به راس که در شکل مشخص است و یا شعاع های دایره که می دانیم با هم برابرند. این همه اطلاعات و حقایق را **فرض مساله** می گویند. البته شاید همه این اطلاعات برای حل مساله لازم نباشد و ما فقط از تعدادی از فرض ها برای اثبات کمک بگیریم.

در این مساله، از ما خواسته شده **تساوی** مثلث ها را ثابت کنیم و این همان **حکم مساله** است. هر دو مورد را به زبان ریاضی در پایین نوشته شده است:

متقابل به راس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و شعاع دایره $\overline{AO} = \overline{BO}$ و $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$: فرض های مساله

حکم مساله: $\triangle AOM \cong \triangle BON$

مثال 2: در مثلث متساوی الساقین مقابل، ثابت کنید که BM و MC با هم برابرند؟

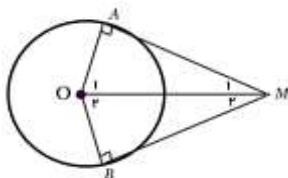


حل: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$ و زاویه پای ساق $\hat{B} = \hat{C}$ و ساق $\overline{AB} = \overline{AC}$ فرض های مساله:

حکم مساله: $\overline{BM} = \overline{MC}$

دقت کنید که برای تساوی زاویه های $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$ دلیلی نداریم و به اشتباه، مساوی بودن آن ها را در فرض ننویسید.

مثال 3: در دایره مقابل، ثابت کنید دو زاویه $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ با هم برابرند؟

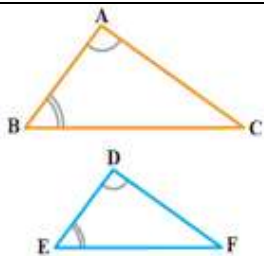


حل: $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ و ضلع مشترک $\overline{OM}$ و شعاع $\overline{AO} = \overline{BO}$ فرض های مساله:

حکم مساله: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

دقت کنید که برای تساوی زاویه های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ و همچنین تساوی AM, BM دلیلی نداریم و به اشتباه، مساوی بودن آن ها را در فرض ننویسید.

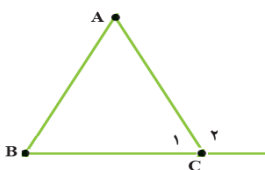
مثال 4: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر، برابر باشند، ثابت کنید که زاویه سوم شان هم با هم برابرند؟



حل: با توجه به شکل $\hat{B} = \hat{E}$ و با توجه به شکل $\hat{A} = \hat{D}$ فرض های مساله:

حکم مساله: $\hat{C} = \hat{F}$

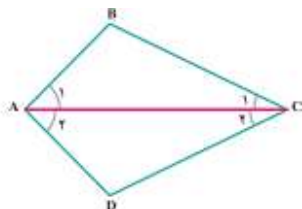
مثال 5: ثابت کنید که زاویه خارجی هر مثلث، با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر است؟



زاویای نیم صفحه $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$ و مجموع زوایای داخلی مثلث $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ$ فرض های مساله:

حکم مساله: $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2$

مثال 6: در شکل مقابل، نیمساز دو زاویه A و C رسم شده است، ثابت کنید که دو مثلث ABC و ADC هم نهشتند.



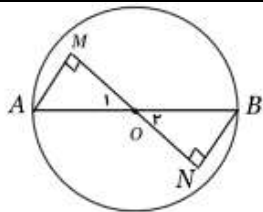
حل: ضلع مشترک $\overline{AC}$ و نیمساز $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و نیمساز $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ فرض های مساله:

حکم مساله: $\triangle ABC \cong \triangle DCB$

درس سوم: هم نهشتی مثلث ها

بعد از این که فرض و حکم مساله مشخص شد، انتخاب یک روش برای اثبات که بتواند ما را با استفاده از فرض ها به اثبات حکم برساند، خیلی مهم است و این کار جزء خلاقیت های هر شخص است. راه و مسیر رسیدن به حکم مساله همواره منحصر بفرد نیست، یعنی شاید با روش های مختلف و از مسیرهای مختلف بتوانیم یک سوال و مساله را اثبات کنیم که سلیقه و خلاقیت افراد در این زمینه موثر می باشد. در نمونه های زیر، تلاش شده با تعدادی از اثبات ها و نحوه انجام کار و نحوه نگارش اثبات، آشنا شوید:

مثال 1: در دایره مقابل، ثابت کنید که دو مثلث AOM و BON با هم برابرند؟



متقابل به راس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و شعاع دایره $\overline{AO} = \overline{BO}$ و $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$ فرض های مساله:

حکم مساله: $\triangle AOM \cong \triangle BON$

اثبات: با توجه به فرض های سوال ثابت کنیم دو مثلث AOM و BON با هم برابرند:

$$\begin{array}{l} \text{دلیل تساوی} \left\{ \begin{array}{l} ۱) \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ \\ ۲) \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ متقابل به راس} \\ ۳) \overline{AO} = \overline{BO} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle AOM \cong \triangle BON \end{array}$$

(و تر و یک زاویه) بنا به حالت

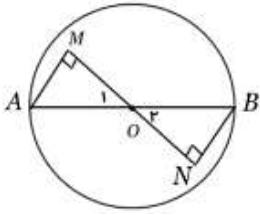
از این مثال می توان به گونه ای دیگر استفاده کرد .

مثلا به جای این که تساوی مثلث ها را از ما بخواهد ، شاید انتظار داشته باشد که ثابت کنیم اجزای مثلث ها با هم برابرند .

برای این کار ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث هم نهشتند و از آن نتیجه می گیریم دو قسمت مورد نظر با هم برابرند .

یعنی ابتدا با روش **استدلالی** هم نهشتی مثلث ها را ثابت می کنیم و سپس با روش **استنتاجی** به هدف خود یعنی تساوی اجزا می رسمیم .
به حل مثال بعد توجه کنید :

مثال 2: در دایره مقابل ، ثابت کنید که دو ضلع AM و BN با هم برابرند؟



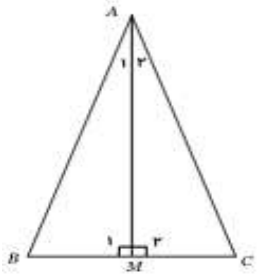
متقابل به راس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و شعاع دایره $\overline{AO} = \overline{BO}$ و $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$: فرض های مساله

مساله حکم: $\overline{AM} = \overline{BN}$

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث با هم برابرند و از آن اثبات نتیجه می گیریم که دو ضلع موردنظر مساویند:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ \\ 2) \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ متقابل به راس} \\ 3) \overline{AO} = \overline{BO} \end{array} \right. \xRightarrow[\text{بنا به حالت (وتر و یک زاویه)}]{\text{دلیل تساوی}} \triangle AMO = \triangle BNO \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BN}$$

مثال 3: در مثلث **متساوی الساقین** مقابل ، ثابت کنید که BM و MC با هم برابرند؟



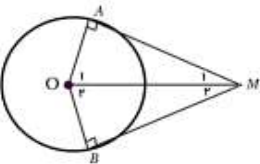
$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$ و زاویه پای ساق $\hat{B} = \hat{C}$ و ساق $\overline{AB} = \overline{AC}$: فرض های مساله

مساله حکم: $\overline{BM} = \overline{MC}$

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ABM و AMC برابرند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که دو ضلع موردنظر مساویند:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ \\ 2) \overline{AM} = \overline{AM} \text{ ضلع مشترک} \\ 3) \overline{AB} = \overline{AC} \text{ ساق} \end{array} \right. \xRightarrow[\text{بنا به حالت (وتر و یک ضلع)}]{\text{دلیل تساوی}} \triangle ABM = \triangle AMC \Rightarrow \overline{BM} = \overline{MC}$$

مثال 4: در دایره مقابل ، ثابت کنید دو زاویه $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ با هم برابرند ؟



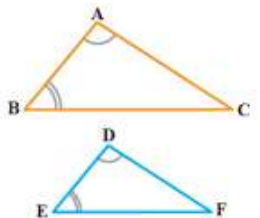
$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ و ضلع مشترک $\overline{OM}$ و شعاع $\overline{AO} = \overline{BO}$: فرض های مساله

مساله حکم: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث AMO و BMO برابرند و از آن ، نتیجه می گیریم که دو زاویه موردنظر مساویند:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ 2) \overline{OM} = \overline{OM} \text{ ضلع مشترک} \\ 3) \overline{AO} = \overline{BO} \text{ شعاع} \end{array} \right. \xRightarrow[\text{بنا به حالت (وتر و یک ضلع)}]{\text{دلیل تساوی}} \triangle AMO = \triangle BMO \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

مثال 5: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر ، برابر باشند ، ثابت کنید که زاویه سوم شان هم با هم برابرند؟



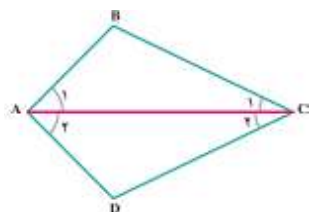
با توجه به شکل $\hat{B} = \hat{E}$ و با توجه به شکل $\hat{A} = \hat{D}$: فرض های مساله

مساله حکم: $\hat{C} = \hat{F}$

اثبات: می دانیم مجموع زوایای مثلث 180 درجه است و با روش استنتاجی، نتیجه می گیریم که زاویه های سوم مساویند:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} \xRightarrow[\hat{B} = \hat{E}]{\hat{A} = \hat{D}} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{D} + \hat{B} + \hat{F} \Rightarrow \hat{C} = \hat{F}$$

دقت کنید که در هر اثبات، ابتدا فرض و حکم را نوشته و سپس مراحل اثبات را انجام می دهیم.



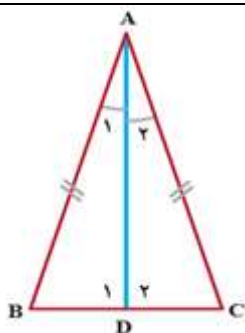
مثال 6: در شکل مقابل، نیمساز دو زاویه A و C رسم شده است، ثابت کنید که دو ضلع AB و AD برابرند.

فرض های مساله: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ نیمساز و $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ نیمساز و ضلع مشترک $\overline{AC}$

حکم مساله: $\overline{AB} = \overline{AD}$

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ABC و ADC هم نهشتند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که دو ضلع مورد نظر مساویند:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ بنا به فرض} \\ 2) \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \text{ بنا به فرض} \\ 3) \overline{AC} = \overline{AC} \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} \text{بنا به حالت} \\ \text{(ض ز ض)} \end{array} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overline{AB} = \overline{AD}$$



مثال 7: در مثلث متساوی الساقین مقابل، AD نیمساز زاویه A است، ثابت کنید که AD میانه وارد بر BC هم است؟

تعریف میانه: میانه پاره خطی است که از یک رأس مثلث بر وسط ضلع مقابل رسم می شود.

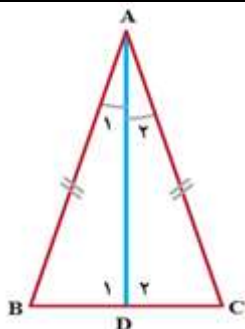
فرض های مساله: $\widehat{B} = \widehat{C}$ زاویه پای ساق و $\overline{AB} = \overline{AC}$ ساق و $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ فرض های مساله

حکم مساله: $\overline{BD} = \overline{DC}$

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ABD و ADC هم نهشتند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که $BD = DC$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ نیمساز} \\ 2) \overline{AB} = \overline{AC} \text{ ساق} \\ 3) \overline{AD} = \overline{AD} \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} \text{بنا به حالت} \\ \text{(ض ز ض)} \end{array} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle ADC \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overline{BD} = \overline{DC}$$

یعنی در هر مثلث متساوی الساقین، نیمساز زاویه راس مثلث، میانه وارد بر قاعده مثلث هم می باشد.



مثال 8: در مثلث متساوی الساقین مقابل، AD نیمساز زاویه A است، ثابت کنید که ارتفاع AD ارتفاع وارد بر BC هم است؟

تعریف ارتفاع: پاره خطی است که از یک رأس مثلث بر ضلع مقابل (یا امتداد آن) عمود رسم می شود.

فرض های مساله: $\widehat{B} = \widehat{C}$ زاویه پای ساق و $\overline{AB} = \overline{AC}$ ساق و $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ فرض های مساله

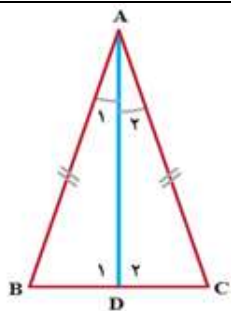
حکم مساله: $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ$

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ABD و ADC هم نهشتند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ نیمساز} \\ 2) \overline{AB} = \overline{AC} \text{ ساق} \\ 3) \overline{AD} = \overline{AD} \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} \text{بنا به حالت} \\ \text{(ض ز ض)} \end{array} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle ADC \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ$$

یعنی در هر مثلث متساوی الساقین، نیمساز زاویه راس مثلث، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث هم می باشد.

مثال 9: در مثلث متساوی الساقین مقابل، AD ارتفاع وارد بر قاعده است، ثابت کنید: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$



فرض های مساله: $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ$ و $\overline{AB} = \overline{AC}$ ساق و $\hat{B} = \hat{C}$ زاویه پای ساق

حکم مساله: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

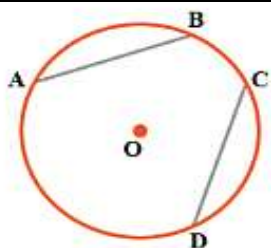
اثبات: ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ABD و ADC هم نهشتند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دلیل تساوی} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1) \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ \\ 2) \overline{AB} = \overline{AC} \text{ ساق} \\ 3) \overline{AD} = \overline{AD} \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right. \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{بنا به حالت}]{\text{نتیجه می گیریم}} \triangle ABD = \triangle ADC \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

(و ض)

یعنی در هر مثلث متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز زاویه راس مثلث هم می باشد.

مثال 10: در دایره مقابل، اگر وترهای AB و CD با هم برابر باشند، ثابت کنید کمان های AB و CD با هم برابرند.



فرض های مساله: $\overline{AB} = \overline{CD}$ شعاع $\overline{AO} = \overline{CO} = \overline{OB} = \overline{OD}$

حکم مساله: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

اثبات: ابتدا نقاط A و B و C و D را به مرکز دایره وصل کرده و ثابت می کنیم دو مثلث AOB و COD برابرند و

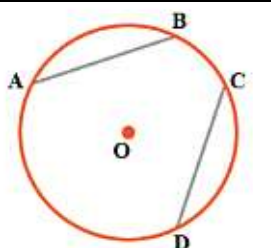
از آن اثبات، نتیجه می گیریم که $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و از آن به نتیجه مورد نظر خواهیم رسید:

$$\left. \begin{array}{l} \text{دلیل تساوی} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1) \overline{AO} = \overline{OC} \text{ شعاع دایره} \\ 2) \overline{BO} = \overline{OD} \text{ شعاع دایره} \\ 3) \overline{AB} = \overline{CD} \text{ بنا به فرض} \end{array} \right. \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{بنا به حالت}]{\text{نتیجه می گیریم}} \triangle AOB = \triangle COD \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

(و ض ض)

دقت کنید که از ابتدا، تساوی زاویه های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برای ما مشخص نبود و دلیلی برای تساوی آن ها نداشتیم.

مثال 11: در دایره مقابل، اگر کمان های AB و CD با هم برابر باشند، ثابت کنید وترهای AB و CD با هم برابرند.



فرض های مساله: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ شعاع $\overline{AO} = \overline{CO} = \overline{OB} = \overline{OD}$

حکم مساله: $\overline{AB} = \overline{CD}$

اثبات: ابتدا نقاط A و B و C و D را به مرکز دایره وصل کرده و ثابت می کنیم دو مثلث AOB و COD برابرند و

از آن اثبات، نتیجه می گیریم وترهای AB و CD برابرند:

$$\left. \begin{array}{l} \text{دلیل تساوی} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1) \overline{AO} = \overline{OC} \text{ شعاع دایره} \\ 2) \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ بنا به فرض} \\ 3) \overline{BO} = \overline{OD} \text{ شعاع دایره} \end{array} \right. \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{بنا به حالت}]{\text{نتیجه می گیریم}} \triangle AOB = \triangle COD \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overline{AB} = \overline{CD}$$

(و ض ض)

نکته: به تفاوت فرض ها و حکم و نحوه اثبات در دو مساله 10 و 11 توجه کنید. یعنی:

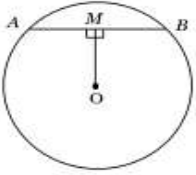
در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان های نظیر آنها نیز با هم برابرند.

تکالیف: تمرینات و کاردرکلاس صفحه 51 و 52 را مثل نمونه های بالا با رسم دقیق شکل ها و نوشتن فرض و حکم مساله در دفتر بنویسید.

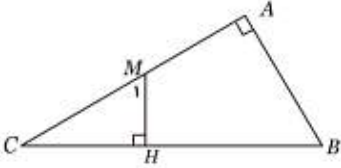
تمرین های مناسب برای اثبات هندسی

در هریک از مثال های زیر ابتدا فرض و حکم مساله را نوشته و سپس آنها را اثبات کنید

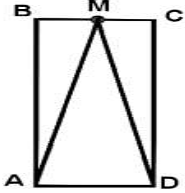
1 - با توجه به شکل مقابل و با نوشتن **فرض و حکم** مربوطه ثابت کنید که پاره خط OM وتر AB را نصف کرده است؟



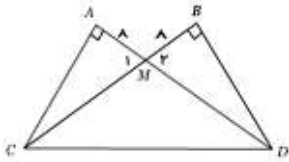
2 - با توجه به شکل مقابل و با نوشتن **فرض و حکم**، ثابت کنید که زاویه $\hat{M}_1$ با زاویه $\hat{B}$ برابر است؟



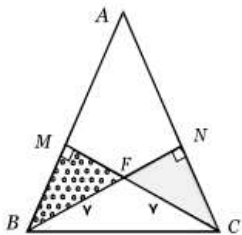
3 - در مستطیل مقابل، نقطه ی M وسط BC است. با نوشتن **فرض و حکم** ثابت کنید :
مثلث AMD متساوی الساقین است.



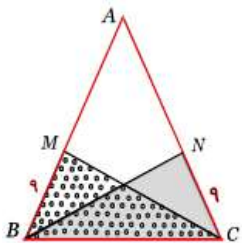
4 - در شکل مقابل و با نوشتن **فرض و حکم**، ثابت کنید که دو مثلث AMC و BMD برابرند؟



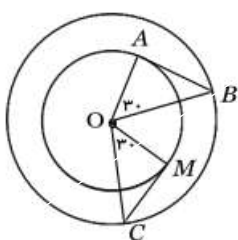
5 - در شکل مقابل و با نوشتن **فرض و حکم**، ثابت کنید که دو مثلث BMF و FNC برابرند؟



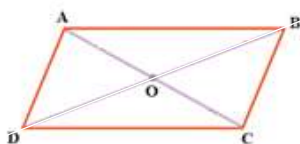
6 - اگر مثلث ABC متساوی الساقین باشد، ثابت کنید که دو مثلث BMC و CNB برابرند؟



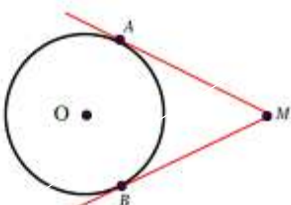
7 - اگر نقطه O مرکز دو دایره باشد، ثابت کنید که دو مثلث AOB و MOC برابرند؟



8 - ثابت کنید که دو قطر متوازی الاضلاع، همدیگر را نصف می کنند ؟

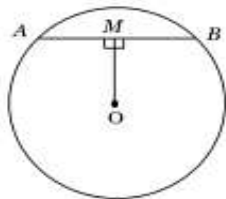


9 - اگر از نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم ،
ثابت کنید که طول دو پاره خط مماس بر دایره با هم مساویند ؟



حل و اثبات نمونه سوالات، در صفحات بعدی ارائه شده است:

1 - با توجه به شکل مقابل و با نوشتن **فرض و حکم** مربوطه ثابت کنید که پاره خط OM وتر AB را نصف کرده است؟

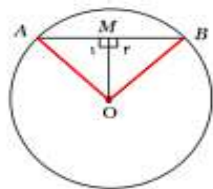


فرض: $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ$ و $\overline{AO} = \overline{BO}$

حکم: $\overline{AM} = \overline{BM}$

اثبات:

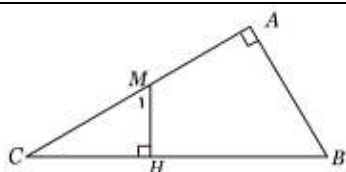
از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کرده ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث AOM و BOM هم نهشت هستند:



$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ \\ 2) \overline{OM} = \overline{OM} \text{ ضلع مشترک} \\ 3) \overline{AO} = \overline{BO} \text{ شعاع} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle AOM = \triangle BOM \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overline{AM} = \overline{BM}$$

(بنا به حالت وتر و یک ضلع)

2 - با توجه به شکل مقابل و با نوشتن **فرض و حکم**، ثابت کنید که زاویه $\widehat{M}_1$ با زاویه $\widehat{B}$ برابر است؟



فرض: $\widehat{H} = \widehat{A} = 90^\circ$ و $\widehat{C} + \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$ و $\widehat{C} + \widehat{H} + \widehat{M}_1 = 180^\circ$

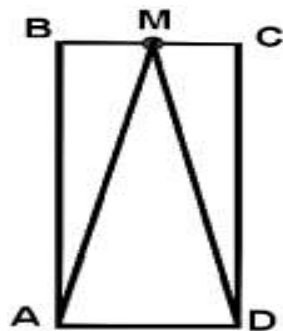
حکم: $\widehat{M}_1 = \widehat{B}$

اثبات: با توجه به این که مجموع زوایای مثلث ها 180 درجه است می توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{C} + \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{H} + \widehat{M}_1 = 180^\circ \\ \widehat{H} = \widehat{A} = 90^\circ \end{array} \right. \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \widehat{C} + \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{H} + \widehat{M}_1 \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \widehat{M}_1 = \widehat{B}$$

3 - در مستطیل مقابل، نقطه ی M وسط BC است. با نوشتن **فرض و حکم** ثابت کنید:

مثلث AMD **متساوی الساقین** است.



فرض: $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$ و $\overline{AB} = \overline{CD}$ طول مستطیل و $\overline{BM} = \overline{MC}$ وسط BC است

حکم: $\overline{AM} = \overline{DM}$

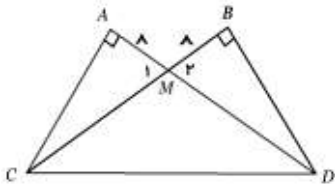
اثبات: اگر ثابت کنیم دو مثلث ABM و DMC با هم برابرند در این صورت AM و DM برابر

خواهند بود که به معنی متساوی الساقین بودن مثلث AMD است. پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ \\ 2) \overline{AB} = \overline{CD} \text{ طول مستطیل} \\ 3) \overline{BM} = \overline{MC} \text{ وسط BC است} \end{array} \right. \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \triangle ABM = \triangle DMC \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overline{AM} = \overline{DM} \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \triangle AMD \text{ متساوی الساقین است}$$

(بنا به حالت فرض ۳)

4 - در شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم ، ثابت کنید که دو مثلث AMC و BMD برابرند؟



فرض: $\widehat{B} = \widehat{A} = 90^\circ$ و $\overline{AM} = \overline{BM} = 8$ و $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ متقابل به راس

حکم: $\triangle AMC = \triangle BMD$

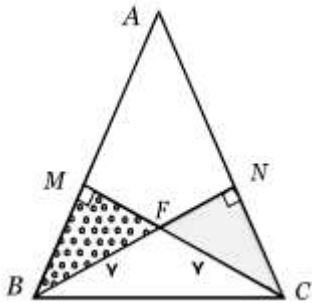
اثبات: با توجه به فرض های سوال ثابت کنیم دو مثلث AMC و BMD با هم برابرند:

دلیل تساوی

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{B} = \widehat{A} = 90^\circ \\ 2) \overline{AM} = \overline{BM} = 8 \\ 3) \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \text{ متقابل به راس} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle AMC = \triangle BMD$$

بنا به حالت (فرض ز)

5 - در شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم ، ثابت کنید که دو مثلث BMF و FNC برابرند؟



فرض: $\widehat{M} = \widehat{N} = 90^\circ$ و $\overline{BF} = \overline{CF} = 7$ و $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ متقابل به راس

حکم: $\triangle FNC = \triangle BMF$

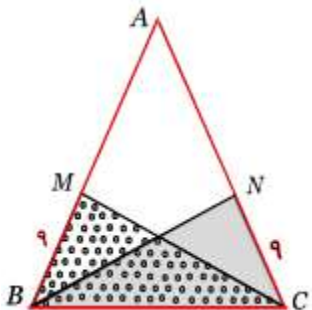
اثبات: با توجه به فرض های سوال ثابت کنیم دو مثلث FNC و BMF با هم برابرند:

دلیل تساوی

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{M} = \widehat{N} = 90^\circ \\ 2) \overline{BF} = \overline{CF} = 7 \\ 3) \widehat{F}_1 = \widehat{F}_2 \text{ متقابل به راس} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle FNC = \triangle BMF$$

بنا به حالت (وتر و یک زاویه تند)

6 - اگر مثلث ABC متساوی الساقین باشد ، ثابت کنید که دو مثلث BMC و BNC برابرند؟



فرض: $\widehat{B} = \widehat{C}$ زاویه پای ساق و $\overline{BM} = \overline{CN} = 9$

حکم: $\triangle BMC = \triangle BNC$

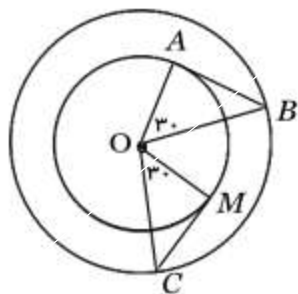
اثبات: با توجه به فرض های سوال ، ثابت کنیم دو مثلث BMC و BNC با هم برابرند:

دلیل تساوی

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{B} = \widehat{C} \text{ زاویه پای ساق} \\ 2) \overline{BM} = \overline{CN} = 9 \\ 3) \overline{BC} = \overline{BC} \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle BMC = \triangle BNC$$

بنا به حالت (فرض ز ض)

7- اگر نقطه O مرکز دو دایره باشد، ثابت کنید که دو مثلث AOB و MOC برابرند؟



فرض: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = 30^\circ$ و شعاع دایره کوچک $\overline{AO} = \overline{MO}$ و شعاع دایره بزرگ $\overline{BO} = \overline{CO}$

حکم: $\triangle AOB = \triangle MOC$

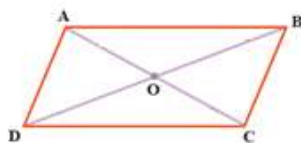
اثبات: با توجه به فرض های سوال، ثابت کنیم دو مثلث AOB و MOC با هم برابرند:

دلیل تساوی

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \overline{AO} = \overline{MO} = \text{شعاع دایره کوچک} \\ 2) \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = 30^\circ \\ 3) \overline{BO} = \overline{CO} = \text{شعاع دایره بزرگ} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle AOB = \triangle MOC$$

بنا به حالت (فرض)

8- ثابت کنید که دو قطر متوازی الاضلاع، همدیگر را نصف می کنند؟

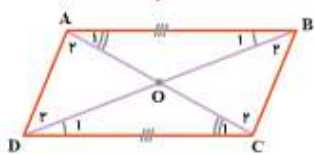


اضلاع متوازی الاضلاع $\overline{AB} = \overline{CD}$ و خطوط موازی و مورب $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ و خطوط موازی و مورب $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$

فرض: $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$

حکم: $\overline{AO} = \overline{CO}$ و $\overline{DO} = \overline{BO}$

اثبات: اگر ثابت کنیم دو مثلث AOB و DOC با هم برابرند در این صورت AO با OC و BO با OD برابر خواهند بود که این به معنی نصف شدن قطر می باشد:



دلیل تساوی

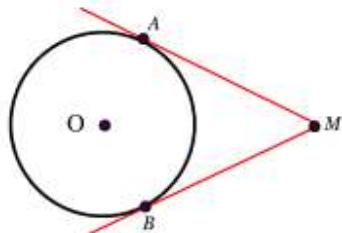
$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \text{ خطوط موازی و مورب} \\ 2) \overline{AB} = \overline{CD} \text{ اضلاع متوازی الاضلاع} \\ 3) \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \text{ خطوط موازی و مورب} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle AOB = \triangle DOC$$

بنا به حالت (فرض)

نتیجه می گیریم $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AO} = \overline{CO} \\ \overline{BO} = \overline{DO} \end{array} \right.$

9- اگر از نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم،

ثابت کنید که طول دو پاره خط مماس بر دایره، با هم مساویند؟

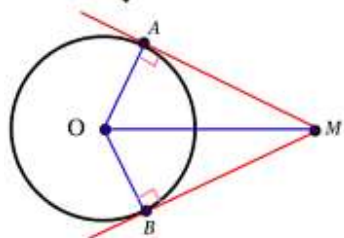


فرض: $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ و شعاع دایره $\overline{AO} = \overline{BO}$

حکم: $\overline{AM} = \overline{BM}$

اثبات:

از مرکز دایره به نقاط A و B و M وصل کرده و ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث AOM و BOM هم نهشت هستند. البته می دانیم که خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است، که از این مطلب در فرض مساله استفاده شده است:



دلیل تساوی

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \\ 2) \overline{AO} = \overline{BO} \text{ شعاع دایره} \\ 3) \overline{MO} = \overline{MO} \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle AOM = \triangle BOM$$

بنا به حالت (فرض)

نتیجه می گیریم $\overline{AM} = \overline{BM}$

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد؛

اما می توان مراحل حل را مشخص کرد که برای حل مسئله هندسه، توصیه می شود.

قدم های حل مسئله

- ۱- صورت مسأله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهنده آن را بشناسید.
- در مسأله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصله نقطه تا خط و ... سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟
- ۲- اگر برای مسأله شکل رسم نشده است، با توجه به صورت مسأله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.
- ۳- داده های مسئله (فرض) و خواسته های آن (حکم) را تشخیص دهید و در یک جا بنویسید.
- ۴- برای رسیدن از فرض به حکم، راه حلی پیدا کنید. روش های مختلفی برای این کار هست، مثلاً:
یکی از راه های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از هم نهستی مثلث ها است.

درس پنجم: شکل های متشابه

در هندسه ما معمولاً به دنبال این موضوع بودیم که ثابت کنیم دو شکل یا دو مفهوم با هم برابرند. در خیلی از موارد دو شکل یا جسم به هم شبیهند ولی با هم برابر نیستند.

وقتی شما 6 تا عکس پرسنلی برای ثبت نام مدرسه تهیه می کنید این 6 تا عکس همه با هم برابرند و از همه جهت با هم یکسان هستند ولی در برخی موارد عکاس، شاید یک نمونه بزرگ تر از عکس شما هم چاپ کند که برای قاب گرفتن مناسب است. این عکس بزرگ از خیلی جهات مثل عکس های قبلی است ولی از یک نظر با آن ها متفاوت است و آن یک نظر هم اندازه است. یعنی با این که این عکس و عکس های قبلی مساوی نیستند ولی به هم **شبیه** هستند.

این اتفاق در خیلی جاهای دیگر هم می افتد، مثلاً وقتی شما در فروشگاه، یک مدل کفش را انتخاب می کنید که بخرید شاید اندازه کفش اول برای پای شما مناسب نباشد و از فروشنده بخواهید که یک یا دو سایز کوچک تر یا بزرگ تر از نمونه اول را برای شما بیاورد. این کفش ها اگر از نظر رنگ و مدل و جنس هم یکسان باشند از نظر اندازه برابر نیستند ولی به هم **شبیه** هستند.

در عکس های زیر دقت کنید، ما اسباب بازی ها یا ماکت هایی از خیلی چیزها دیده ایم که برابر با نمونه اصلی نیستند ولی به مورد اصلی، خیلی **شباهت** دارند و انسان ها از این مدل ها برای مقاصد مختلف استفاده می کنند. مثلاً بچه ها با استفاده از **شباهت** اسباب بازی ها با نمونه های اصلی، بازی خود را می کنند، بزرگتر ها هم در کارهای روزمره خود از آن بهره می برند.

مثلاً **نقشه** جغرافیای روی یک صفحه، **مشابه** با محل واقعی یک شهر یا خیابان یا محله را در نظر بگیرید که با محیط واقعی برابر نیست ولی به آن **شبیه** است و ما بارها از نقشه برای رسیدن به مقاصد خود استفاده می کنیم. مثل نقشه تبریز یا تهران یا جاهای دیگر.

یک طراح که می خواهد نقشه یک ساختمان یا سازه بزرگ را طراحی کند می تواند ماکتی از آن بسازد، تا بقیه هم متوجه شوند سازه اصلی به چه شکلی خواهد بود. **مجسمه** ها یا اجسامی از این دست، هم **مشابه** چهره های اشخاص مشهور ساخته می شوند.

ماکت برج میلاد



تصویر واقعی برج میلاد



اسباب بازی سمند



یک دستگاه تاکسی سمند



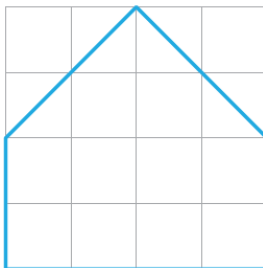
عکس بزرگ مخصوص قاب گرفتن



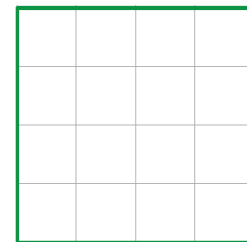
عکس پرسنلی 3 در 4



ابتدا به پنج ضلعی ها و بعدا به مربع های زیر توجه کنید



مشاهده می کنید که پنج ضلعی ها به هم شبیه هستند



مشاهده می کنید که مربع ها به هم شبیه هستند

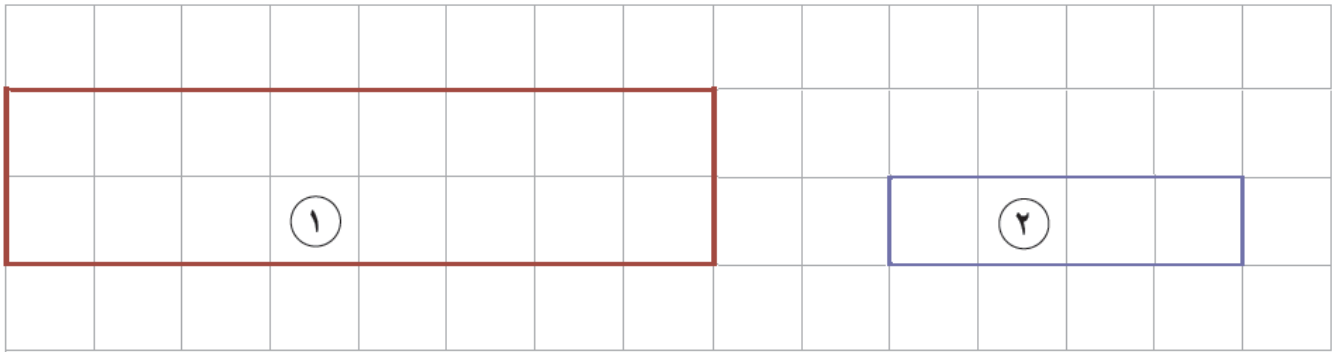


اگر به جعبه های مقابل توجه کنید

خواهید دید که در برخی موارد با هم تفاوت دارند ،

مثلا از نظر رنگ و اندازه با هم تفاوت دارند، ولی به هم شبیه هستند

به مستطیل رنگی زیر توجه کنید که با هم متشابهند :



سه شرط اصلی تشابه دو شکل (دو جسم)

- 1- تعداد اضلاع برابر باشد . دو تا شکل که تعداد اضلاع یکسانی ندارند نمی توانند مشابه باشند . مثلا چهار ضلعی و پنج ضلعی ها نمی توانند مشابه باشند.
 - 2- اندازه زاویه های متناظر با هم برابر باشند . یعنی اندازه هر زاویه در یک شکل ، با اندازه زاویه مشابه در شکل دیگر ، کاملا برابر باشند.
 - 3- اندازه اضلاع متناظر در دو شکل با هم متناسب باشند . یعنی اندازه هر ضلع یک شکل ، با اندازه ضلع مشابه در شکل دیگر متناسب باشند.
- و این بدان معنی است که اگر یک ضلع از یک شکل در شکل دیگر دو برابر شده است، بقیه اضلاع هم باید دو برابر شوند و اگر یک ضلع از یک شکل در شکل دیگر نصف شده است ، بقیه اضلاع هم باید نصف شوند.

هرگاه در دو چندضلعی همه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، یا بدون تغییر باشد) و اندازه زاویه ها تغییر نکرده باشد، آن دو چند ضلعی با هم متشابه اند.

به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می گویند.

مقیاس در نقشه های جغرافیایی ، همان نسبت تشابه هندسی است .

اگر مقیاس نقشه $\frac{1}{10000}$ باشد یعنی نقشه به اندازه 10000 برابر کوچک تر از اندازه محیط واقعی است .

در تصویر زیر، نقشه قسمتی از شهر تهران را می بینید . مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است یا $\frac{1}{100000}$

یعنی هر ۱ سانتی متر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی متر (۱۰۰۰ متر) مقدار واقعی برابر است.



مثال 1: به تصویر دقت کنید که دو مثلث قائم الزاویه با هم **مشابه** هستند.

اولا : هر کدام سه تا ضلع دارند.

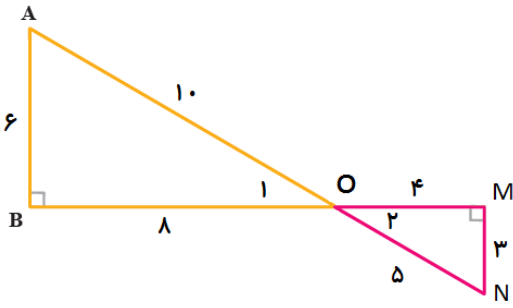
ثانیا : اندازه زاویه های متناظر هم با هم **برابر** است . یعنی :

$$\hat{B} = \hat{M} \quad \text{و} \quad \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad \text{و} \quad \hat{A} = \hat{N}$$

ثالثا : اضلاع متناظر هم **متناسب** هستند ، یعنی :

$$AB = 2MN \quad \text{و} \quad BO = 2OM \quad \text{و} \quad AO = 2ON$$

نسبت تشابه دو شکل 1 به 2 است که به صورت $\frac{1}{2}$ نشان می دهیم.



مثال 2: به تصویر دقت کنید که دو تا **مثلث قائم الزاویه** با هم **مشابه** هستند .

اولا : هر کدام سه تا ضلع دارند.

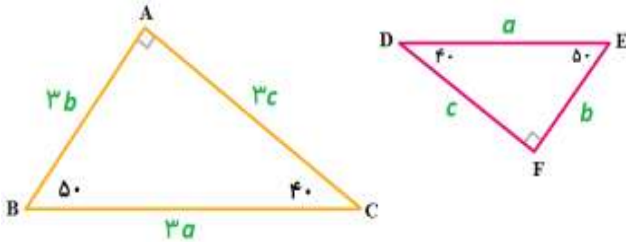
ثانیا : اندازه زاویه های متناظر هم با هم **برابر** است . یعنی :

$$\hat{B} = \hat{E} = 50 \quad \text{و} \quad \hat{A} = \hat{F} = 90 \quad \text{و} \quad \hat{D} = \hat{C} = 40$$

ثالثا : اضلاع متناظر هم **متناسب** هستند ، یعنی :

$$AC = 3DF \quad \text{و} \quad AB = 3FE \quad \text{و} \quad BC = 3DE$$

نسبت تشابه دو شکل 1 به 3 است که به صورت $\frac{1}{3}$ نشان می دهیم ، به زبان ساده شکل کوچک سه برابر ، بزرگ تر شده است .



تکالیف : تمرینات و کاردرکلاس صفحه های **55 و 56 و 57 و 58** را در کتاب حل کنید.

سوالات چهار گزینه ای

1 - مقیاس نقشه ای $\frac{1}{300000}$ است اگر فاصله ی دو نقطه در طبیعت **600000 cm** باشد ، فاصله این دو نقطه در نقشه :

(الف) 20 cm (ب) 2 cm (ج) 2 m (د) 200 cm

2 - اگر **نسبت تشابه** دو مثلث $\frac{2}{5}$ باشد ، نسبت اضلاع این دو مثلث :

(الف) $\frac{2}{5}$ (ب) $\frac{4}{5}$ (ج) $\frac{4}{25}$ (د) $\frac{8}{125}$

3 - **نسبت تشابه** دو تا مثلث ، برابر با $\frac{1}{2}$ است . اگر اندازه اضلاع **مثلث بزرگ** 38 , 20 , 30 سانتی متر باشد ، اندازه اضلاع مثلث دیگر چه قدر است؟

(الف) 38 , 20 , 30 (ب) 60 , 40 , 76 (ج) 45 , 30 , 57 (د) 15 , 10 , 19

4 - **نسبت تشابه** دو تا مثلث ، برابر با $\frac{2}{3}$ است . اگر اندازه اضلاع **مثلث کوچک** 38 , 20 , 30 سانتی متر باشد ، اندازه اضلاع مثلث دیگر چه قدر است؟

(الف) 38 , 20 , 30 (ب) 60 , 40 , 76 (ج) 45 , 30 , 57 (د) 15 , 10 , 19

5 - **نسبت تشابه** دو تا مثلث ، برابر با $\frac{1}{4}$ است . اگر اندازه اضلاع **مثلث کوچک** 16 , 12 , 8 سانتی متر باشد ، اندازه اضلاع مثلث دیگر چه قدر است؟

(الف) 16 , 12 , 8 (ب) 2 , 3 , 4 (ج) 32 , 48 , 64 (د) 16 , 24 , 32

6 - اگر مقیاس نقشه ی یک محل 1 به 100 بوده و در روی نقشه ، زاویه بین دو کوچه 30 درجه باشد ، زاویه این دو کوچه در محل واقعی چند درجه است؟

(الف) 30 درجه (ب) 60 درجه (ج) 15 درجه (د) 300 درجه

7 - نسبت تشابه دو تا مربع 3 به 5 است. اگر اندازه ضلع مربع بزرگ 20cm باشد، اندازه ضلع مربع کوچک چه قدر است؟

- (الف) 12cm (ب) 144cm (ج) 12cm^2 (د) 144cm^2)

8 - نسبت تشابه دو تا مربع 3 به 5 است. اگر اندازه ضلع مربع بزرگ 20cm باشد مساحت مربع کوچک چه قدر است؟

- (الف) 12cm (ب) 144cm (ج) 12cm^2 (د) 144cm^2)

9 - کدام جمله مقابل درست است؟

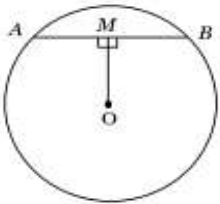
- (الف) هر دو مثلث دلخواه متشابهند ()
(ب) هر دو مستطیل دلخواه متشابهند ()
(ج) هر دو مربع دلخواه متشابهند ()
(د) هر دو لوزی دلخواه متشابهند ()

10 - کدام جمله مقابل درست است؟

- (الف) هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند ()
(ب) هر دو 6 ضلعی دلخواه متشابهند ()
(ج) هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند ()
(د) هر دو دوزنقه دلخواه متشابهند ()

11 - در دایره مقابل OM بر AB عمود است. اگر بخواهیم ثابت کنیم OM عمود منصف AB است،

کدام گزینه زیر به عنوان حکم نوشته می شود؟



- (الف) $OB = OA$ (ب) $AM = AB$ (ج) $AM = MB$ (د) $\hat{M} = 90^\circ$)

12 - با توجه به جمله مقابل، کدام یک از استدلال های زیر درست است؟ (شرکت کفشپا ، فقط کفش مشکی یا قهوه ای تولید می کند)

- (الف) اگر حمید کفش آبی داشته باشد ، حتما تا حالا از شرکت کفشپا خرید نکرده است. ()
(ب) هادی حتما کفش مشکی اش رو از شرکت کفشپا خریده است . ()
(ج) مسعود غیر از کفش مشکی و قهوه ای کفشی ندارد، پس حتما حداقل یکبار از این شرکت خرید داشته است. ()
(د) حمید فقط کفش این شرکت را می پوشد، پس دیروز در مهمانی کفش های سفید برای او نبوده است. ()

13 - از جملات " پرندگان نوعی حیوانند " و " برخی از پرندگان سبز رنگ هستند " کدام نتیجه زیر حاصل نمی شود؟

- (الف) همه پرندگان سبز رنگ هستند ()
(ب) برخی از حیوانات سبز رنگ نیستند ()
(ج) برخی از پرندگان سبزرنگ نیستند ()
(د) برخی از حیوانات سبز رنگ هستند ()

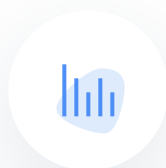
14 - کدام گزینه زیر همواره درست است؟

- (الف) مربع نوعی لوزی است که قطرهايش برابرند. ()
(ب) هر چهار ضلعی که قطرهايش برهم عمود باشند ، مربع است . ()
(ج) هر متوازی الاضلاع که قطرهايش برهم عمود باشند ، مربع است. ()
(د) هر دوزنقه ای که دو زاویه 90 درجه داشته باشد ، مربع است . ()



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد