



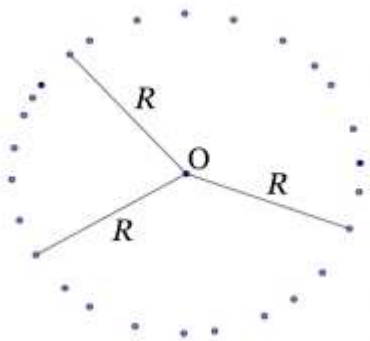
حجم و مساحت

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 8 - حجم و مساحت

تهیه و تدوین: اصغر بابائی - دبیر ریاضی

درس اول: حجم و مساحت کره

تعریف دایره:

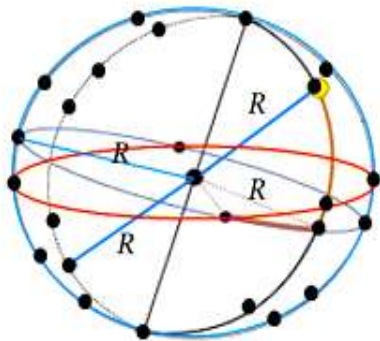


مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله همه آن نقاط از نقطه ای بنام **مرکز** به یک فاصله می باشد. به اندازه فاصله این نقاط تا مرکز دایره **شعاع دایره** می گویند. مثل شکل مقابل:

فرمول محاسبه مساحت دایره:

$$S = \pi \cdot R^2$$

تعریف کره:

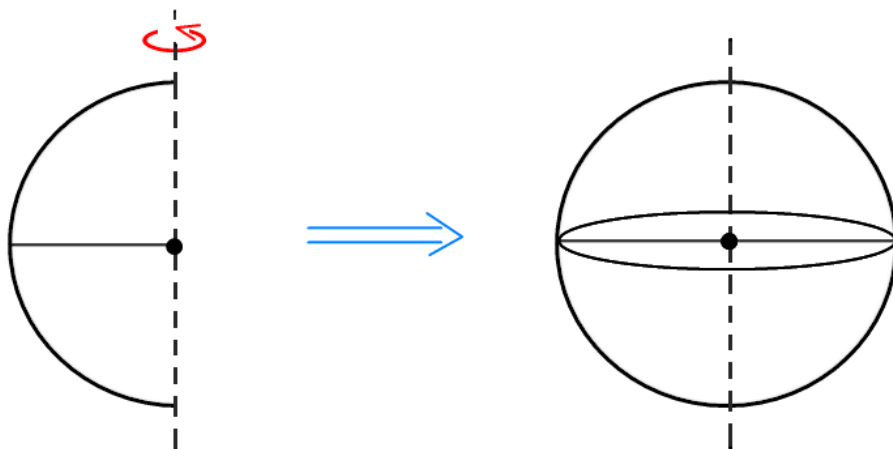


مکان هندسی نقاطی از **فضا** است که فاصله همه آن نقاط از نقطه ای بنام **مرکز** به یک فاصله می باشد.

به اندازه فاصله این نقاط تا مرکز کره **شعاع کره** می گویند. مثل شکل مقابل:

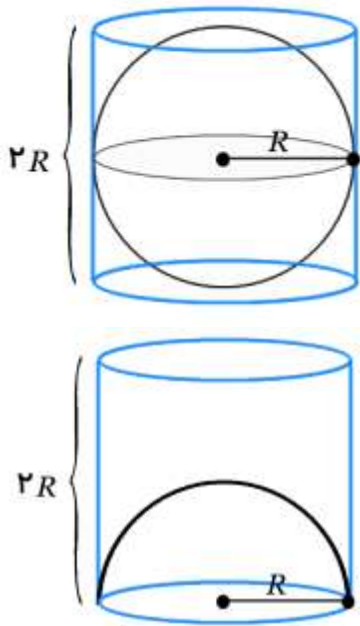
تعریف دوم برای کره:

از دوران یک نیمدایره (یا دایره) حول **قطرش**، کره تشکیل می شود.



نحوه محاسبه حجم کره :

اگر یک کره در داخل یک استوانه به صورت مقابل محاط شود ، به طوری که از کناره ها و از قاعده های استوانه با محیط کره مماس شود می توان از این استوانه و کره برای محاسبه کره استفاده کرد .



برای این کار از یک توپ پلاستیکی می توان استفاده کرد و بعد از اطمینان از محاط شدن کره در داخل استوانه ، توپ پلاستیکی کره ی مورد نظر را بیرون آورده و به دو تا نیم کره مساوی برش می دهیم . سپس یکی از نیمکره ها را به صورت وارونه ، با چسب به کف داخل استوانه می چسبانیم ، به طوریکه موقع ریختن آب ، آب به داخل نیمکره چسبیده شده نرود . مثل تصویر مقابل :



بعد از آماده شدن این ابزار ، با استفاده از نیمکره دوم که در بیرون داریم ، مقداری آب در استوانه می ریزیم این کار باید با دقت انجام شود به طوری که باید تمام فضای داخلی نیمکره را با آب کاملاً پر کنیم و تمام آب را در استوانه بریزیم . اگر با دقت تمام کارها را انجام داده باشیم خواهیم دید که با دوبار پر کردن و خالی کردن نیمکره در استوانه ، آن استوانه پر خواهد شد.

نتیجه:

حجم داخلی کل استوانه 1/5 برابر حجم یک کره محاط شده اش می باشد .

با توجه به اندازه های شکل بالا می توان **حجم استوانه** را چنین به دست آورد :

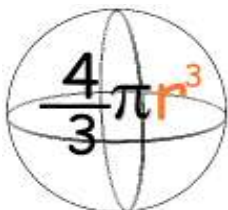
$$\text{استوانه } V = S \cdot h \Rightarrow \text{استوانه } V = \pi \cdot R^2 \times h$$

و چون در این شکل ، **ارتفاع استوانه دو برابر شعاع کره** است ($h = 2R$) در این صورت می توان نوشت :

$$\text{استوانه } V = \pi \cdot R^2 \times 2R \Rightarrow \text{استوانه } V = 2\pi \cdot R^3$$

از طرفی چون **حجم استوانه 1/5 برابر کره** است پس داریم :

$$1/5V = 2\pi \cdot R^3 \Rightarrow \text{کره } V = \frac{2\pi \cdot R^3}{1/5}$$

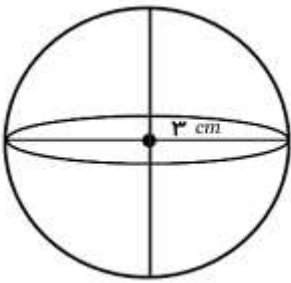


$$\text{حجم کره } V = \frac{4}{3} \pi \times R^3$$

با استفاده از فرمول بالا ، می توانیم حجم کره ها و یا نیم کره و امثال آن را محاسبه کنیم.

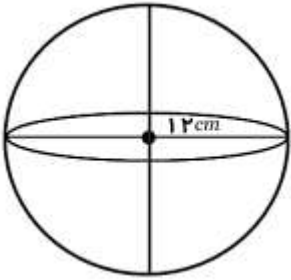
توجه داشته باشید در حل هر مثال نوشتن فرمول و محاسبه کامل و در نهایت نوشتن واحد ، لازم خواهد بود.

مثال 1: حجم کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 3 سانتی متر باشد ؟



$$V = \frac{4}{3} \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3 \times 3 \times 3 = 36\pi \text{ cm}^3$$

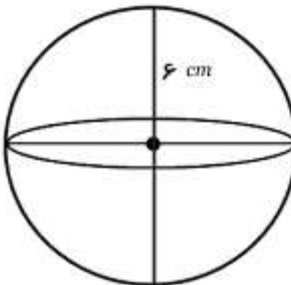
مثال 2: حجم کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 12 سانتی متر باشد ؟



$$V = \frac{4}{3} \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 12 \times 12 \times 12 = 2304\pi \text{ cm}^3$$

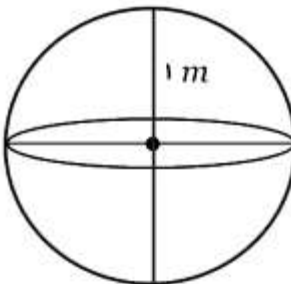
مثال 3: حجم کره ای را به دست آورید که اندازه قطر آن 12 سانتی متر باشد ؟

توجه داشته باشید در این مثال اندازه شعاع برابر با 6 سانتی متر خواهد بود.



$$V = \frac{4}{3} \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 6 = 288\pi \text{ cm}^3$$

مثال 4: حجم کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 1 متر باشد ؟



$$V = \frac{4}{3} \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{4}{3} \pi \text{ m}^3$$

مثال 5: نیم دایره ای به شعاع 9 سانتی متر را حول قطرش دوران می دهیم .

الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ **جواب:** (کره)

ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V = \frac{4}{3} \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 9 \times 9 \times 9 = 972\pi \text{ cm}^3$$

مثال 6: دایره ای به قطر 10 سانتی متر را حول قطرش دوران می دهیم .

الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ **جواب:** (کره)

ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V = \frac{4}{3} \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5 \times 5 \times 5 = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3$$

نحوه محاسبه مساحت رویه کره :

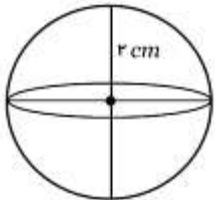
برای به دست آوردن مساحت رویه کره می توان به روش زیر عمل کرد . البته توجه داشته باشید این روش اثبات و به دست آوردن فرمول مساحت ، به روش شهودی است و اثبات اصلی را سال های بعد خواهید خواند .



ابتدا یک کره را از وسط به دو نیمکره تقسیم می کنیم و یکی از آن ها را روی یک کاغذ بزرگ قرار داده و دو تا دایره با شعاع مساوی با شعاع کره رسم و از کاغذ جدا می کنیم . با استفاده از قیچی دایره های کاغذی را به نوارهای نازک برش داده و با چسب مایع روی نیمکره مورد نظر می چسبایم . در این کار باید توجه کنیم که نوارهای کاغذی باید باریک بوده و موقع چسباندن روی نیمکره چروکیده نشوند و صاف روی نیمکره بچسبند و روی هم قرار نگیرند. حتی از کوچک ترین برش های کاغذ هم باید برای پوشش روی نیمکره استفاده کنیم. اگر این کار را با دقت انجام دهید مشاهده خواهید کرد که دوتا دایره کاغذی روی نیمکره را کاملا می پوشانند . با این کار می توان گفت که **مساحت روی نیمکره با دوبرابر مساحت دایره ها برابر است** یا به عبارت دیگر **مساحت کل کره با مساحت چهار تا دایره مورد نظر برابر است** و این یعنی :

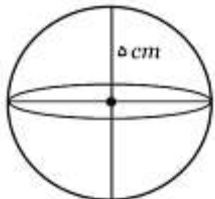
$$S = 4 \times \pi r^2 = 4\pi r^2$$

توجه داشته باشید برای واحد اندازه گیری مساحت از پسوند مربع استفاده می کنیم ، مثل : **سانتی متر مربع ، متر مربع و ...**



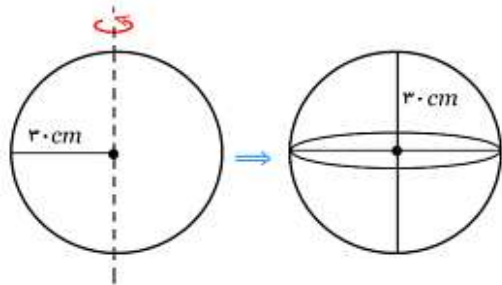
مثال 1: مساحت کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 2 سانتی متر باشد ؟

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow 4 \times \pi \times 2 \times 2 = 16\pi \text{ cm}^2$$



مثال 2: مساحت کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 5 سانتی متر باشد ؟

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow 4 \times \pi \times 5 \times 5 = 100\pi \text{ cm}^2$$



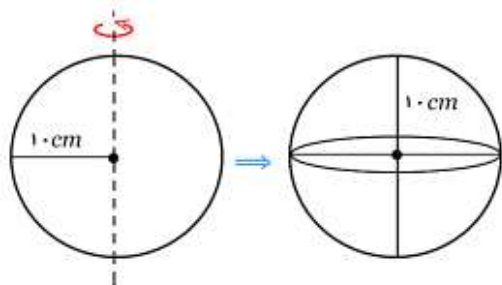
مثال 3: دایره ای به شعاع 30 سانتی متر را حول قطرش دوران می دهیم .

الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ **جواب:** (کره)
ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V = \frac{4}{3} \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 30 \times 30 \times 30 = 36000 \pi \text{ cm}^3$$

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow 4 \times \pi \times 30 \times 30 = 3600\pi \text{ cm}^2$$

ج) مساحت آن را به دست آورید :



مثال 4: دایره ای به شعاع 10 سانتی متر را حول قطرش دوران می دهیم .

الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ **جواب:** (کره)
ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V = \frac{4}{3} \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 10 \times 10 \times 10 = \frac{4000}{3} \pi \text{ cm}^3$$

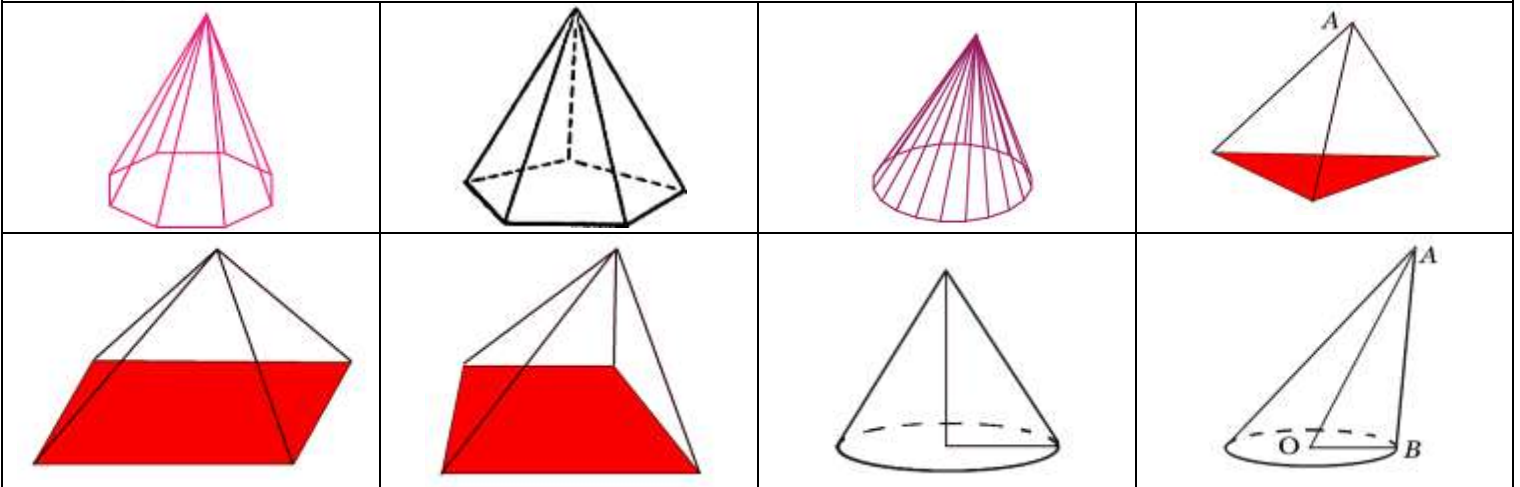
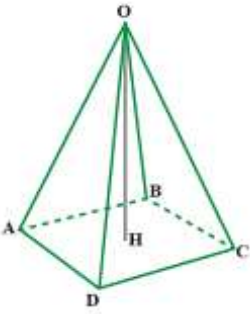
$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow 4 \times \pi \times 10 \times 10 = 400\pi \text{ cm}^2$$

ج) مساحت آن را به دست آورید :

درس دوم: حجم هرم و مخروط

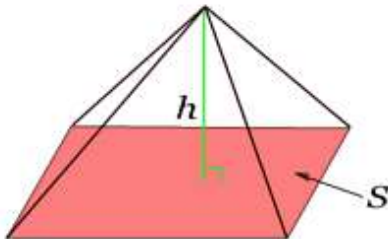
آشنائی با هرم:

به تصویر مقابل نگاه کنید ، جسمی دیده می شود که تنها قاعده آن یک چند ضلعی بوده و دیواره های جسم به صورت مثلث هستند و یال های کناری با هم موازی نیستند و یال ها همدیگر را در راس بالائی قطع کرده اند ، به این نوع جسم ها هرم گفته می شود .



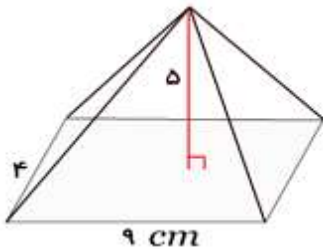
نحوه محاسبه حجم هرم:

در نمونه های بالا ، قاعده ی جسم یک چند ضلعی است (حتی دایره) که برای محاسبه حجم آن ها باید مساحت قاعده را به دست آورده و به صورت زیر حجم را محاسبه کنیم:



$$V = \frac{1}{3} \times S \times h$$

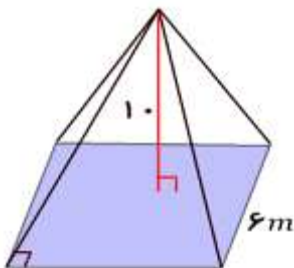
مثال 1: قاعده هرمی به صورت مستطیل به ابعاد 4 و 9 سانتی متر می باشد. اگر ارتفاع هرم 5 سانتی متر باشد ، حجم هرم را به دست آورید ؟



$$S = 4 \times 9 = 36 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$$

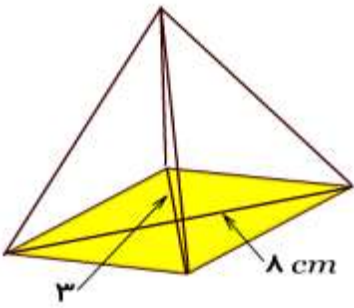
مثال 2: قاعده هرمی به صورت مربع به 6 متر می باشد. اگر ارتفاع هرم 10 متر باشد ، حجم هرم را به دست آورید ؟



$$S = 6 \times 6 = 36 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 10 = 120 \text{ m}^3$$

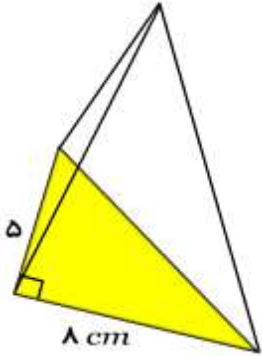
مثال 3: قاعده هرمی به صورت لوزی با قطر های 8 و 3 سانتی متر می باشد. اگر ارتفاع هرم 4 سانتی متر باشد ، حجم هرم را به دست آورید ؟



$$S = \frac{8 \times 3}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times 12 \times 4 = 16 \text{ cm}^3$$

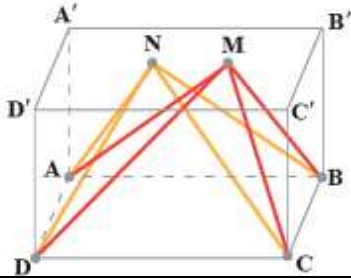
مثال 4: قاعده هرمی به صورت مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائمه 5 و 8 سانتی متر می باشد. اگر ارتفاع هرم 12 سانتی متر باشد ، حجم هرم را به دست آورید ؟



$$S = \frac{5 \times 8}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times 20 \times 12 = 80 \text{ cm}^3$$

نکته: اگر چند هرم مختلف داشته باشیم که قاعده هم شکل و هم اندازه داشته باشند و ارتفاع آن ها برابر باشد به صورتی که محل راس یکسان نباشد در این صورت حجم آن ها یکسان خواهد بود .
به تصویر مقابل با دقت نگاه کنید :
دو تا هرم در داخل یک مکعب مستطیل محاط شده اند .
چون قاعده یکسان دارند و ارتفاع برابر است با اینکه محل راس جابجا شده ولی حجم آن ها برابر است .



آشنائی با مخروط

اگر به دوشکل مقابل دقت کنید متوجه می شوید که با افزایش تعداد اضلاع قاعده ، جسم شبیه مخروط می شود .

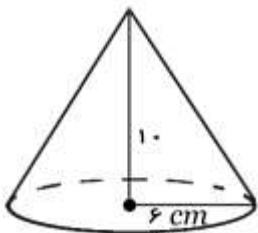


تعریف مخروط: مخروط نوعی هرم منتظم است که قاعده آن دایره می باشد .
منظور از منتظم بودن هم این است که راس هرم در بالای مرکز دایره قرار بگیرد .

پس با در نظر گرفتن این موضوع برای به دست آوردن حجم مخروط باید از فرمول حجم هرم استفاده کنیم . به صورت زیر :

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times S \times h \\ S &= \pi \times r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \cdot h$$

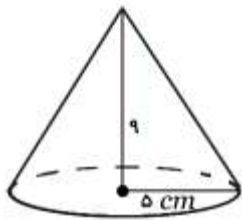
مثال 1: شعاع قاعده مخروطی 6 سانتی متر و ارتفاع مخروط 10 سانتی متر می باشد .
حجم مخروط را به دست آورید ؟



$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \times 10 = 120 \pi \text{ cm}^3$$

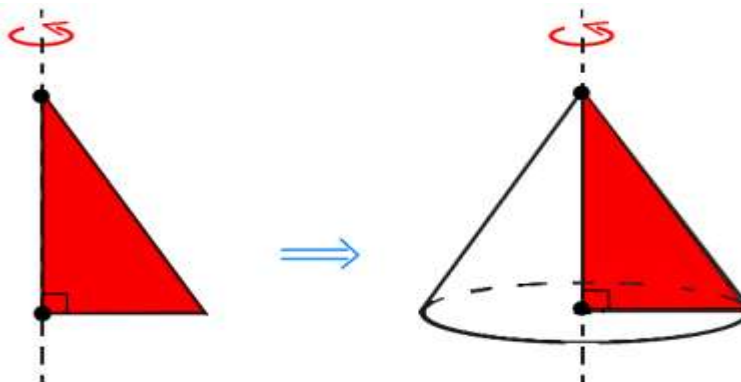
مثال 2: شعاع قاعده مخروطی 5 سانتی متر و ارتفاع مخروط 9 سانتی متر می باشد .

حجم مخروط را به دست آورید ؟



$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 25 \times 9 = 75 \pi \text{ cm}^3$$

نکته مهم: اگر دقت کنید از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائمه آن ، یک مخروط تشکیل می شود :

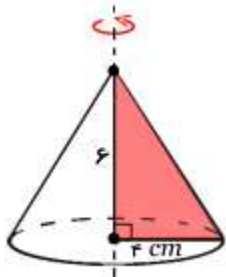


پس می توان گفت که تعریف دوم برای یک مخروط این است که بگوییم : مخروط از دروان یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائمه آن به وجود می آید.

مثال 3: مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائمه 4 و 6 سانتی متر را حول ضلع 6 سانتی متری دوران می دهیم .

الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ **جواب:** مخروط

ب) حجم آن را به دست آورید ؟

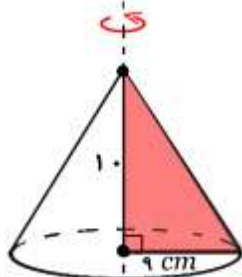


$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 6 = 32 \pi \text{ cm}^3$$

مثال 4: مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائمه 3 و 9 سانتی متر را حول ضلع 10 سانتی متری دوران می دهیم .

الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ **جواب:** مخروط

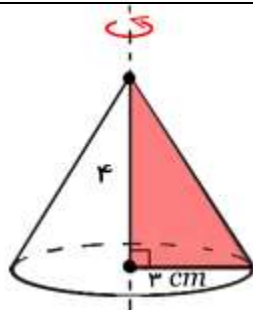
ب) حجم آن را به دست آورید ؟



$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 81 \times 10 = 270 \pi \text{ cm}^3$$

مثال 5: مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائمه 3 و 4 سانتی متر را حول ضلع 4 سانتی متری دوران می دهیم .

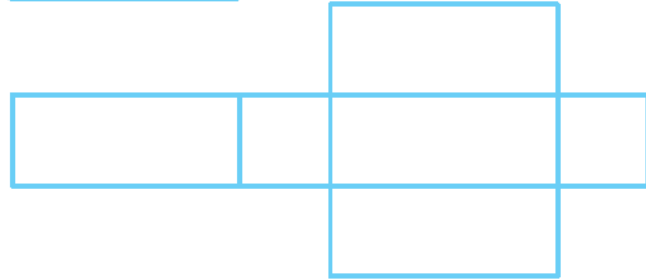
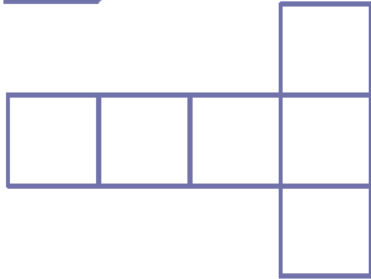
حجم آن را به دست آورید ؟



$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = 12 \pi \text{ cm}^3$$

درس سوم: سطح و حجم

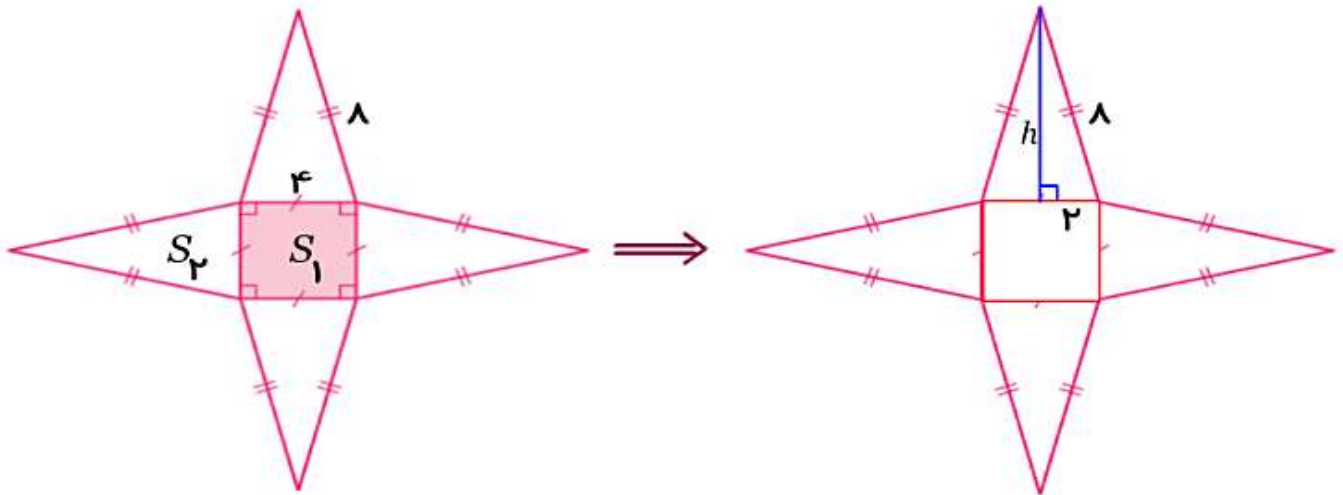
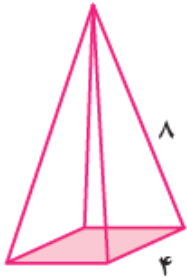
محاسبه مساحت رویه مکعب و مکعب مستطیل به آسانی با محاسبه مساحت مستطیل ها و مربع ها ممکن است که قبلا آموخته اید . مثل شکل های زیر:



اما محاسبه مساحت رویه جانبی هرم ها و مخروط ها شرایط دیگری دارد که به نحوه محاسبه آن ها می پردازیم:

مثال 1: به هرم منتظم مقابل توجه کنید .

در هرم منتظم مقابل ، اگر از راس بالائی ، خط عمودی بر قاعده هرم رسم کنیم بر نقطه مرکز تقارن قاعده وارد خواهد شد . برای محاسبه مساحت دیواره ها و قاعده به شکل زیر می توان عمل کرد :



ابتدا ارتفاع مثلث ، در چهارتا مثلث متساوی الساقین (دیواره های هرم) را با استفاده از رابطه فیثاغورس پیدا می کنیم:

$$h^2 + 2^2 = 8^2 \Rightarrow h^2 + 4 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{60}$$

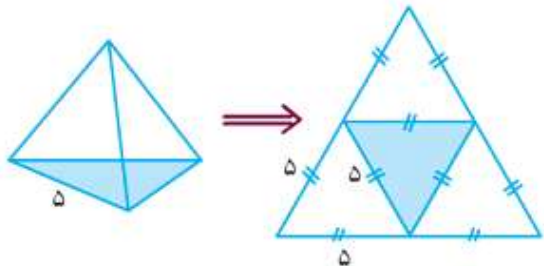
با محاسبه مساحت قاعده و دیواره ها به صورت زیر ، مساحت کل هرم به دست می آید:

$$S_1 = 4 \times 4 = 16$$

$$S_2 = \frac{4 \times \sqrt{60}}{2} = 2\sqrt{60}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = 4 \times 4 = 16 \\ S_2 = \frac{4 \times \sqrt{60}}{2} = 2\sqrt{60} \end{array} \right\} \Rightarrow S = 16 + 4 \times 2\sqrt{60} \Rightarrow S = 16 + 8\sqrt{60}$$

مثال 2: مساحت هرم منتظمی که قاعده آن مثلث متساوی الاضلاع می باشد چه قدر است ؟

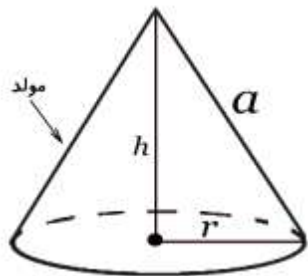


حل: گسترده هرم رسم شده است. اگر دقت کنید گسترده هرم، خودش یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 10 می باشد.

با توجه به فرمول مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a که به صورت زیر است، داریم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2 = 25\sqrt{3}$$

محاسبه مساحت رویه و مساحت کل مخروط:



در مخروط برای محاسبه مساحت رویه، به اندازه مولد نیاز داریم. **مولد مخروط** در شکل مشخص شده است. این اندازه با استفاده از رابطه فیثاغورس و دانستن شعاع قاعده و ارتفاع مخروط، قابل محاسبه است:

$$a^2 = r^2 + h^2$$

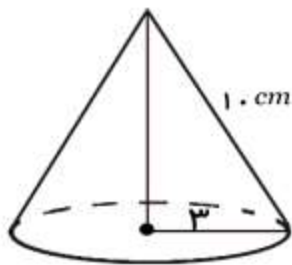
مساحت رویه مخروط از فرمول زیر محاسبه می شود:

$$S = \pi \times r \times a$$

مساحت کل مخروط با اضافه شدن مساحت قاعده دایره شکل آن به مساحت رویه، به صورت زیر خواهد بود:

$$S = \pi r a + \pi r^2$$

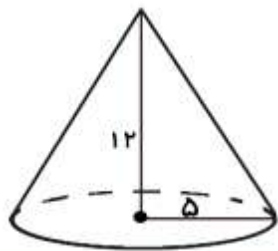
مثال 1: مساحت رویه و مساحت کل مخروط به شعاع قاعده 3 سانتی متر و مولد 10 سانتی متر را محاسبه کنید:



$$S = \pi r a = \pi \times 3 \times 10 = 30\pi \text{ cm}^2 \text{ مساحت رویه}$$

$$S = \pi r a + \pi r^2 = 30\pi + \pi \times 3^2 = 39\pi \text{ cm}^2 \text{ مساحت کل}$$

مثال 2: مساحت رویه و مساحت کل مخروط به شعاع قاعده 5 سانتی متر و ارتفاع 12 سانتی متر را محاسبه کنید: همانطور که مشخص است مولد مخروط داده نشده است که ابتدا با رابطه فیثاغورس، مولد را محاسبه می کنیم:



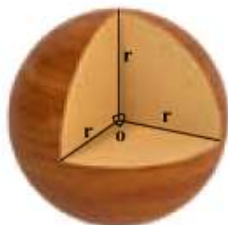
$$a^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow a = 13 \text{ مولد}$$

حالا به صورت زیر مساحت ها محاسبه می شود:

$$S = \pi r a = \pi \times 5 \times 13 = 65\pi \text{ cm}^2 \text{ مساحت رویه}$$

$$S = \pi r a + \pi r^2 = 65\pi + \pi \times 5^2 = 90\pi \text{ cm}^2 \text{ مساحت کل}$$

حل چند تا سوال مهم از کتاب درسی: سوال اول: سوال 4 صفحه 142 کتاب درسی



در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

حل: با توجه به شکل معلوم است که $\frac{1}{8}$ از کره برداشته شده است.

سوال دوم : سوال کاردرکلاس صفحه 143 کتاب درسی

یک اسفنج مکعب به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده ایم.
سطح بریده شده (سطح مقطع) به چه شکلی است؟
اندازه اضلاع آن را پیدا کنید؟

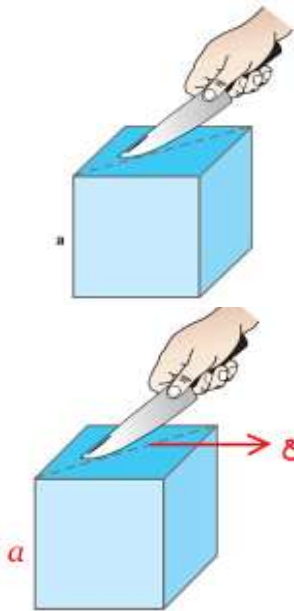
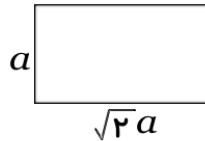
جواب : مستطیل

حل : چون قاعده بالائی مربع است پس اندازه قطر آن به صورت مقابل قابل محاسبه خواهد بود .

$$\text{قطر مربع} = \sqrt{2} a$$

حالا بعد از برش با یک مستطیلی مواجه خواهیم شد که

طول آن $\sqrt{2}a$ بوده و عرض آن a است.

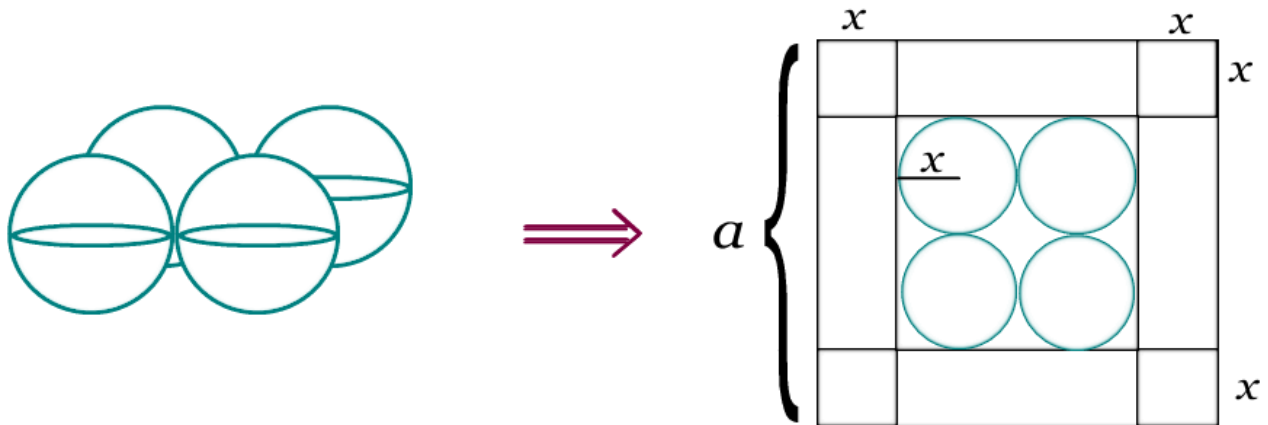


سوال سوم : سوال 2 صفحه 143

از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده
یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم . چه رابطه‌ای باید بین x و a باشد
تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد به طوری که هر کره به کره
مجاورش و به دیواره جعبه مماس باشد؟

حل :

باتوجه به خواسته سوال ، باید چهار تا کره به صورت زیر در کنار هم قرار گرفته و در داخل جعبه ساخته شده قرار گیرند:



حالا اگر کناره‌های مقوا را ، تا بزنیم جعبه ساخته خواهد شد :



با توجه به اندازه جعبه مشخص است که ابعاد مربع اولیه (یعنی a) باید 6 برابر اندازه x باشد تا بتوانیم جعبه مورد نظر راباسازیم و کره ها را درون آن
قرار دهیم . پس :

$$a = 6x$$



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد