



توان و ریشه

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 4 - توان و ریشه در اعداد

تهیه و تدوین: اصغر بابائی - دبیر ریاضی

درس اول: توان صحیح

سال های قبل با اعداد توان دار آشنا شده اید. برای آموختن مفاهیم و نکات جدید از اعداد توان دار به **تعریف ریاضی توان** اشاره می کنیم:

$$\begin{cases} a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ مرتبه}} \\ a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \end{cases}$$

نکته: همان طور که از تعریف مشخص است هر عدد غیر صفر اگر به توان صفر برسد، حاصل آن یک است. البته توجه کنید که صفر به توان صفر تعریف نشده است، یعنی پایه و توان به تنهایی می توانند صفر باشند، ولی هم زمان هر دو نمی توانند عدد صفر باشند. به مثال های زیر توجه کنید:

$$712^0 = 1, \quad (-3)^0 = 1, \quad 3/4^0 = 1, \quad 100000^0 = 1, \quad \left(\frac{2}{9}\right)^0 = 1$$

و یا مثال های زیر:

$$0^4 = 0, \quad 0^{15} = 0, \quad 0^{100} = 0, \quad 0^{0/5} = 0, \quad 0^{\frac{3}{4}} = 0$$

در سال های قبل با نکات و فرمول های مختلفی در محاسبات اعداد توان دار آشنا شدید. با مرور آن ها، نکات جدیدی هم به آن ها اضافه کرده و مثال های مختلفی را حل خواهیم کرد.

$$a^n + b^m = (\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ مرتبه}}) + (\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{m \text{ مرتبه}})$$

نکته 1:

$$2^4 + 5^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) + (5 \times 5 \times 5) = 16 + 125 = 141$$

مثال 1:

$$3^2 + 4^3 = (3 \times 3) + (4 \times 4 \times 4) = 9 + 64 = 73$$

مثال 2:

$$(-5)^3 + (-9)^2 = (-5 \times -5 \times -5) + (-9 \times -9) = -125 + 81 = -41$$

مثال 3:

$$8^3 + 8^2 = (8 \times 8 \times 8) + (8 \times 8) = 512 + 64 = 576$$

مثال 4:

$$5^2 + 7^2 = (5 \times 5) + (7 \times 7) = 25 + 49 = 74$$

مثال 5:

$$a^n - b^m = (\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \text{ مرتبه}) - (\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_m \text{ مرتبه})$$

نکته 2 :

$$7^3 - 6^2 = (7 \times 7 \times 7) - (6 \times 6) = 343 - 36 = 307$$

مثال 1 :

$$15^2 - 4^4 = (15 \times 15) - (4 \times 4 \times 4 \times 4) = 225 - 256 = -31$$

مثال 2 :

$$(-1)^4 - (-2)^3 = (-1 \times -1 \times -1 \times -1) - (-2 \times -2 \times -2) = (+1) - (-8) = +9$$

مثال 3 :

$$10^4 - 10^3 = (10 \times 10 \times 10 \times 10) - (10 \times 10 \times 10) = 10000 - 1000 = 9000$$

مثال 4 :

$$14^2 - 10^2 = (14 \times 14) - (10 \times 10) = 196 - 100 = 96$$

مثال 5 :

$$a^n \times b^m = (\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \text{ مرتبه}) \times (\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_m \text{ مرتبه})$$

نکته 3 :

$$3^4 \times 5^3 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5 \times 5) = 81 \times 125 = 10125$$

مثال 1 :

$$8^2 \times 2^5 = (8 \times 8) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = 64 \times 32 = 2048$$

مثال 2 :

$$2 / 3^2 \times 1 / 2^3 = (2 / 3 \times 2 / 3) \times (1 / 2 \times 1 / 2 \times 1 / 2) = 5 / 29 \times 1 / 728 = 9 / 14112$$

مثال 3 :

$$a^n \div b^m = (\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \text{ مرتبه}) \div (\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_m \text{ مرتبه})$$

نکته 4 :

$$20^3 \div 4^2 = (20 \times 20 \times 20) \div (4 \times 4) = 8000 \div 16 = 500$$

مثال 1 :

$$12^2 \div 4^3 = (12 \times 12) \div (4 \times 4 \times 4) = 144 \div 64 = \frac{144}{64} = 2 / 25$$

مثال 2 :

$$17^2 \div 5^4 = (17 \times 17) \div (5 \times 5 \times 5 \times 5) = 289 \div 625 = \frac{289}{625}$$

مثال 3 :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

نکته 5 :

$$3^7 \times 3^8 = 3^{7+8} = 3^{15}$$

مثال 1 :

$$5^4 \times 5^2 = 5^{4+2} = 5^6$$

مثال 2 :

$$8^3 \times 8^2 \times 8^7 = 8^{3+2+7} = 8^{12}$$

مثال 3 :

$$(-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^{3+5} = (-2)^8 = 2^8$$

مثال 4 :

$$9 \times 9^2 \times 9^3 \times 9^4 = 9^{1+2+3+4} = 9^{10}$$

مثال 5 :

$$1 / 5^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^7 = 1 / 5^{4+7} = 1 / 5^{11}$$

مثال 6 :

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

نکته 6 :

$$4^6 \times 3^6 = (4 \times 3)^6 = 12^6$$

مثال 1 :

$$5^3 \times 10^3 = (5 \times 10)^3 = 50^3$$

مثال 2 :

$$3^9 \times 2^9 \times 5^9 = 30^9$$

مثال 3 :

$$(-4)^7 \times (+5)^7 = (-20)^7$$

مثال 4 :

$$(-2)^4 \times (-4)^4 \times (-5)^4 = (-40)^4 = 40^4$$

مثال 5 :

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

نکته 7 :

$$11^7 \div 11^3 = 11^{7-3} = 11^4$$

مثال 1 :

$$9^5 \div 9^3 = 9^{5-3} = 9^2$$

مثال 2 :

$$\frac{6^{13}}{6^5} = 6^{13-5} = 6^8$$

مثال 3 :

$$10^8 \div 10^{15} = 10^{8-15} = 10^{-7}$$

مثال 4 :

$$(7^9 \div 7) \div 7^3 = 7^8 \div 7^3 = 7^5$$

مثال 5 :

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m \quad \text{یا} \quad a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

نکته 8 :

$$12^8 \div 3^8 = (12 \div 3)^8 = 4^8$$

مثال 1 :

$$20^3 \div 2^3 = (20 \div 2)^3 = 10^3$$

مثال 2 :

$$\frac{38^5}{19^5} = 2^5$$

مثال 3 :

$$42^2 \div 13^2 = \left(\frac{42}{13}\right)^2$$

مثال 4 :

$$7^8 \div 14^8 = \left(\frac{7}{14}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

مثال 5 :

$$(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$$

نکته 9 : توان قدیم و جدید

$$(7^3)^4 = 7^{3 \times 4} = 7^{12}$$

مثال 1 :

$$(10^2)^8 = 10^{2 \times 8} = 10^{16}$$

مثال 2 :

$$(-2^3)^5 = (-2)^{3 \times 5} = (-2)^{15}$$

مثال 3 :

$$(-2^3)^2 = (-2)^{3 \times 2} = (-2)^6 = 2^6$$

مثال 4 :

$$((a^r)^s)^t = ((a^r)^s)^t = a^{r \times s \times t} = a^{rst}$$

مثال 5 :

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}$$

نکته 10 :

$$10^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{+1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$$

مثال 1 :

$$10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{+2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

مثال 2 :

$$4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{+3} = \frac{1}{4^3} \Rightarrow 4^{-3} = \frac{1}{64}$$

مثال 3 :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{+4} = \frac{5^4}{3^4}$$

مثال 4 :

$$\frac{7^{-4}}{8^{-2}} = \frac{8^2}{7^4}$$

مثال 5 :

$$\frac{9^3 \times 10^{-2}}{9^{-5}} = \frac{9^3 \times 9^5}{10^2} = \frac{9^8}{10^2}$$

مثال 6 :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

یعنی اگر توان عددی به صورت کسری باشد، می توان به صورت رادیکالی نوشت که صورت کسر، در توان عدد زیر رادیکال قرار می گیرد و مخرج کسر هم، فرجه رادیکال می باشد.

$$7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{49}$$

مثال 1:

$$100^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{100^3} = \sqrt[2]{1000000} = 1000$$

مثال 2:

$$2^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{1024}$$

مثال 3:

$$\sqrt[7]{11^3} = 11^{\frac{3}{7}}$$

مثال 4:

$$20^{1/5} = 20^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{20^3} = \sqrt[2]{8000}$$

مثال 5:

$$9^{0/75} = 9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{9^3} = \sqrt[4]{729}$$

مثال 6:

نکته: می توان با استفاده از این نکات، سوالات به ظاهر خیلی سخت را حل کرد که به یک مورد زیر اشاره می شود:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8^5} \times \sqrt[2]{4^7} &= 8^{\frac{5}{3}} \times 4^{\frac{7}{2}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} \times (2^2)^{\frac{7}{2}} = \\ &= 2^{\frac{15}{3}} \times 2^{\frac{14}{2}} = 2^5 \times 2^7 = 2^{12} \end{aligned}$$

تکالیف: کاردرکلاس صفحات 61 و 62 و 63 و تمرینات صفحات 63 و 64 را در کتاب بنویسید

$3^4 \times 3^5 \times 3^7 =$	$3^4 \times 3^5 \times 15^9 =$
$5^2 \times 4^2 \times 20^6 =$	$3^7 \times 3^4 \times 8^{11} \times 24^2 =$
$\frac{4^5 \times 4^7 \times 10^{12}}{5^3 \times 8^3} =$	$\frac{3^{10} \times 4^{10} \times 2^7 \times 6^7}{12^8 \times 12^8} =$
$\left(\frac{3}{5}\right)^7 \times \left(\frac{5}{4}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 =$	$\frac{3^9 \times 8^9 \times 4^3 \times 6^3}{4^{12} \times 3^{12}} =$
$(3/5)^2 \times \left(\frac{7}{2}\right)^8 \times 3^{10} =$	$7^5 \times 32 \times 14^6 =$
$64 \times 27 \times 12^7 =$	$27 \times 64 \times 125 \times 216 =$
$5^{-3} =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$
$\frac{14^8 \times 2^{-3}}{7^3} =$	$\frac{14^8 \times 2^{-3}}{7^3 \times 14^{-5}} =$
$a \times a^2 \times a^3 \times \dots \times a^{99} =$	$6^{-2} \times 4^{-2} \times 24^7 =$
$3^{99} + 3^{99} + 3^{99} =$	$(4^7 + 4^7 + 4^7 + 4^7) \times 3^8 =$
$\frac{3(a \times a \times a)}{a + a + a} =$	$\frac{a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3}{b^3 \times b^3 \times b^3 \times b^3} =$
$\frac{(a^{10})^3 \div a^7}{(a^8)^2 \div a^{11}} =$	$\frac{8^3}{2^4} \div \frac{2^7}{8^8} =$
$(8/4)^7 \div (0/007)^7 =$	$(6/3)^7 \div (0/009)^7 =$
$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 =$	$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 =$
$5^{-1} + 3^{-2} =$	$(5 + 3)^{-2} =$
$(5^{-1} + 3^{-2})^{-1} =$	$(5^{-1} + 3^{-2})^{-2} =$

درس دوم: نماد علمی

در علوم مختلف مثل ریاضیات یا شیمی یا فیزیک و در برخی موارد با اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک برخورد می کنیم . مثل موارد زیر :

سرعت حرکت نور :	30000000000 متر بر ثانیه
قطر متوسط گلبول های قرمز :	0/000007 میلی متر
ضخامت یک برگ کاغذ معمولی	0/0016 سانتی متر
شعاع کره خورشید	69500000000 سانتی متر
قطر یک باکتری	0/0000005 متر
قطر کره زمین	13000000000 سانتی متر
فاصله کره مریخ از کره زمین	9170000000000 سانتی متر
جرم یک الکترون :	9109 0/000000000000000000000000000000 کیلوگرم

با دقت در اعداد مثال های بالا ، اولین چیزی که به ذهن ما می رسد که کار کردن با این اعداد و به یاد سپردن و محاسبه و نوشتن مکرر آن ها ، خیلی مشکل است و محاسبات ما را سخت تر می کند .

در ریاضیات با استفاده از مفهوم توان ها برای این مشکل چاره ای پیدا کرده اند که نوشتن این اعداد به صورت **نماد علمی** می باشد .

در نماد علمی ، اعداد به صورت **حاصل ضرب یک عدد (بعضاً اعشاری)** در توانی از عدد **10** نوشته می شوند و برای این نگارش **دو شرط مهم** وجود دارد که در مثال های زیر با آن دو شرط آشنا می شویم :

$$30000 = 3 \times 10000 = 3 \times 10^4$$

$$254000000 = 2 / 54 \times 100000000 = 2 / 54 \times 10^8$$

$$0 / 27 = 2 / 7 \times 0 / 1 = 2 / 7 \times \frac{1}{10} = 2 / 7 \times 10^{-1}$$

دقت کنید که اگر مثال های بالا را به صورت زیر بنویسیم به عنوان **نماد علمی مورد قبول نیست** :

$$30000 = 30 \times 1000 = 30 \times 10^3$$

$$254000000 = 25 / 4 \times 10000000 = 25 / 4 \times 10^7$$

$$0 / 27 = 27 \times 0 / 01 = 27 \times \frac{1}{100} = 27 \times 10^{-2}$$

هر چند که در این مثال ها ، مساوی بودن دو طرف مشکلی ندارد ولی این ها به عنوان نماد علمی مورد قبول نیست .

دلیل این مورد مربوط به **تعریف نماد علمی** است که به صورت زیر است :

به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عددی صحیح است.

نتیجه : عددی که در سمت چپ علامت ضرب نوشته می شود ، باید عددی کوچک تر از 10 بوده و از عدد 1 کوچک تر نباشد . یعنی :

مثال اول :

$$52 \dots = 52 \times 1 \dots = 52 \times 10^5 = 5/2 \times 1 \dots = 5/2 \times 10^6$$

یا در مثال زیر توجه کنید :

$$2154200 = 21542 \times 100 = 21542 \times 10^2 = 2/1542 \times 1 \dots = 2/1542 \times 10^6$$

$$0/000127 = 1/27 \times 10^{-4}$$

مثال سوم :

$$253 = 2/53 \times 10^{+2}$$

مثال چهارم :

$$380000 = 3/8 \times 10^{+5}$$

مثال پنجم :

$$0/000008921 = 8/921 \times 10^{-6}$$

مثال ششم :

تکالیف : کار در کلاس صفحه 66 و تمرینات صفحه 67 را در دفتر بنویسید .

سوالات چهار گزینه ای

- 1 - عدد $0/004718$ برابر با کدام از اعداد زیر است ؟
 الف) $0/4718 \times 10^{+2}$ () ب) $0/4718 \times 10^{-3}$ () ج) $4/718 \times 10^{-3}$ () د) $0/04718 \times 10^{+2}$ ()
- 2 - عدد $5/3 \times 10^{-4}$ برابر با کدام از اعداد زیر است ؟
 الف) $0/00053$ () ب) $400 \times 5/3$ () ج) $0/4 \times 5/3$ () د) 530000 ()
- 3 - نمایش علمی عدد $79/451 \times 10^5$ برابر با کدام گزینه زیر است ؟
 الف) $794/51 \times 10^4$ () ب) $7/9451 \times 10^6$ () ج) $7/9151 \times 10^6$ () د) $7/9451 \times 10^7$ ()
- 4 - نمایش علمی عدد $2879/45 \times 10^4$ برابر با کدام گزینه زیر است ؟
 الف) $2/87945 \times 10^7$ () ب) $2/87945 \times 10^4$ () ج) $28/7945 \times 10^6$ () د) $28/7945 \times 10^2$ ()
- 5 - عدد $0/00471 \times 10^{+4}$ برابر با کدام گزینه زیر است ؟
 الف) $4/71 \times 10^3$ () ب) $4/71 \times 10^4$ () ج) $4/71 \times 10^7$ () د) $4/71 \times 10$ ()
- 6 - عدد 5247800000 برابر با کدام از اعداد زیر است ؟
 الف) $5/247 \times 10^{+5}$ () ب) $5/2478 \times 10^{+9}$ () ج) $52/478 \times 10^{+9}$ () د) $52/478 \times 10^{+5}$ ()
- 7 - سمت راست کدام تساوی زیر، نماد علمی عدد سمت چپ تساوی است ؟
 الف) $\frac{1}{200} = 0/5 \times 10^{-2}$ () ب) $14/2 \times 10^{-4} = 142 \times 10^{-5}$ ()
 ج) $2/5 \times 2 \times 10^6 = 5 \times 10^5$ () د) $10^2 \times 0/00621 = 6/21 \times 10^{-1}$ ()
- 8 - کدام گزینه زیر نماد علمی عدد $\frac{1}{11}$ تا چهار رقم اعشار می باشد ؟
 الف) $0/909 \times 10^{-3}$ () ب) $9/09 \times 10^{-3}$ () ج) $0/909 \times 10^{-2}$ () د) $9/09 \times 10^{-2}$ ()

درس سوم: ریشه گیری

به حاصل هر یک از عبارت‌های زیر توجه کنید.

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

$$\left(+\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$$

$$4^2 = +16$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$$

$$(-\sqrt{5})^2 = +5$$

$$\left(-\frac{1}{7}\right)^2 = +\frac{1}{49}$$

$$(-4)^2 = +16$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$$

مربع هر یک اعداد به شکل‌های مختلف محاسبه شده است. در مثال‌های بالا :

اعداد 4 و -4 ریشه‌های دوم عدد 16 هستند و آن را به صورت $+\sqrt{16}$ ، $-\sqrt{16}$ نشان می‌دهیم.

اعداد $\frac{2}{3}$ ، $-\frac{2}{3}$ ریشه‌های دوم عدد $\frac{4}{9}$ هستند و آن را به صورت $+\sqrt{\frac{4}{9}}$ ، $-\sqrt{\frac{4}{9}}$ نشان می‌دهیم.

اعداد $\frac{1}{7}$ ، $-\frac{1}{7}$ ریشه‌های دوم عدد $\frac{1}{49}$ هستند و آن را به صورت $+\sqrt{\frac{1}{49}}$ ، $-\sqrt{\frac{1}{49}}$ نشان می‌دهیم.

اعداد $+\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{5}$ ریشه‌های دوم عدد 5 هستند و آن را به صورت $+\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{5}$ نشان می‌دهیم.

البته می‌دانیم که ریشه‌های دوم صفر همان صفر است و داریم : $\sqrt{0} = 0$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، $+\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند.
همان‌طور که می‌دانید، عددهای منفی ریشه‌ی دوم ندارند.

به حاصل هر یک از عبارت‌های زیر توجه کنید.

$$\sqrt[3]{+8} = +2$$

$$\sqrt[3]{+125} = +5$$

$$\sqrt[3]{+27} = +3$$

$$\sqrt[3]{+\frac{1}{8}} = +\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt[3]{-125} = -5$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

مکعب هر عدد یعنی آن عدد را سه بار به خودش ضرب کنیم. مثل : $4 \times 4 \times 4 = 64$

ریشه سوم عدد 64 یعنی عددی پیدا کنیم که اگر سه بار به خودش ضرب شود حاصل 64 شود.

$$\sqrt[3]{+64} = +4$$

به این عدد 4 ، ریشه سوم عدد 64 گفته می‌شود و می‌نویسیم :

این موضوع درمورد اعداد دیگر هم می‌تواند صدق کند. مثلاً :

$$-4 \times -4 \times -4 = -64$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt[3]{-64} = -4$$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می دهیم.
هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

به حاصل هر یک از عبارت های زیر توجه کنید.

$$\sqrt{4^2} = +4 \quad | \quad \sqrt[3]{+1} = +1 \quad | \quad \sqrt[3]{+216} = +6 \quad | \quad \sqrt[3]{+\frac{8}{1000}} = +\frac{2}{10}$$

$$\sqrt{(-4)^2} = +4 \quad | \quad \sqrt[3]{-1} = -1 \quad | \quad \sqrt[3]{-216} = -6 \quad | \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10}$$

به عددی که پشت رادیکال و در بالای آن نوشته شده دقت کنید که در این مثال ها عدد 3 می باشد .
به این عدد **فُرجه رادیکال** گفته می شود و نشان دهنده ریشه چندم بودن عدد داخل رادیکال می باشد .

تکالیف : کاردرکلاس صفحه 69 را در کتاب بنویسید :

ضرب و تقسیم رادیکال ها

اگر فرجه دو یا چند رادیکال مثل هم باشد به راحتی می توانیم چند رادیکال را به هم ضرب یا تقسیم کنیم . مثل :

$$\sqrt{8} \times \sqrt{5} = \sqrt{8 \times 5} = \sqrt{40}$$

$$\sqrt{10} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{10 \times 6 \times 2} = \sqrt{120}$$

$$\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{3 \times 7} = \sqrt[4]{21}$$

$$\sqrt[8]{10} \times \sqrt[8]{3} \times \sqrt[8]{5} = \sqrt[8]{10 \times 3 \times 5} = \sqrt[8]{150}$$

$$\sqrt{24} \div \sqrt{8} = \sqrt{24 \div 8} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{70}{10}} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt[4]{38} \div \sqrt[4]{19} = \sqrt[4]{38 \div 19} = \sqrt[4]{2}$$

$$\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\frac{32}{4}} = \sqrt[5]{8}$$

$$\sqrt[3]{28} \div \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{28 \div 7} = \sqrt[3]{4}$$

$$\frac{\sqrt{35} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{35 \times 3}{5}} = \sqrt{21}$$

$$(\sqrt[7]{6} \div \sqrt[7]{2}) \times \sqrt[7]{5} = \sqrt[7]{3 \times 5} = \sqrt[7]{15}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{20}} = \sqrt{2}$$

به طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم :

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$$

همچنین اگر $b \neq 0$ داریم :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

تکالیف : کاردرکلاس و تمرینات صفحات 70 و 71 و 72 را در کتاب بنویسید :

ساده کردن عبارتهای رادیکالی

اگر دقت کنید اعداد رادیکالی به شرط برابر بودن فرجه آن ها ، به راحتی به هم ضرب یا تقسیم می شوند ولی جمع و تفریق به این آسانی نیست :

$$\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$$

$$\sqrt{25-16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$$

$$\sqrt{11} + \sqrt{5} \neq \sqrt{16}$$

$$\sqrt{100} - \sqrt{81} \neq \sqrt{19}$$

برای این که بتوانیم تعدادی از اعداد رادیکالی را جمع یا تفریق کنیم ، باید مثل موارد زیر امکان تغییر در آن ها وجود داشته باشند تا بتوانیم جمع یا تفریق را انجام دهیم :

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

به تغییرات زیر توجه کنید از این روش برای محاسبات زیر استفاده خواهیم کرد :

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = 10\sqrt{5}$$

$$\sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \times 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$$

$$2 \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} = \sqrt[4]{16 \times 5} = \sqrt[4]{80}$$

با توجه به موارد زیر در مثال های زیر تغییر ایجاد نموده و توانسته ایم جمع یا تفریق انجام دهیم .
اگر امکان تغییر در رادیکال ها وجود نداشت هباید امکان جمع و تفریق هم به آسانی ممکن نخواهد بود .

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} = \sqrt{75}$$

$$\sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{9 \times 5} - \sqrt{4 \times 5} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 1\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{200} + 3\sqrt{2} - \sqrt{8} &= \sqrt{100 \times 2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{4 \times 2} = \\ &= 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2} = \sqrt{121 \times 2} = \sqrt{242}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{8} + \sqrt{32} + 5\sqrt{2} - \sqrt{18} &= \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{9 \times 2} = \\ &= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2} = \sqrt{64 \times 2} = \sqrt{128}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{250} &= \sqrt[3]{27 \times 2} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{125 \times 2} = \\ &= 3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = \sqrt[3]{16}\end{aligned}$$

گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی یا آسان تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛

به طور مثال برای محاسبه $\frac{20}{\sqrt{2}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم؛ در حالی که می توانیم مخرج کسر را به صورت زیر گویا کنیم :

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{20} \times \sqrt{2}}{\cancel{2}} = 10\sqrt{2}$$

به این کار ، **گویا کردن مخرج کسر** می گویند .

اگر دقت کنید مخرج کسر عددی گنگ بود که با یک ضرب ساده به شکلی درآمده که مخرج کسر عددی گویا است .

برای گویا کردن مخرج انواع کسرها روش های متعددی وجود دارد که ما در این جا به دو روش معمول اشاره می کنیم:

روش اول : این روش در مورد کسرهائی است که مخرج آن ها شامل **یک جمله رادیکالی** بوده و جمع یا تفریق در مخرج نباشد . مثل موارد زیر :

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \quad \frac{-2}{\sqrt{5}} \quad \frac{10}{\sqrt{30}} \quad \frac{12}{\sqrt{6}} \quad \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{15}} \quad \frac{9}{2\sqrt{12}} \quad \frac{4}{5\sqrt{2}}$$

برای گویا کردن مخرج این کسرها ، **صورت و مخرج کسر را در همان عدد مخرج ضرب می کنیم :**

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{10}{\sqrt{30}} \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}} = \frac{10\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$\frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{15}} \times \frac{3\sqrt{15}}{3\sqrt{15}} = \frac{15\sqrt{45}}{9 \times 15} = \frac{\sqrt{45}}{9} = \frac{\sqrt{9 \times 5}}{9} = \frac{3\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$-\frac{9}{2\sqrt{12}} = -\frac{9}{2\sqrt{12}} \times \frac{2\sqrt{12}}{2\sqrt{12}} = -\frac{18\sqrt{12}}{4 \times 12} = -\frac{18\sqrt{4 \times 3}}{4 \times 12} = -\frac{36\sqrt{3}}{4 \times 12} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{27}}{4}$$

$$-\frac{4}{5\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{50}} = -\frac{4}{\sqrt{50}} \times \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = -\frac{4\sqrt{50}}{50} = -\frac{2\sqrt{50}}{25} = -\frac{2 \times 5\sqrt{2}}{25} = -\frac{2\sqrt{2}}{5} = -\frac{\sqrt{8}}{5}$$

دقت کنید که گویا کردن مخرج ، همواره باعث گویا شدن عدد صورت کسر نخواهد شد و فقط مخرج کسر به صورت عدد گویا در می آید .

روش دوم : این روش در مورد کسرهائی است که مخرج آن ها شامل **یک جمله رادیکالی با فرجه 3** بوده و جمع یا تفریق در مخرج نباشد مثل موارد زیر :

$$\frac{8}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{-20}{\sqrt[3]{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{10}}$$

در این کسرها ، چون در مخرج ، فرجه رادیکال 3 می باشد و باید به توان 3 برسد تا عدد زیر رادیکال از آن خارج شود به این دلیل ، صورت و مخرج کسر را **دو بار در عدد مخرج** ضرب می کنیم :

$$\frac{8}{\sqrt[3]{4}} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{8 \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4}} = \frac{8 \times (\sqrt[3]{4})^2}{4} = \frac{2 \times \sqrt[3]{16}}{1}$$

$$-\frac{20}{\sqrt[3]{5}} = -\frac{20}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = -\frac{20 \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5}} = -\frac{20 \times (\sqrt[3]{5})^2}{5} = -\frac{4 \times \sqrt[3]{25}}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \times \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} \times \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9}} = \frac{(\sqrt[3]{9})^2}{9} = \frac{\sqrt[3]{81}}{9}$$

$$\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{10}} \times \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10}} \times \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{2000}}{10}$$

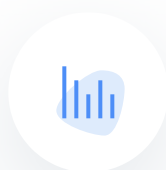
برای گویا کردن کسرهائی که مخرج آن ها به شکل دیگری می باشند ، مثلا مخرج دوجمله ای باشند در این صورت از روش های دیگری استفاده می کنیم که بعدا در این مورد بیشتر خواهید خواند .

تکالیف : فعالیت صفحه 75 و کاردر کلاس و تمرینات صفحات 76 و 77 را در کتاب بنویسید .



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد