



خط و معادله های خطی

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 6 - معادله خط

تهیه و تدوین: اصغر بابائی - دبیر ریاضی

مفهوم معادله خط

مثال 1: به شکل مقابل خوب نگاه کنید که چند نقطه روی صفحه مختصات رسم شده است:

اگر دقت کنید مختصات نقاط به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} +2 \\ +2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} +4 \\ +4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر دقت کنید تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که **طول و عرض شان با هم برابر است**.

البته فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که

طول و عرض شان با هم برابر است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم

یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به

صورت زیر می نویسیم:

$$y = x$$

مثال 2: به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} +1 \\ +2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} +2 \\ +4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر دقت کنید تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که **عرض شان دو برابر طولشان** است

و باز هم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارند که

عرض شان دو برابر طولشان است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم

یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به

صورت زیر می نویسیم:

$$y = 2x$$

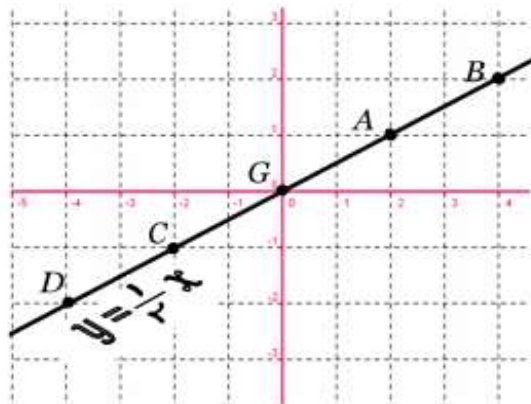
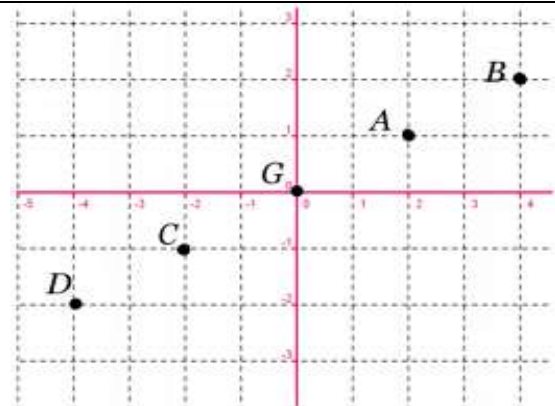
مثال 3: به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم :

$$A = \begin{bmatrix} +2 \\ +1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} +4 \\ +2 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ و } D = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ و } G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر دقت کنید تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که **عرض شان نصف طولشان** است و باز هم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که

عرض شان نصف طولشان است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به صورت زیر می نویسیم :

$$y = \frac{1}{2}x$$

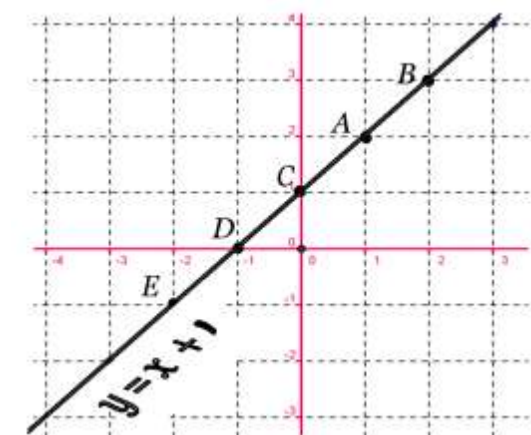
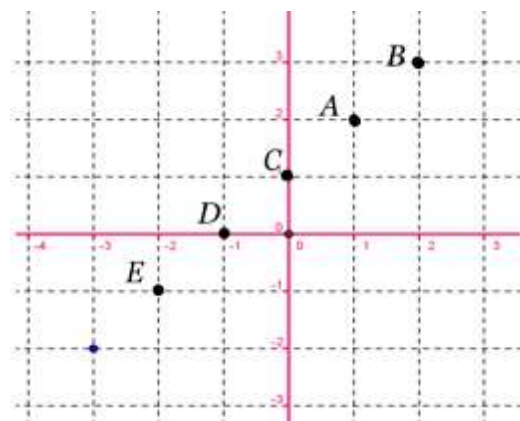


مثال 4: به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم :

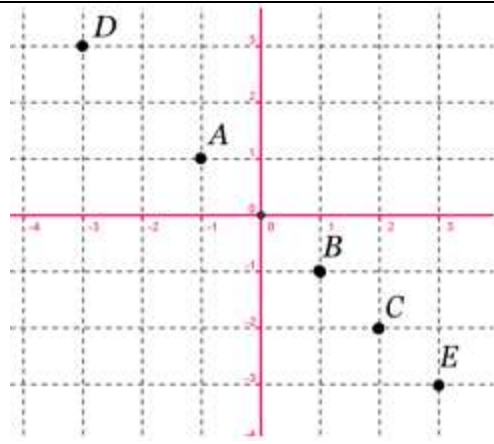
$$A = \begin{bmatrix} +1 \\ +2 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} +2 \\ +3 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } D = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } E = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که **عرض شان یک واحد بزرگ تر از طولشان** است و باز هم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که **عرض شان یک واحد بزرگ تر از طولشان** است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به صورت زیر می نویسیم :

$$y = x + 1$$



مثال 5: به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم :



$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} +2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad D = \begin{bmatrix} -3 \\ +3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad E = \begin{bmatrix} +3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که عرض شان قرینه طولشان است

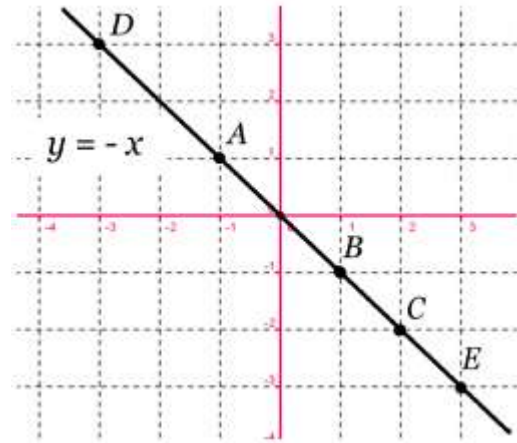
و باز هم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که

عرض شان قرینه طولشان است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم

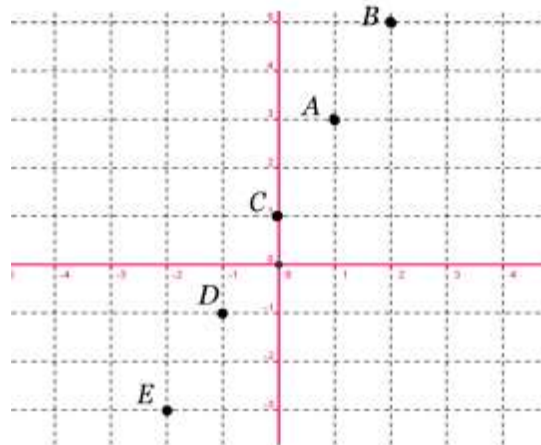
یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی

به صورت زیر می نویسیم :

$$y = -x$$



مثال 6: به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم :



$$A = \begin{bmatrix} +1 \\ +3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} +2 \\ +5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad E = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است

که عرض شان از دو برابر طولشان یک واحد بیشتر است

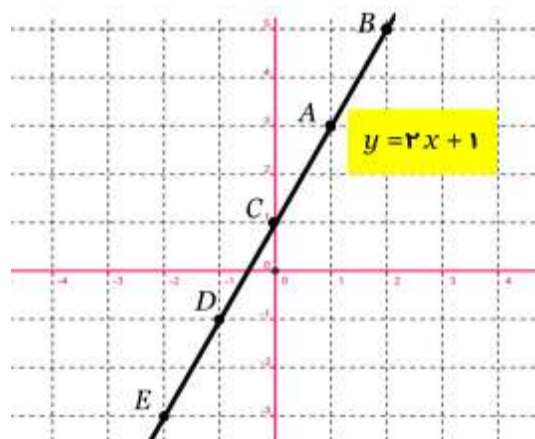
و باز هم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که

عرض شان از دو برابر طولشان یک واحد بیشتر است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت

نقطه را با هم نشان دهیم یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها

را با یک رابطه ریاضی به صورت زیر می نویسیم :

$$y = 2x + 1$$



نتیجه گیری: هر معادله که بر حسب y, x (بدرجه یک) باشد، رابطه بین طول و عرض بی نهایت نقطه را به زبان ریاضی بیان می کند که بارسم خطی راست، آن بی نهایت نقطه را روی صفحه مختصات نشان می دهیم.

رسم خطی که معادله آن داده شده است :

معمولا معادله خط را به صورت $y = ax + b$ نشان می دهیم، البته ضرورتی ندارد که فقط به این شکل نمایش داده شود . یعنی معادلاتی مثل نمونه های زیر هم معادله خط راست هستند:

$$2x + 5y = -20 \quad \text{و} \quad y - 6x = 0 \quad \text{و} \quad \frac{2x+1}{3y-4} = -1 \quad \text{و} \quad 2x + y = -5x + 2y - 10 \quad \text{و} \quad 2y + 3x = +3$$

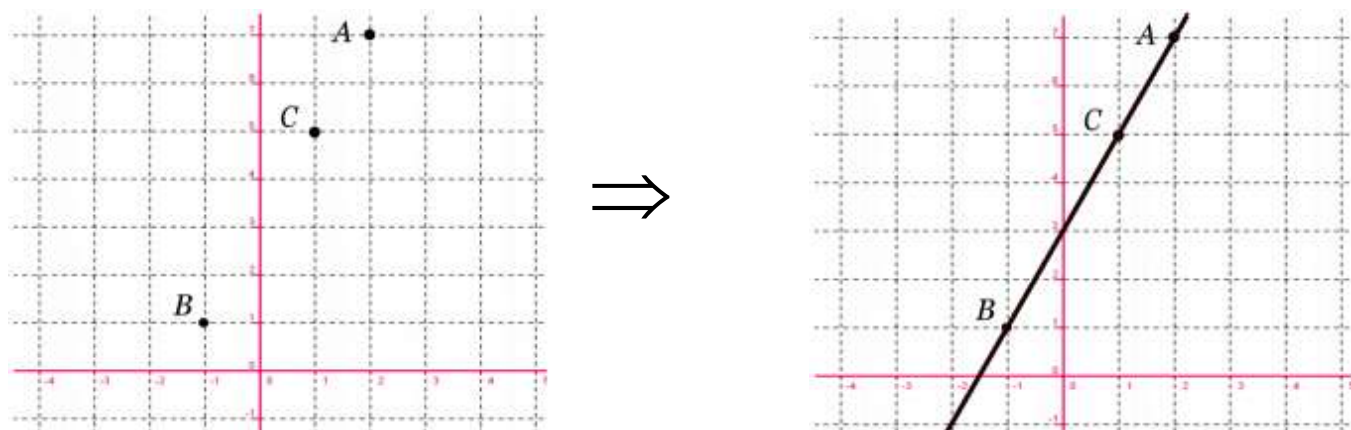
برای رسم خطی که معادله خط آن داده شده است باید حداقل دو نقطه از آن خط را پیدا کرده و خط راست را رسم می کنیم .

البته توصیه می کنیم که بیشتر از دو نقطه از خط را پیدا کنید، مثل :

مثال 1 : خط به معادله $y = 2x + 3$ را رسم کنید:

x		x	+۲	-۱	+۱	x	+۲	-۱	+۱
y		y				y	+۷	+۱	+۵
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} +۲ \\ +۷ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -۱ \\ +۱ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} +۱ \\ +۵ \end{bmatrix}$

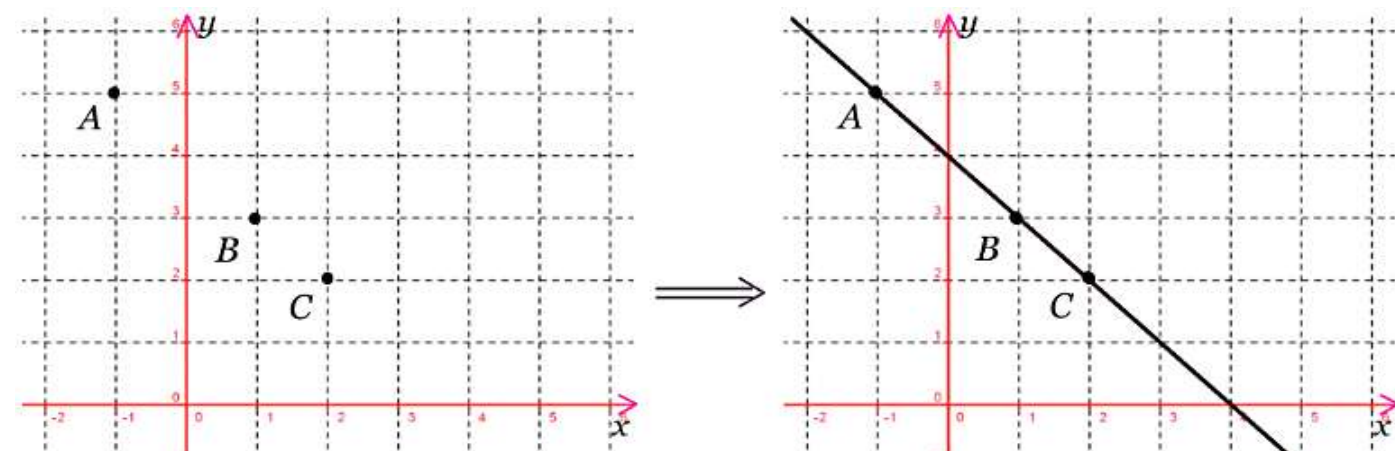
نقاط به دست آمده را روی صفحه مختصات پیدا کرده و خط را رسم می کنیم:



مثال 2 : خط به معادله $y = -x + 4$ را رسم کنید:

x		x	+۲	-۱	+۱	x	+۲	-۱	+۱
y		y				y	+۲	+۵	+۳
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} +۲ \\ +۲ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -۱ \\ +۵ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} +۱ \\ +۳ \end{bmatrix}$

حالا نقاط به دست آمده را روی صفحه مختصات پیدا کرده و خط را رسم می کنیم:

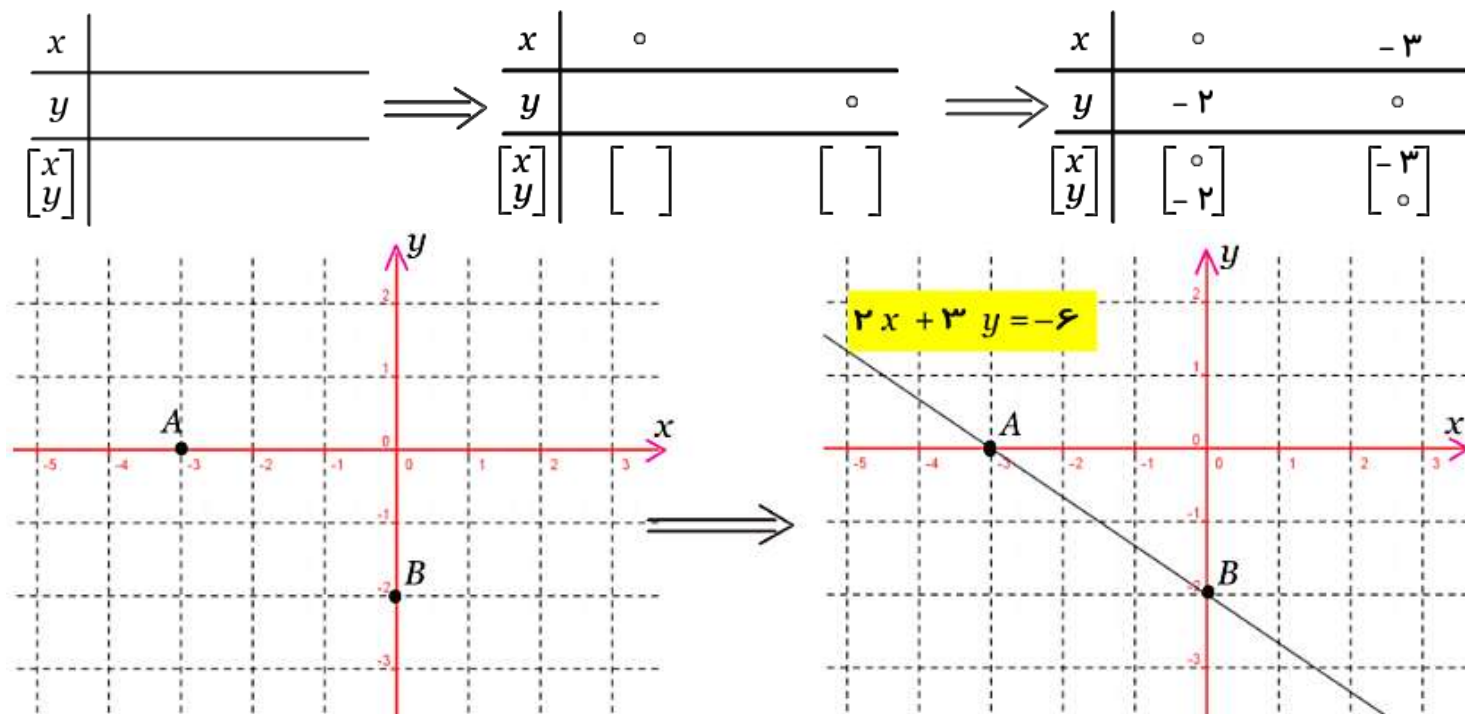


رسم خط هائی که معادله آن ها به صورت دیگر معادله خط داده شده اند:

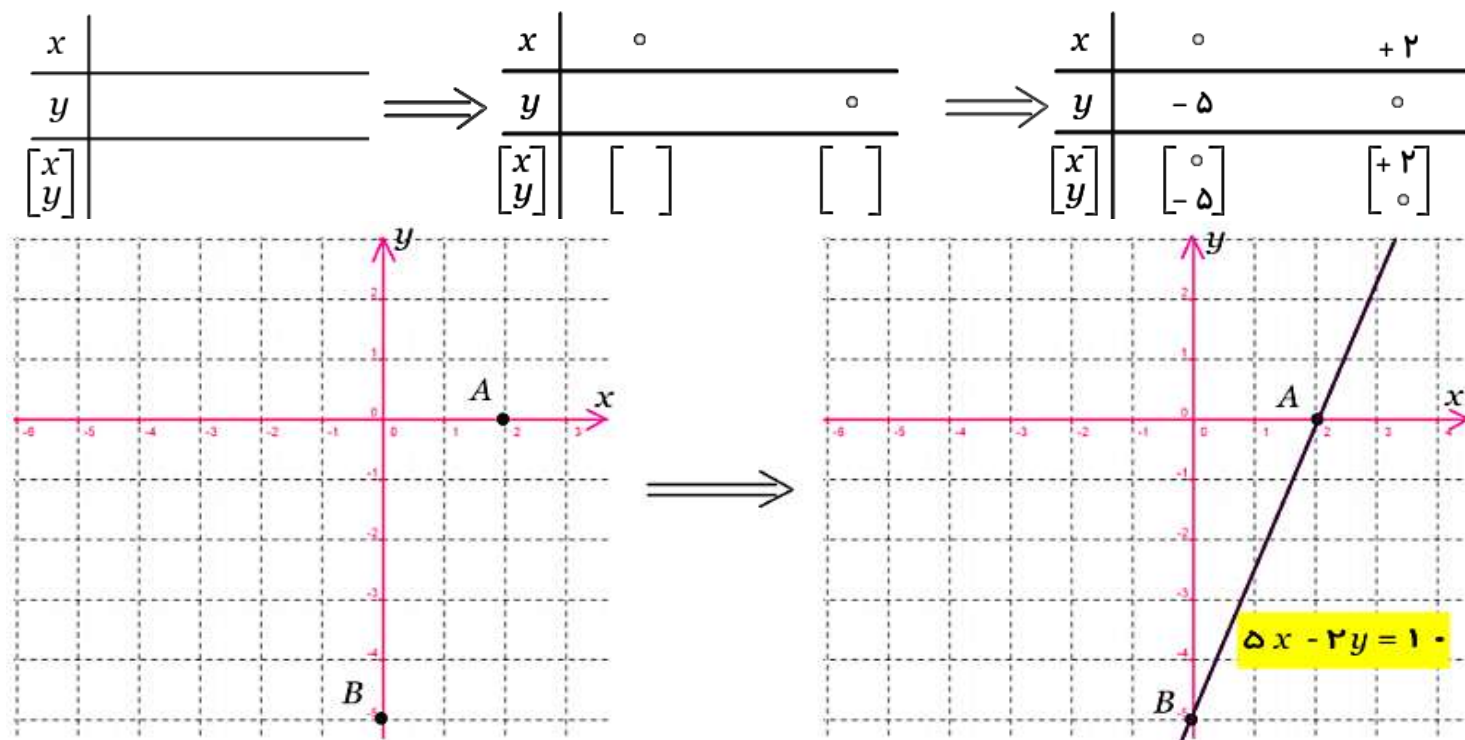
در برخی موارد، معادله خط به صورت $mx + ny = f$ داده می شود مثل: $2x + 5y = -20$ که در این موارد با این که می توانیم فرم معادله را به شکل کلی یعنی: $y = ax + b$ در آوریم ولی ضرورتی ندارد و می توان مثل نمونه های بالائی و حتی با پیدا کردن ساده دو نقطه از خط، آن را رسم کرد.

برای این کار کافی است که یک بار x را صفر در نظر بگیریم و عرض آن نقطه را پیدا کنیم و یک بار هم y صفر در نظر بگیریم و طول آن نقطه را پیدا کنیم:

مثال 1: خط به معادله $2x + 3y = -6$ را رسم کنید:



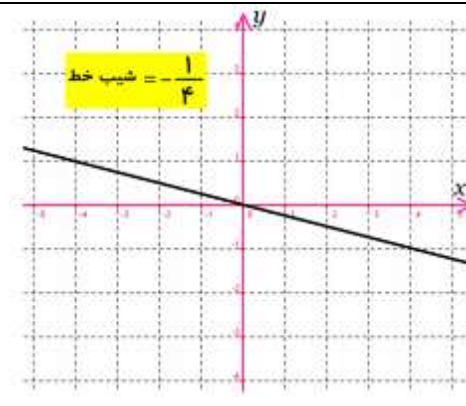
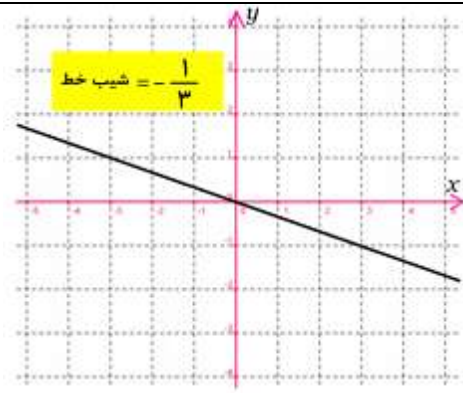
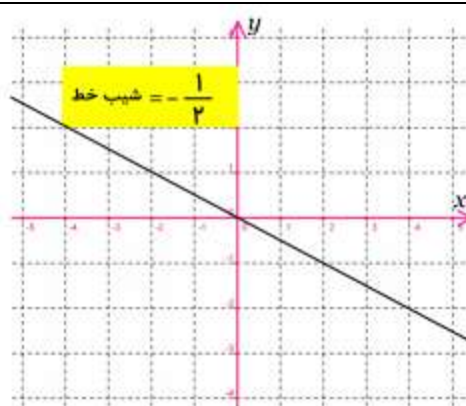
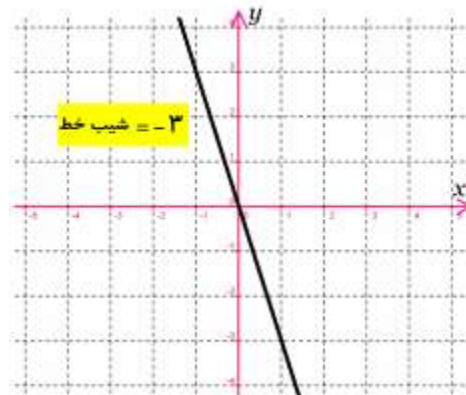
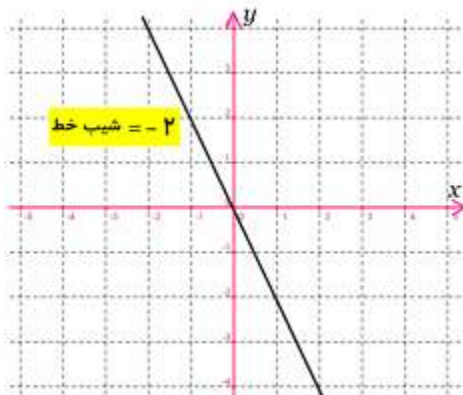
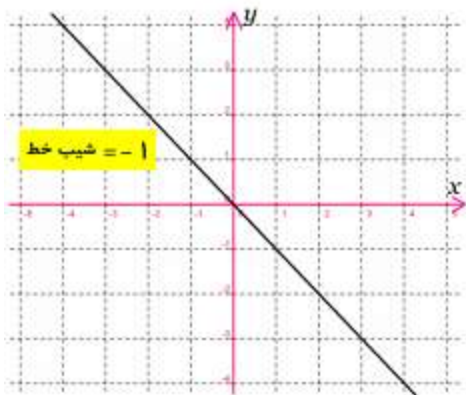
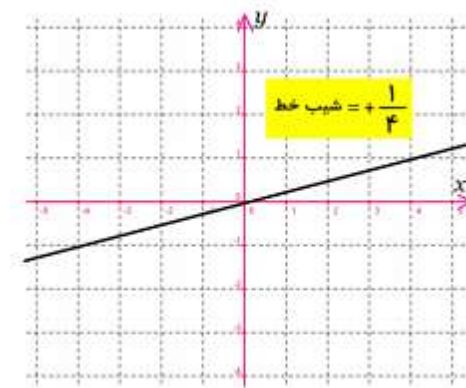
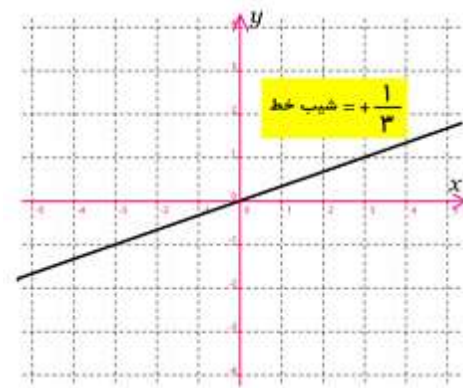
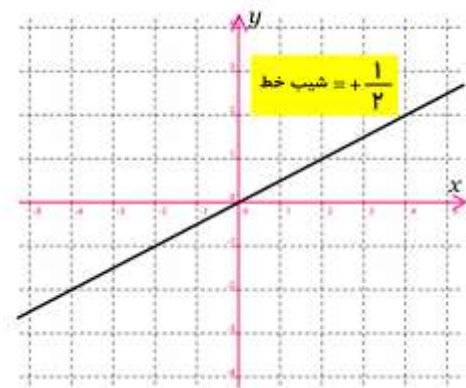
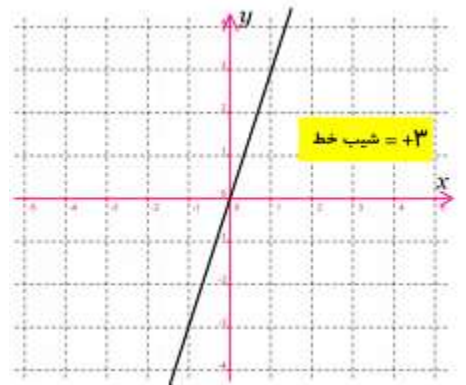
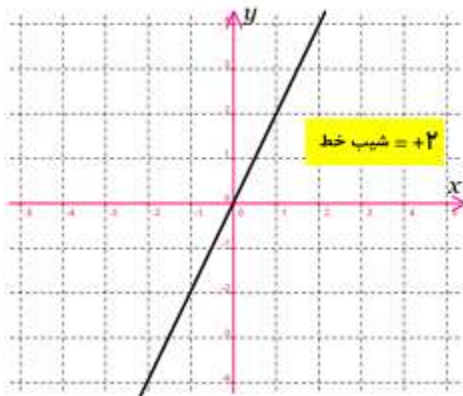
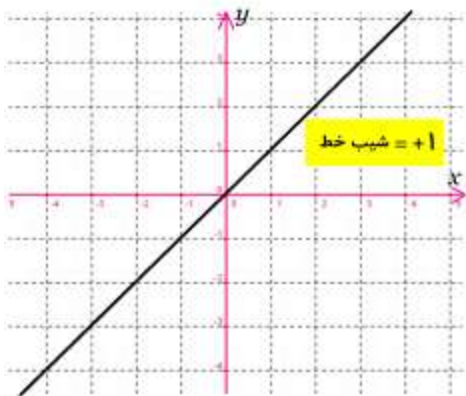
مثال 2: خط به معادله $5x - 2y = 10$ را رسم کنید:



نقطه A و B در این دو مثال بالائی به ترتیب طول از مبدا و عرض از مبدا خط هستند و در هر معادله خط می توان این دو نقطه را به صورت زیر پیدا کرد:
نکته 1: برای پیدا کردن عرض از مبدا خط، طول را در آن معادله صفر در نظر می گیریم و برای پیدا کردن طول از مبدا خط، عرض را در آن معادله صفر در نظر می گیریم.

شیب خط

شیب خط نشان گر وضعیت خط نسبت به محور طول ها می باشد و زاویه ای که خط با محور عرض ها می سازد این عدد شیب خط را تعیین می کند.
خط هائی که از سمت **ناحیه 1 به سمت ناحیه 3** می روند **شیب شان مثبت** و خط هائی که از سمت **ناحیه 2 به ناحیه 4** می روند **شیب شان منفی** است.
نمونه هائی از شیب خط ها به صورت تصویری در شکل های زیر ارائه شده است:



روش های به دست آوردن شیب خط

روش اول : استفاده از معادله خط

الف) اگر معادله خط به صورت $y = ax + b$ (حالت کلی) باشد در این صورت a شیب خط است.

مثال 1: اگر معادله خط به صورت $y = 3x + 10$ باشد در این صورت :

شیب خط = 3

شیب خط
↑
 $y = ax + b$

شیب خط = -4

مثال 2: اگر معادله خط به صورت $y = -4x + 7$ باشد در این صورت :

شیب خط = $-\frac{3}{5}$

مثال 3: اگر معادله خط به صورت $y = -\frac{3}{5}x - \frac{2}{9}$ باشد در این صورت :

ب) اگر معادله خط به صورت $mx + ny = d$ (صورت دیگر معادله خط) باشد در این صورت برای پیدا کردن شیب خط ،

$$mx + ny = d \Rightarrow \text{شیب خط} = -\frac{m}{n}$$

ضرب x را بر ضریب y تقسیم کرده و قرینه می کنیم . یعنی :

شیب خط = $-\frac{3}{11}$

مثال 1: اگر معادله خط به صورت $3x + 11y = 5$ باشد در این صورت :

شیب خط = $-\frac{-5}{2} = +\frac{5}{2}$

مثال 2: اگر معادله خط به صورت $-5x + 2y = 14$ باشد در این صورت :

روش دوم : اگر مختصات دو نقطه از خط را بدانیم مثلاً $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ باشند ، در این صورت از فرمول زیر، شیب خط را به دست می آید:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

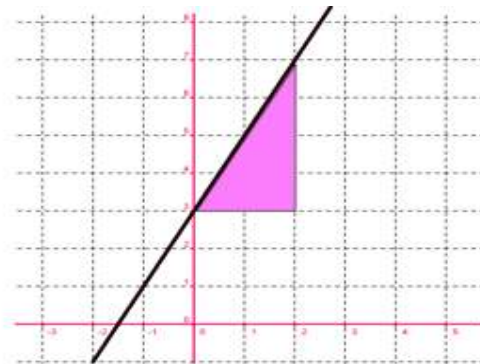
مثال 1: شیب خطی را پیدا کنید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -1 \\ +8 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -5 \\ +4 \end{bmatrix}$ می گذرد؟
 $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(+4) - (+8)}{(-5) - (-1)} = \frac{-4}{-4} = +1$

مثال 2: شیب خطی را پیدا کنید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} +3 \\ -9 \end{bmatrix}$ می گذرد؟

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-9) - (-6)}{(+3) - (-7)} = \frac{-3}{+10} = -\frac{3}{10}$$

روش سوم : پیدا کردن شیب معادله خط ، وقتی خط رسم شده است.

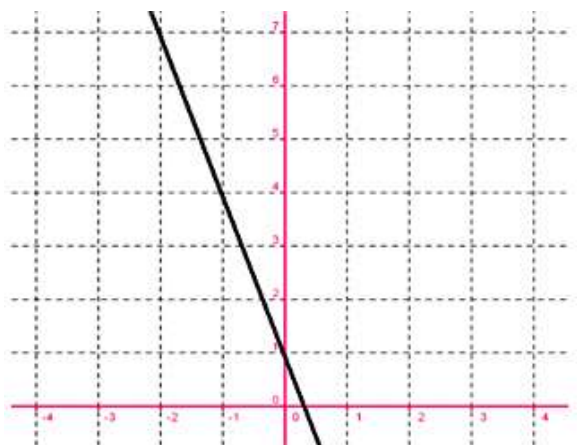
اگر خطی رسم شده و بخواهیم شیب خط را به دست آوریم ، برای این کار به یک مثلث قائم الزاویه نیاز داریم که در روی صفحه مختصات رسم کنیم . مثلث قائم الزاویه ای رسم می کنیم که وتر آن روی خط مورد نظر باشد و اضلاع قائم الزاویه آن موازی محور ها باشد . مشخص است که تعداد زیادی مثلث به این شکل می توان رسم کرد هر کدام راحت تر بود آن را رسم کنید.



بعد از رسم مثلث ، اندازه ضلع عمودی را بر اندازه ضلع افقی تقسیم می کنیم.

$$\Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{+4}{+2} = +2$$

توجه داشته باشید که اگر خط به صورت مثال بالا از ناحیه یک مختصات به سمت ناحیه سوم مختصات رسم شده باشد شیب مثبت است و اگر از سمت ناحیه دوم به سمت ناحیه 4 رسم شده باشد شیب منفی است یعنی :

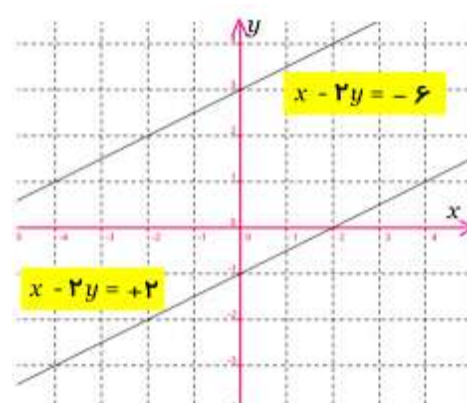
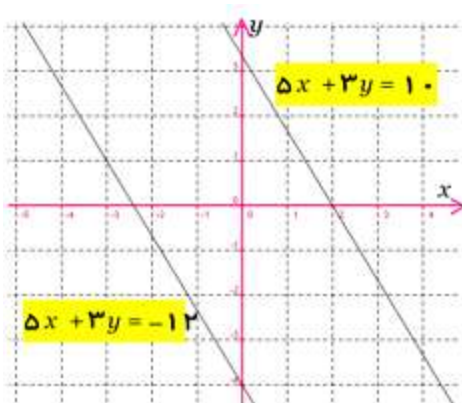
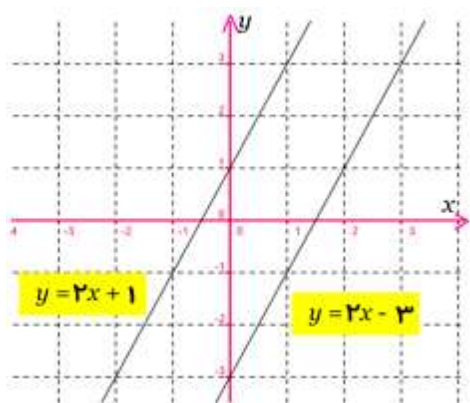


$$\frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \text{شیب خط} = -3$$

نکات مهم در مورد موازی بودن و عمود بودن خط ها:

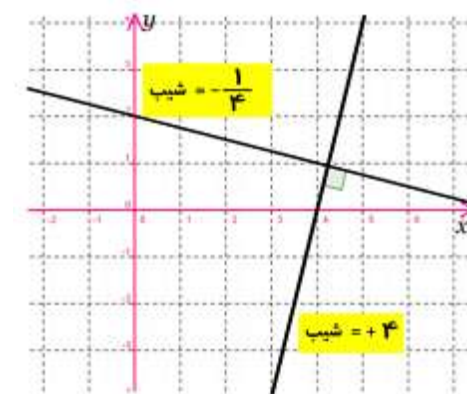
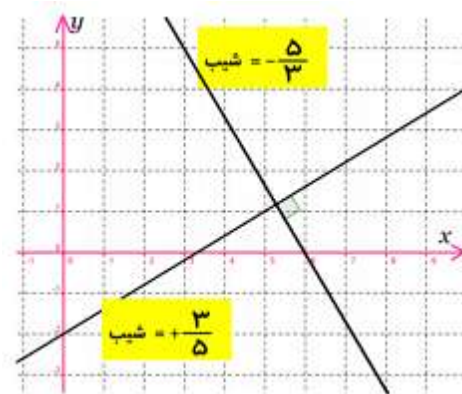
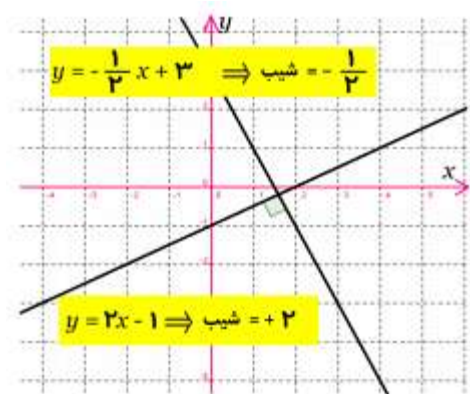
نکته 1: اگر شیب دو خط با هم برابر باشد با هم موازی هستند و برعکس.

در مثال های زیر خط ها با هم موازیند چون شیب هر دو خط رسم شده در هر شکل با هم برابر می باشد :



نکته 2: اگر دو خط بر هم عمود باشند شیب دو خط با هم قرینه و معکوس است و برعکس.

در مثال های زیر خط ها بر هم عمودند . به شیب دو خط در هر شکل توجه کنید:



اگر دقت کنید وقتی دو خط بر هم عمود باشند حاصل ضرب شیب دو خط برابر با 1- است یعنی اگر دو خط e و d بر هم عمود باشند و شیب آن ها

به ترتیب a_1 و a_2 باشد در این صورت :

$$d \perp e \iff a_1 \times a_2 = -1$$

عرض از مبدا و طول از مبدا

خط راست رسم شده احتمال دارد محور طول یا عرض یا هر دو را قطع کند . به دو تعریف ارائه شده زیر توجه کنید :

عرض از مبدا : نقطه از محور عرض که در آن نقطه ، خط محور عرض را قطع می کند **عرض از مبدا** می گویند.

طول از مبدا : نقطه از محور طول که در آن نقطه ، خط محور طول را قطع می کند **طول از مبدا** می گویند.

برای پیدا کردن هر کدام از این دو مورد به صورت زیر عمل می کنیم:

برای پیدا کردن **عرض از مبدا** ، در معادله خط **طول** را برابر با صفر در نظر می گیریم .

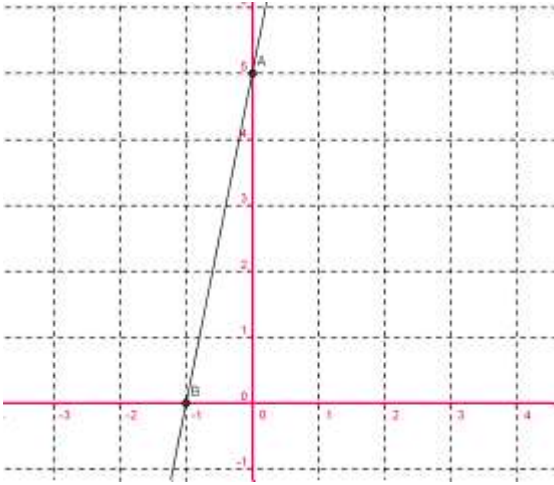
برای پیدا کردن **طول از مبدا** ، در معادله خط ، **عرض** را برابر با صفر در نظر می گیریم .

مثال 1 : اگر معادله خط به صورت $5x - y = -5$ باشد ،

در این صورت عرض از مبدا و طول از مبدا را پیدا کنید :

$$\text{عرض از مبدا} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = +5 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 \\ +5 \end{bmatrix}$$

$$\text{طول از مبدا} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

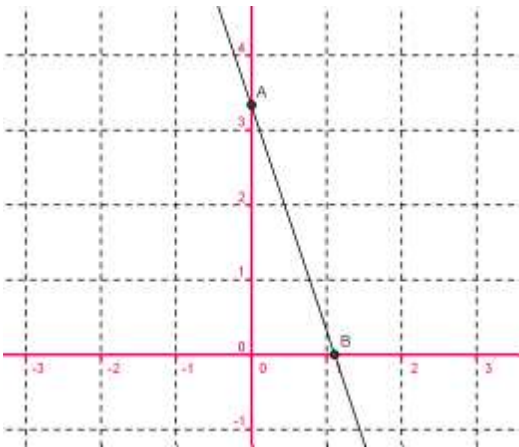


مثال 2 : اگر معادله خط به صورت $9x + 3y = 10$ باشد ،

در این صورت عرض از مبدا و طول از مبدا را پیدا کنید :

$$\text{عرض از مبدا} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{10}{3} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{طول از مبدا} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{9} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ 0 \end{bmatrix}$$

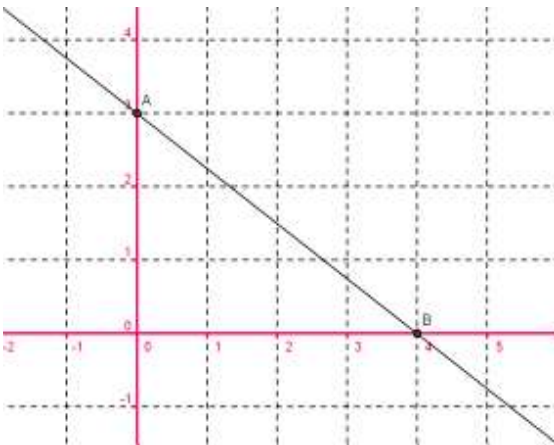


مثال 3 : اگر معادله خط به صورت $3x + 4y = 12$ باشد ،

در این صورت عرض از مبدا و طول از مبدا را پیدا کنید :

$$\text{عرض از مبدا} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = +3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 \\ +3 \end{bmatrix}$$

$$\text{طول از مبدا} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = +4 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} +4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



نوشتن معادله خط

اگر اطلاعاتی از معادله خط به ما داده شده باشد می توانیم معادله خط را بنویسیم . اطلاعاتی مثل : شیب خط و عرض از مبدا و یا نقاطی از خط که خط راست از آن ها عبور می کند. روش هایی که معمولا برای به دست آوردن معادله خط به کار می رود همراه با مثال به ترتیب ارائه شده است :

روش اول : اگر شیب خط و عرض از مبدا خط به ما داده شده باشد . برای نوشتن این معادله ها کار زیادی نداریم فقط کافیست که از حالت کلی معادله خط برای جای گذاری اعداد استفاده کنیم. مثل :

مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن $+4$ بوده و عرض از مبدا آن -5 باشد؟

حل : $y = ax + b$, $a = +4$, $b = -5 \Rightarrow y = +4x - 5$

مثال 2 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن -3 بوده و عرض از مبدا آن $+7$ باشد؟

حل : $y = ax + b$, $a = -3$, $b = +7 \Rightarrow y = -3x + 7$

روش دوم : اگر شیب خط به همراه یک نقطه از خط را به ما بدهند به طوری که طول نقطه داده شده **صفر باشد** مثل مثال بالا عمل می کنیم . چون نقطه ای که طول آن صفر باشد همان عرض از مبدا خط است و روش حل فرق نمی کند :

مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن -6 بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $y = ax + b$, $a = -6$, $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow b = +4 \Rightarrow y = -6x + 4$

مثال 2 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن $+3$ بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $y = ax + b$, $a = +3$, $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow b = -7 \Rightarrow y = +3x - 7$

روش سوم : اگر شیب خط به همراه یک نقطه از خط را به ما بدهند، حتی اگر طول نقطه داده شده ، **صفر نباشد** می توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم :

نوشتن معادله خط وقتی **شیب خط** و **یک نقطه** از آن را می دانیم $y - y_1 = a(x - x_1)$

توجه داشته باشید که x_1 و y_1 طول و عرض نقطه مورد نظر بوده و a شیب خط است که به ما داده اند. به مثال های زیر توجه کنید:

مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن $+2$ بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $y - y_1 = a(x - x_1)$, $a = +2$, $x_1 = 1$, $y_1 = 4 \Rightarrow y - 4 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 2$

مثال 2 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن -5 بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} -2 \\ +3 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $y - y_1 = a(x - x_1)$, $a = -5$, $x_1 = -2$, $y_1 = +3 \Rightarrow y - 3 = -5(x - (-2)) \Rightarrow y = -5x - 7$

روش چهارم : اگر عرض از مبدا خط به همراه یک نقطه از خط را به ما بدهند می توانیم از فرمول شیب ، شیب خط را به دست آورده و با استفاده از معادله کلی ، معادله را بنویسیم :

$$\Rightarrow y = ax + b \quad \text{معادله کلی خط} \quad \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{شیب خط}$$

مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدا آن $+5$ بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $b = +5 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 5}{1 - 0} = -1 \Rightarrow y = -1x + 5$

مثال 2: معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدا آن 4 + بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$ بگذرد؟

حل: $b = +4 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7 - 4}{-3 - 0} = \frac{11}{3} \Rightarrow y = \frac{11}{3}x + 4$

روش پنجم: اگر فقط دو نقطه از خط را به ما بدهند ابتدا از فرمول شیب، شیب خط را به دست آورده و سپس مثل مثال ها بالا از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad y - y_1 = a(x - x_1)$$

مثال 1: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 \\ +12 \end{bmatrix}$ بگذرد؟

حل: $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ +12 \end{bmatrix} \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 7}{-3 - 2} = \frac{+5}{-5} = -1 \Rightarrow a = -1$

$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $a = -1 \quad y - y_1 = a(x - x_1) \Rightarrow y - 7 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -1x + 9$

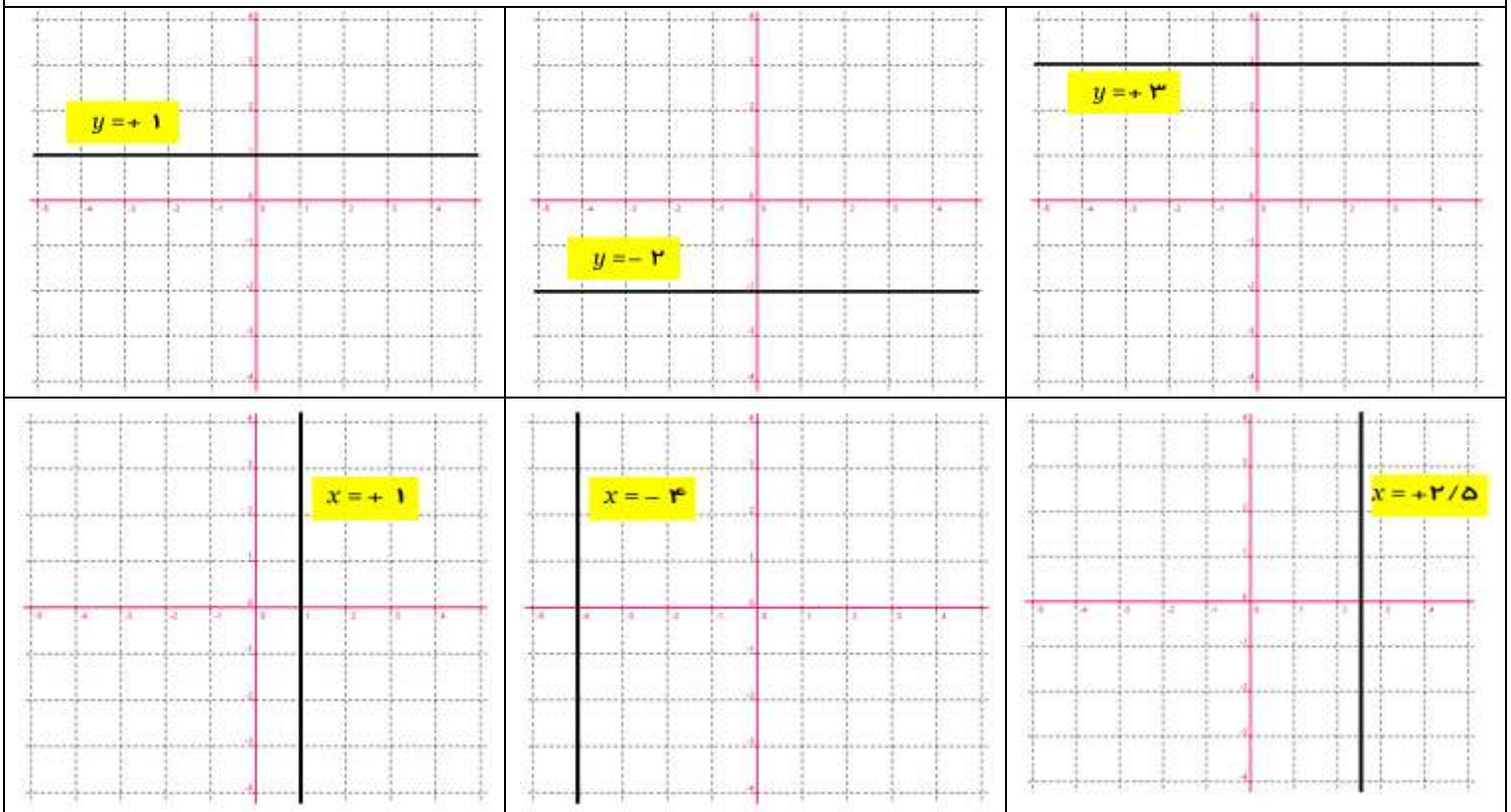
مثال 2: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد؟

حل: $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 10}{1 - (-1)} = \frac{-12}{+2} = -6 \Rightarrow a = -6$

$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix}$, $a = -6 \quad y - y_1 = a(x - x_1) \Rightarrow y - 10 = -6(x - (-1)) \Rightarrow y = -6x + 4$

خط های موازی با محور ها

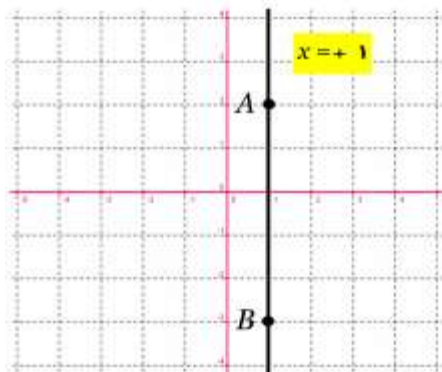
اگر خطی موازی محور طول یا موازی محور عرض باشد، معادله آن با یک متغیر بیان می شود. رسم این خط ها و بیان معادله آن ها خیلی آسان خواهد بود. به نمونه های زیر توجه کنید:



مثال 1: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} +1 \\ +2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} +1 \\ -3 \end{bmatrix}$ بگذرد؟

حل: اگر دقت کنید متوجه می شوید که **طول هر دو نقطه یکسان** هستند پس بدون نوشتن فرمول و روش دیگر، به راحتی معادله خط به صورت زیر خواهد بود. به شکل هم توجه کنید:

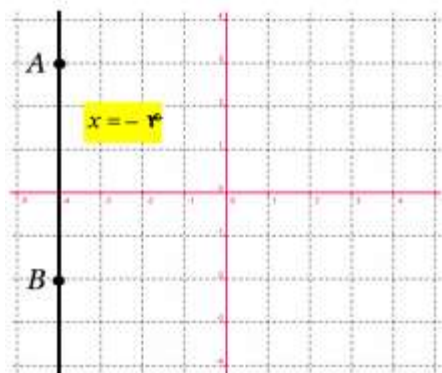
$$x = +1$$



مثال 2: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -4 \\ +3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد؟

حل: اگر دقت کنید متوجه می شوید که **طول هر دو نقطه یکسان** هستند پس معادله خط به صورت زیر خواهد بود. به شکل هم توجه کنید:

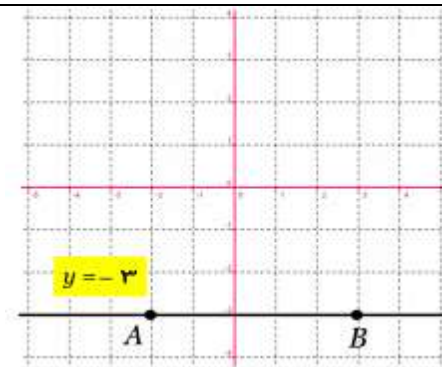
$$x = -4$$



مثال 3: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} +3 \\ -3 \end{bmatrix}$ بگذرد؟

حل: اگر دقت کنید متوجه می شوید که **عرض هر دو نقطه یکسان** هستند پس معادله خط به صورت زیر خواهد بود. به شکل هم توجه کنید:

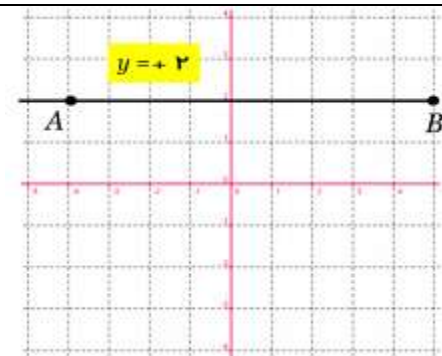
$$y = -3$$



مثال 4: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -4 \\ +2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} +5 \\ +2 \end{bmatrix}$ بگذرد؟

حل: اگر دقت کنید متوجه می شوید که **عرض هر دو نقطه یکسان** هستند پس معادله خط به صورت زیر خواهد بود. به شکل هم توجه کنید:

$$y = +2$$



دستگاه معادلات خطی (دو معادله دو مجهولی)

با توجه به نکاتی که در درس های قبلی اشاره شد هر معادله دو مجهولی با متغیر های x و y که درجه یک باشد معادله یک خط راست می باشد .
اگر معادله دو مجهولی به ما بدهند و بخواهند آن را حل کنیم امکان حل وجود ندارد چون بی نهایت x و y می توان پیدا کرد که در این معادله صدق کند .
برای حل معادله دو مجهولی باید دو تا معادله به ما داده شده باشد تا ما محل برخورد این دو خط را پیدا کنیم، یعنی **مختصات نقطه ای را پیدا کنیم که هم زمان در دو معادله صدق کند و روی هر دو خط قرار داشته باشد.**

این دو معادله به شکل مثال زیر ، در کنار هم نوشته می شوند و به آن **دستگاه معادلات خطی** گفته می شود :

$$\begin{cases} 2x + 5y = -2 \\ 4x - 3y = 22 \end{cases}$$

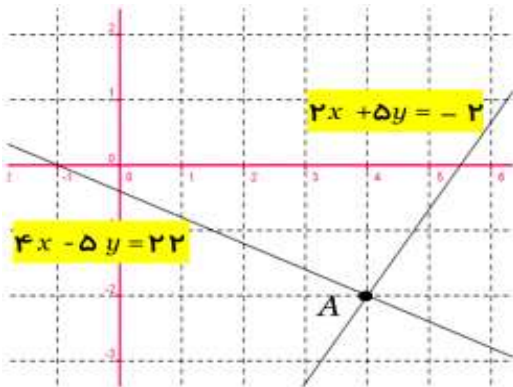
و برای پیدا کردن این جواب و نقطه مورد نظر روش های متعددی وجود دارد که به تدریج به چند روش اشاره می شود:

روش اول : پیدا کردن جواب با استفاده از رسم خط ها

در این روش هر دو خط را رسم کرده و محل برخورد خط ها را پیدا می کنیم.

توجه کنید که این روش همواره با دقت کافی نمی تواند باشد و شاید با **خطا** مواجه شود، خصوصا در مورد خط هایی که طول و عرض محل برخورد خط ها عدد اعشاری باشد.

مثال 1 :

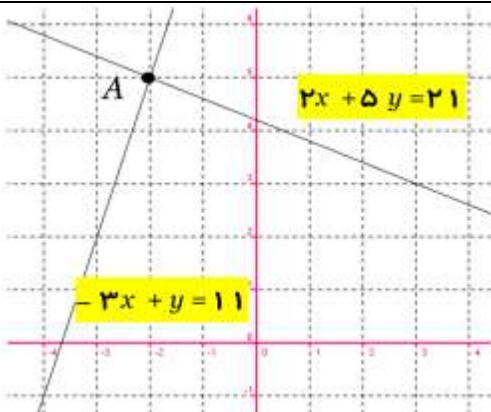


$$\begin{cases} 2x + 5y = -2 \\ 4x - 3y = 22 \end{cases}$$

اگر دو خط را رسم کنیم مشاهده می شود که خط ها همدیگر را در نقطه A قطع کرده اند .

$$A = \begin{bmatrix} +4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

پس **جواب دستگاه** عبارت است از :



مثال 2 : جواب دستگاه معادلات خطی زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases} -3x + y = 11 \\ 2x + 5y = 21 \end{cases}$$

اگر دو خط را رسم کنیم مشاهده می شود که خط ها همدیگر را در نقطه A قطع کرده اند .

پس **جواب دستگاه** عبارت است از :

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ +5 \end{bmatrix}$$

روش دوم: روش حذفی

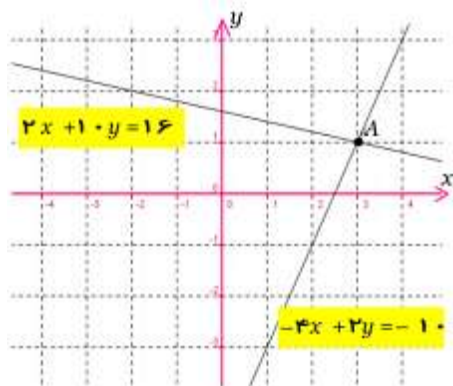
در این روش با حذف یکی از مجهول ها ، مجهول دیگر را پیدا می کنیم .

چون دو تا مجهول داریم دو بار این کار می تواند انجام شود یعنی با حذف X مجهول Y را پیدا کنیم و در مرحله بعد با حذف Y مجهول X را پیدا می کنیم تا مختصات نقطه تلاقی دو خط به دست آید.

برای حذف هر مجهول ، به ضرایب اون مجهول در دو معادله دقت می کنیم و تلاش می کنیم با ضرب کردن معادله ها در یک عدد خاص ، ضریب یک مجهول در دو معادله ، قرینه هم باشند و در جمع جبری با هم حذف شوند . بقیه مراحل را در نمونه مثال حل شده زیر ، دنبال کنید:

مثال 1: مرحله اول

در دستگاه معادلات زیر اگر طرفین معادله پایینی را در 2+ ضرب کنیم ضرایب X با هم قرینه خواهند شد:



$$\begin{cases} -4x + 2y = -10 \\ +2x + 1y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -10 \\ +4x + 2y = 32 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{4y = 22}_{22y = 22 \Rightarrow y = 1}$$

مرحله دوم

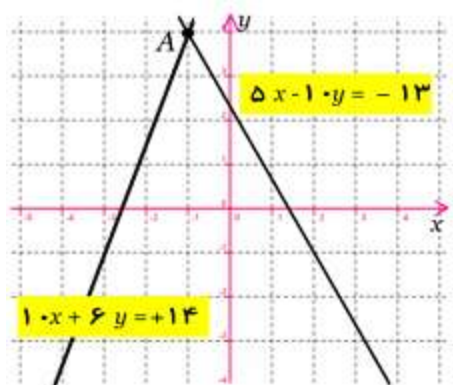
در دستگاه معادلات زیر اگر طرفین معادله بالایی را در 5- ضرب کنیم ضرایب Y با هم قرینه خواهند شد:

$$\begin{cases} -4x + 2y = -10 \\ +2x + 1y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1y = +5 \\ +2x + 1y = 16 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} +3 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$22x = 66 \Rightarrow x = 3$

مثال 2: مرحله اول

در دستگاه معادلات زیر اگر طرفین معادله بالایی را در 2- ضرب کنیم ضرایب X با هم قرینه خواهند شد:



$$\begin{cases} 5x - 2y = -13 \\ 1x + 6y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1x + 4y = 26 \\ +1x + 6y = 14 \end{cases} \Rightarrow y = 4$$

مرحله دوم

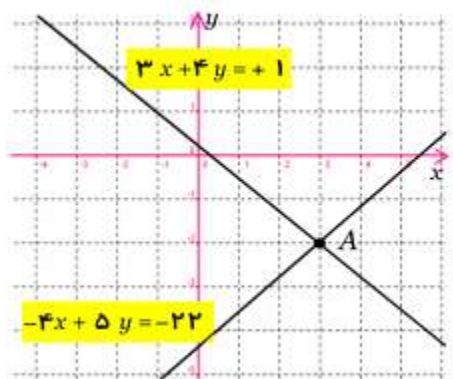
در دستگاه معادلات زیر اگر طرفین معادله بالایی را در 3+ ضرب کنیم ضرایب Y با هم قرینه خواهند شد:

$$\begin{cases} 5x - 2y = -13 \\ 1x + 6y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +15x - 6y = -39 \\ +1x + 6y = 14 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 \\ +4 \end{bmatrix}$$

$25x = -25 \Rightarrow x = -1$

مثال 3: مرحله اول

ضرب کنیم ضرایب X با هم قرینه شده و حذف خواهند شد :



$$\begin{cases} +3x + 4y = +1 \\ -4x + 5y = -22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +12x + 16y = +4 \\ -12x + 15y = -66 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{31y = -63}_{31y = -63 \Rightarrow y = -2}$$

در دستگاه معادلات زیر اگر طرفین معادله بالایی را در 5- و معادله پایینی را در 4+ ضرب

کنیم ضرایب Y با هم قرینه شده و حذف خواهند شد :

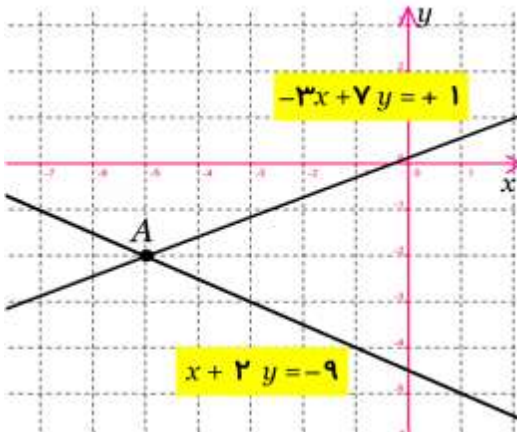
$$\begin{cases} +3x + 4y = +1 \\ -4x + 5y = -22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x - 20y = -5 \\ -16x + 20y = -88 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} +3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$-31x = -93 \Rightarrow x = 3$

روش سوم : روش جاگذاری :

این روش معمولاً در مثال‌هایی مناسب است که ضریب یک از مجهول‌ها 1 یا -1 باشند. در این روش یکی از مجهول‌ها را بر حسب دیگری پیدا کرده در معادله دیگر جاگذاری می‌کنیم. مثل :

مثال 1 : مرحله اول) اگر در مثال زیر دقت کنید در معادله اول ، ضریب X برابر با یک می‌باشد پس X را بر حسب Y به دست می‌آوریم :



$$\begin{cases} x + 2y = -9 \Rightarrow x = -2y - 9 \\ -3x + 7y = +1 \rightarrow -3(-2y - 9) + 7y = +1 \end{cases}$$

$$6y + 27 + 7y = +1 \rightarrow y = -2$$

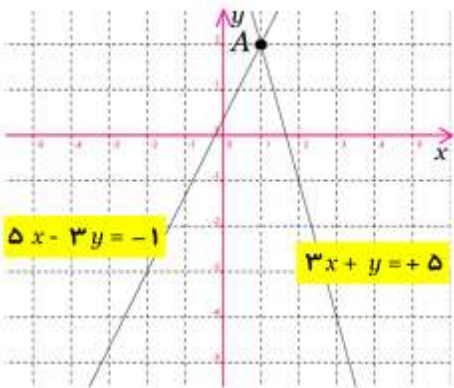
مرحله دوم)

حالا مقدار Y را در یکی از معادله‌های داده شده قرار داده و مقدار X را به دست می‌آوریم :

$$x + 2y = -9 \Rightarrow x + 2 \times (-2) = -9$$

$$\Rightarrow x = -5 \quad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

مثال 2 : مرحله اول) اگر در مثال زیر دقت کنید در معادله دوم ، ضریب Y برابر با یک می‌باشد، پس Y را بر حسب X به دست می‌آوریم :



$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 \rightarrow 5x - 3(-3x + 5) = -1 \Rightarrow x = 1 \\ 3x + y = +5 \Rightarrow y = -3x + 5 \end{cases}$$

مرحله دوم)

حالا مقدار X را در یکی از معادله‌های داده شده قرار داده و مقدار Y را به دست می‌آوریم :

$$3x + y = +5 \Rightarrow 3x + (+1) = +5$$

$$\Rightarrow y = 2 \quad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} +1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

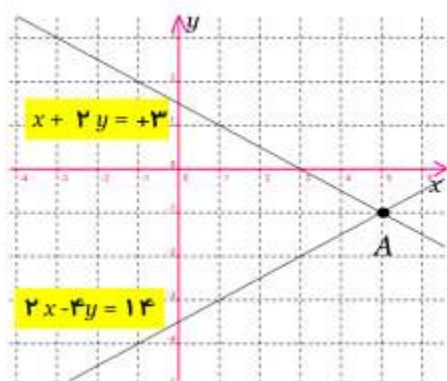
روش چهارم : روش ماتریسی :

در این روش دقت می‌کنیم که جملات معادله به صورت مرتب در محل خودشان نوشته شده باشند .

از دو رابطه زیر ، جواب دستگاه معادلات را به دست می‌آوریم :

$$\begin{pmatrix} ax + by = c \\ mx + ny = d \end{pmatrix} \Rightarrow y = \frac{ad - cm}{an - bm}, \quad x = \frac{cn - bd}{an - bm}$$

مثال 1 :



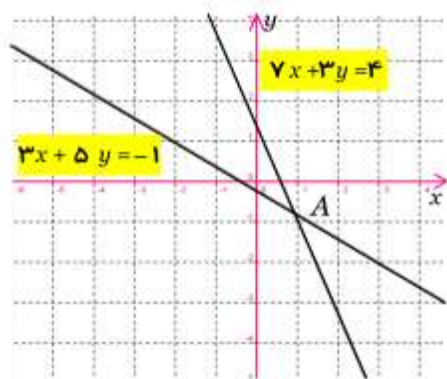
$$\begin{cases} x + 2y = +3 \\ 2x - 4y = +14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 \times 14 - 2 \times 3}{1 \times (-4) - 2 \times 2} = \frac{+8}{-8} = -1$$

$$x = \frac{3 \times (-4) - 2 \times 14}{1 \times (-4) - 2 \times 2} = \frac{-40}{-8} = +5$$

$$A = \begin{bmatrix} +5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال 2 :



$$\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 7x + 3y = +4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3 \times 4 - 7 \times (-1)}{3 \times 3 - 7 \times 5} = \frac{+19}{-26} = -\frac{19}{26}$$

$$x = \frac{-1 \times 3 - 5 \times 4}{3 \times 3 - 7 \times 5} = \frac{-23}{-26} = +\frac{23}{26}$$

$$A = \begin{bmatrix} +\frac{23}{26} \\ -\frac{19}{26} \end{bmatrix}$$

روش پنجم : روش قیاسی

اگر در دستگاه معادلات خطی بتوانیم حالت زیر را به آسانی ایجاد کنیم می توانیم از حالت مقایسه برای حل دستگاه استفاده کنیم:

مثال 1 :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 18 \\ 2x - 7y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -4y + 18 \\ 2x = +7y - 4 \end{cases} \Rightarrow -4y + 18 = 7y - 4 \Rightarrow y = +2$$

حالا y به دست آمده را در یکی از معادله ها ، قرار می دهیم تا مقدار x را به دست بیاریم:

$$2x + 4y = 18 \Rightarrow 2x + 4 \times (+2) = 18 \Rightarrow 2x = 18 - 8 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} +5 \\ +2 \end{bmatrix}$$

مثال 2 :

$$\begin{cases} -3x + 7y = -24 \\ +5x + 7y = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = +3x - 24 \\ 7y = -5x - 16 \end{cases} \Rightarrow +3x - 24 = -5x - 16 \Rightarrow x = +1$$

حالا x به دست آمده را در یکی از معادله ها ، قرار می دهیم تا مقدار y را به دست بیاریم:

$$7y = +3x - 24 \Rightarrow 7y = 3 \times 1 - 24 \Rightarrow 7y = -21 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} +1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

نکته پایانی :

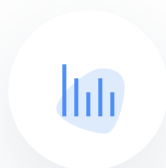
در هر یک از روش های ارائه شده دو مرحله برای حل دستگاه وجود داشت که می توان یک مرحله از حل را با یک روش و مرحله دوم را با روش دیگر حل کرد . مثلا در روش حذفی می توان مرحله اول را اجرا کرده و مرحله دوم را از روش جاگذاری استفاده کرده و عدد به دست آمده از مرحله اول را در مجهول جاگذاری کرده و مجهول دوم را محاسبه کرد.

انتخاب روش حل کاملا بر عهده خودمان است و در هر مثال با توجه به شرایط دستگاه ، تصمیم می گیریم که از کدام روش استفاده کنیم و این انتخاب به آسان شدن حل کمک می کند به این دلیل خوب است که همه روش ها را یاد بگیریم و در جای خود از آن استفاده کنیم .



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد