

فصل ۳

هندسه و استدلال



هدف کلی

آشنایی با استدلال و اثبات در هندسه، هم‌نهشتی مثلث‌ها و اثبات و حل مساله در هندسه و شکل‌های متشابه

در پایان فصل از دانش آموزان انتظار می‌رود:

- ۱- استدلال را توصیف کند، انواع استدلال را بشناسد و آنها را دسته‌بندی کند، میزان درستی یک بیان را بیان کند.
- ۲- با استفاده از حل سوالات مختلف درسی استدلال خود را مورد آزمایش قرار دهد.
- ۳- فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با مساله را تشخیص دهد، فرض و حکم را به زبان ریاضی بیان کند.
- ۴- اعتبار اثبات به کار رفته در مساله را تشخیص دهد، برخی از مسائل مهم هندسه را اثبات کند.
- ۵- ارتفاع، نیمساز و عمود منصف را بشناسد، بتواند از حالت‌های مختلف هم‌نهشتی مثلث‌ها برای اثبات هم‌نهشتی کمک بگیرد، مراحل مختلف حل مساله در هندسه را فرا گیرد، بتواند برای حل یک مساله مراحل مختلف حل آن را اجرا کند.

درس اول

استدلال:

استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده، در بسیاری از کارهای روزمره به استدلال نیاز پیدا می کنیم و راه های مختلفی برای استدلال کردن استفاده می کنیم که درجه اعتبار آن ها باهم متفاوت است و ممکن است به نظر دیگران مورد اعتماد یا متغیر نباشد.

مثال: استدلالهای زیر را از نظر اعتبار مقایسه کنید.

الف) در تمام خانواده هایی که دو فرزند به نام علی و حسین دارند، علی فرزند بزرگتر بوده است پس دوست من که علی نام دارد از برادرش حسین بزرگتر است. **(نامعتبر - چون بر پایه تعداد محدودی از مشاهدات)**

ب) چون اعداد ۳ و ۵ و ۷ اعداد اول و فرد هستند بنابراین تمام اعداد فرد اولند. **(نامعتبر - چون بر پایه تعداد محدودی از مشاهدات)**

ج) چون همه ی قرص های مُسکِن خواب آور هستند پس در این قرص ها ماده ای هست که باعث خواب آلودگی می شود. **(معتبر - براساس استنتاج منطقی)**

برخی از انواع استدلال

استدلال: توانمندی ارزشمند ذهن انسان است. برخی از انواع استدلال ها عبارتند از:

(الف) شهودی (درک به کمک حواس)

(ب) استقرایی (استدلال از جزء به کل بر مبنای تعداد محدودیاز مشاهدات)

(ج) مثال نقض

(د) استدلال تمثیلی (یافتن نوعی شباهت بین دو چیز. مثلاً چون علی با هوش است پس

برادرش هم باهوش است)

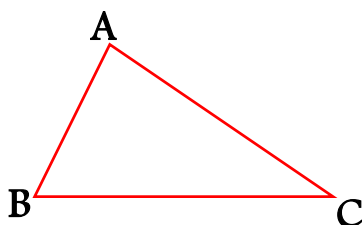
(هـ) استدلال استنتاجی (هنگامی که در استدلال از یک نظریه ی کلی استفاده می کنیم تا به

فرضیه های جزئی برسیم و ...

نکته: معتبرترین نوع استدلال در هندسه استدلال استنتاجی است.

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به دستی نتیجه دهد، اثبات گوئیم.

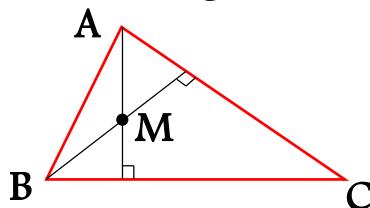
به **مثال** زیر توجه کنید



(الف) ارتفاع های این مثلث را رسم کنید.

(ب) آیا محل برخورد ارتفاع ها درون مثلث است؟

(ج) آیا با مثال بالا می توان نتیجه گرفت محل برخورد دو ارتفاع هر مثلث همیشه درون مثلث است؟



شکل ۱

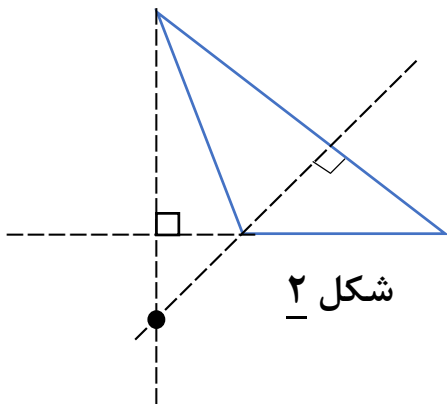
(الف) در شکل ۱ ارتفاع های دو مثلث را به کمک گونیا ترسیم کرده ایم.

پاسخ:

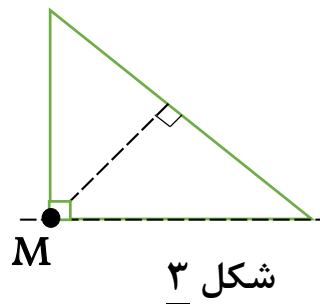
(ب) بله، طبق شکل ۱ محل برخورد با نقطه M نمایش داده شده است.

(ج) خیر، در شکل ۲ و ۳ محل برخورد دو ارتفاع درون مثلث نیست.

در مثلث قائم الزاویه محل برخورد ارتفاع ها، راس زاویه قائمه و در مثلث هایی با داشتن یک زاویه باز، محل برخورد بیرون مثلث می باشد.



شکل ۲



شکل ۳

نکته: برای رد درستی یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم، کافی است با یک

مثال مناسب نشان دهیم آن ادعا نادرست است. به این مثال نادرست مثال نقض می گوییم.

برای رد هر یک از ادعاهای زیر از مثال نقض استفاده کنید.

الف) جمع دو عدد اول همواره مرکب است. مثال نقض: جمع ۲ و ۵ برابر با ۷ است و می دانیم ۷

عددی اول است.

(ب) تمام شکل های هندسی زاویه دارند. مثال نقض: دایره، بیضی، گره و ... زاویه ندارند.

(ج) همه ی اعداد اول فرد هستند. مثال نقض: ۲ عددی اول اما زوج است.

_____ A

به تصویر مقابل دقت کنید.

_____ B

به نظر شما کدام پاره خط بزرگتر است؟

با استفاده از خط کش یا کاغذ شفاف از درستی پاسخ خود اطمینان پیدا کنید.

آیا می توان با مشاهدات یا استفاده از حواس از درستی یک موضوع اطمینان حاصل کرد؟ چرا؟

خیر، زیرا حواس ها خطا دارند و گاهی دچار خطای دید می شوند.

نکته: ضعیف ترین استدلال، استدلال شهودی است.

سوال: برای هر کدام از مثال های زیر مشخص کنید استدلال به کار رفته معتبر است یا غیر معتبر؟

چرا؟

رضا می گوید که معلم هیچ وقت روزهای دوشنبه از من درس نپرسیده است. امروز دوشنبه است

پس امروز هم از من درس نمی پرسد.

خیر، زیرا بر اساس مشاهدات گذشته نتیجه ای گرفته است که ممکن است درست نباشد.

احمد می گوید: عدد ۳۵۹۱ بر ۳ بخش پذیر است چون مجموع ارقامش ۱۸ و بر ۳ بخش پذیر است.

بله، زیرا براساس اطلاعات قبلی می دانیم عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع اعدادش بر ۳

بخش پذیر باشد.

حسین می گوید: در لوزی مثل متوازی الاضلاع قطر ها همدیگر را نصف می کنند.

بله، زیرا براساس اطلاعات گذشته می دانیم لوزی نوعی متوازی الاضلاع است و در متوازی

الاضلاع قطرهای منصف یکدیگرند پس لوزی نیز این خاصیت را دارد.

امیر می گوید: مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است زیرا مثلث متساوی الاضلاع این ویژگی را دارد.

خیر، زیرا با ذکر یک مثال درست نمی توان نتیجه ای را برای تمام مثلث ها بیان کرد.

سوال: یک استدلال بنویسید که شبیه استدلال زیر باشد.

– تیم فوتبال مدرسه ما هر سال با لباس قرمز وارد زمین شده است مسابقه را باخته است. رنگ لباس امسال این تیم قرمز است پس امسال هم مسابقه را می بازد.

پاسخ: همه ی فرزندان خاله من پسر هستند پس فرزند دیگرش که ماه آینده به دنیا می آید نیز

پسر خواهد بود (نتیجه گیری اشتباه براساس توجه به مشاهدات قبلی)

درس دوم

آشنایی اثبات در هندسه:

برای اثبات با مشخص کردن درستی یک موضوع ابتدا باید بدانیم در مورد این موضوع چه اطلاعاتی وجود دارد.

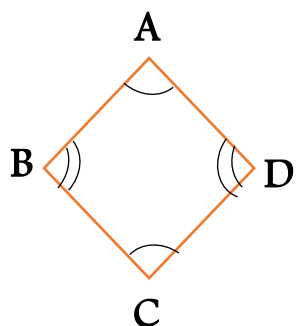
فرض: به اطلاعات داده شده در صورت مساله (داده های مساله یا فرض) می گویند.

بعد از تشخیص فرض، باید دقت کنیم مساله چه چیزی را از ما می خواهد و باید چه چیزی را نشان دهیم.

حکم: خواسته های مساله را حکم مساله می گویند.

برای اثبات این ادعا در استدلالمان از داشته های مساله (فرض) و اصولی که از قبل درستی آن ها برای ما مشخص شده است برای رسیدن به حکم مساله استفاده می کنیم.

مثال: در هر یک از مساله های زیر فرض و حکم را مشخص کنید.

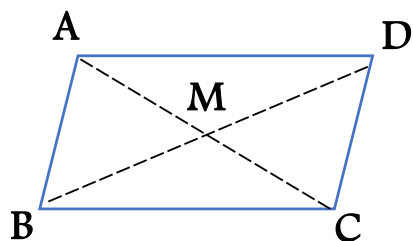


۱» در لوزی زاویه های رو به رو با هم برابرند.

پاسخ: برای نوشتن فرض و حکم می توان روابط را به زبان

ریاضی نوشت:

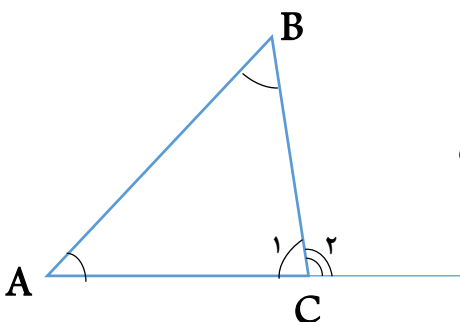
فرض	چهار ضلعی ABCD لوزی است
حکم	زاویه های روبرو برابرند، به زبان ریاضی $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$



۲» در متوازی الاضلاع قطر ها همدیگر را نصف می کنند.

فرض	چهار ضلعی ABCD متوازی الاضلاع است
حکم	قطر ها همدیگر را نصف می کنند، به زبان ریاضی $\overline{BM} = \overline{DM}$, $\overline{AM} = \overline{CM}$

مثال: در هر مثلث اندازه ی زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر است.



فرض	ABC مثلث است
حکم	اندازه زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر است

با توجه به شکل فرض و حکم را می توان به صورت زیر هم نمایش داد.

$$\text{فرض: } \begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{حکم: } \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}_2$$

حل: ضلع AC را امتداد و زاویه ی خارجی C را مشخص می کنیم بنا به دانسته های قبلی می دانیم

مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است. همچنین دو زاویه $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$ مکملند. پس مجموع این دو زاویه هم ۱۸۰ درجه است.

بنابراین استدلال زیر را داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \cancel{\widehat{C}_1} = \cancel{\widehat{C}_1} + \widehat{C}_2 = \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}_2$$

دقت کنیم با استدلالی شبیه استدلال بالا این خاصیت برای زاویه های خارجی دیگر مثلث هم برقرار

است پس می توان این ویژگی را به هر زاویه از مثلث **تعمیم** داد.

تعمیم: وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم (مانند زاویه خارجی C در

مثال بالا) اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال هایی خود به کار برده ایم، در سایر عضوهای

مجموعه (دو زاویه خارجی دیگر مثلث مثال بالا) باشد. می توان درستی نتیجه را به همه عضوهای مجموعه (همه زوایای خارجی) **تعمیم** داد.

درس سوم

همنهشتی مثلث ها

ابتدا به تعاریف زیر دقت کنیم:

نیمساز: نیم خطی است که از رأس شروع شده و زاویه را به دو قسم مساوی تقسیم می کند.

ارتفاع: پاره خطی است که از رأس مثلث به ضلع مقابل یا امتداد آن عمود باشد.

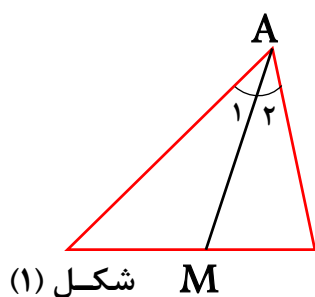
عمود منصف: خطی است که از وسط ضلع بر آن عمود شده باشد.

میانه: پاره خطی است که از یک رأس مثلث به وسط ضلع مقابلش وصل شده باشد.

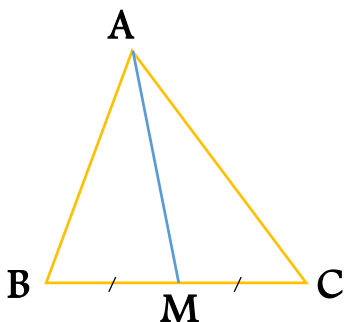
با توجه به نکات درس قبل: در صورت سوال از هر کدام از عبارات بالا می توان فرض مناسب را در نظر گرفت.

برای درک بهتر به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۱: در شکل (۱) پاره خط AM نیمساز زاویه A است یعنی $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$



مثال ۲: در شکل (۲) پاره خط AM میانه ی وارد بر قاعده BC است یعنی $\overline{BM} = \overline{CM}$



شکل (۲)

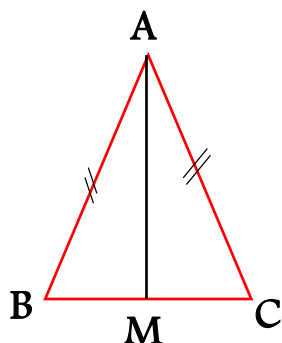
برای اینکه نشان دهیم دومتثلث همنهشت هستند می توانیم از یکی از حالت های زیر استفاده کنیم و لازم نیست برابری تمام اضلاع و زاویه ها بررسی گردد.

حالت اول: برابری سه ضلع (ض ض ض)

اگر هر سه ضلع مثلث اول با اضلاع مثلث دوم دو به دو برابر باشند آن دو مثلث حتماً همنهشت هستند.

مثال: مثلث ABC متساوی الساقین است و AM میانه وارد بر ضلع BC می باشد. چرا مثلث

AMB و AMC همنهشت هستند؟



پاسخ: میانه قاعده را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند،

$$\overline{BM} = \overline{CM} \text{ بنابراین داریم:}$$

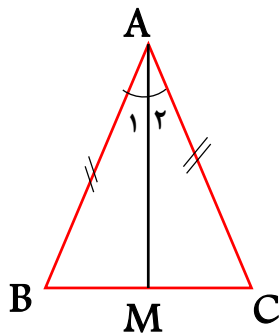
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} : \text{ زیرا مثلث متساوی الساقین است} \\ \overline{BM} = \overline{CM} : \text{ زیرا } AM \text{ میانه است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} : \text{ زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

حالت دوم: برابری دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)

اگر دو ضلع از مثلث اول با دو ضلع از مثلث دوم برابر و زاویه بین آن دو در هر دو مثلث برابر باشد آن دو مثلث حتماً همنهشت هستند.

مثال: مثلث ABC متساوی الساقین و AM نیمساز A است. چرا دو مثلث ABM و ACM با هم

همنهشت هستند؟



پاسخ: AM نیمساز زاویه A است پس $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ بنابراین:

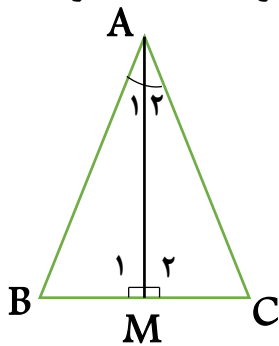
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} : \text{ زیرا مثلث متساوی الساقین است} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} : \text{ زیرا } AM \text{ نیمساز } \widehat{A} \text{ است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} : \text{ زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array} \right\} \xRightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

حالت سوم: برابری دو زاویه و ضلع بین آنها (ز ض ز)

اگر دو زاویه از مثلث اول با دو زاویه از مثلث دوم برابر و ضلع بین آنها در دو مثلث برابر باشد آن دو مثلث حتماً همنهشت هستند.

مثال: در مثلث ABC پاره خط AM نیمساز زاویه A و بر BC عمود است چرا دو مثلث ACM و

ABM همنهشت هستند؟



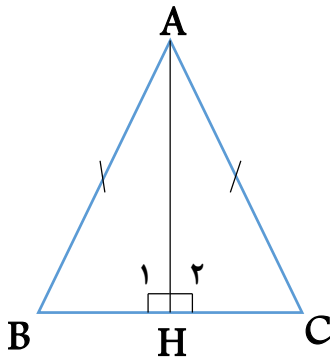
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ \text{ : زیرا } AM \text{ بر } BC \text{ عمود است} \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ : زیرا } AM \text{ نیمساز } A \text{ است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} \text{ : زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(ز.ض.ز)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

حالت چهارم: برابری وتر و یک ضلع زاویه ی قائمه در مثلث قائم الزاویه

دقت کنیم این حالت مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

مثال: مثلث ABC متساوی الساقین و AH ارتفاع آن است. چرا دو مثلث ABH و ACH

همنهشت هستند؟



پاسخ: ابتدا توجه کنیم چون AH ارتفاع است پس دو مثلث ABH و ACH قائم الزاویه هستند و

AB و AC در دو مثلث وتر هستند.

بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ \\ \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AH} \text{ ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta ABH \cong \Delta ACH$$

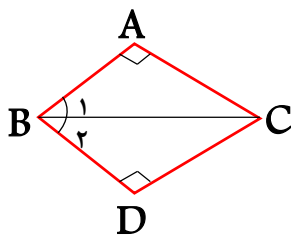
حالت پنجم: برابری وتر و یک زاویه ی تند از مثلث قائم الزاویه

دقت کنیم این حالت هم مانند حالت قبل فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

مثال: در شکل داده شده BC نیمساز زاویه ی B است. چرا دو مثلث ABC و DBC همنهشت

هستند؟

پاسخ: با توجه به اینکه دو مثلث قائم الزاویه هستند و وتر



هر دوی آن ها BC است. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \\ \overline{BC} = \overline{BC} \\ \hat{B_1} = \hat{B_2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک زاویه تند)}} \Delta ABC \cong \Delta DBC$$

فرزندم با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن

درس چهارم

اثبات و حل مساله در هندسه

برای حل یک مساله هندسی راه حل کلی وجود ندارد

ولی می توان مراحل را مشخص کرد و با دقت بیشتری به جواب رسید.

قدم های حل مساله:

۱ فهمیدن صورت مساله

۲ رسم شکل مناسب

۳ تشخیص فرض و حکم

۴ استدلال

ابتدا صورت مساله را با دقت می خوانیم و مفاهیم تشکیل دهنده ی آن را شناسایی می کنیم. اگر

مساله فاقد شکل است با توجه به صورت مساله یک شکل مناسب برای آن رسم می کنیم. داده

های مساله (فرض) و خواسته های مساله (حکم) را تشخیص می دهیم و در یک جدول می

نویسیم و برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا می کنیم و مساله را اثبات می کنیم.

برای بهتر فهمیدن گام های حل مساله به سوال زیر توجه کنید.

مثال ۱: نشان دهید زاویه های متقابل به رأس با هم برابرند.

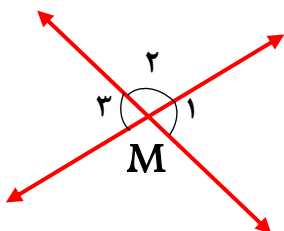
پاسخ:

گام اول: زاویه های متقابل به رأس از برخورد دو خط راست ایجاد می گردد.

گام دوم: در زاویه ی متقابل به رأس رسم می کنیم و زاویه ها را نام گذاری می کنیم

گام سوم: فرض مساله متقابل به رأس بودن دو زاویه و حکم مساله نشان دادن تساوی آن ها است

گام چهارم: دقت کنیم طبق شکل دو زاویه ی ۱ و ۲ مکمل و دو زاویه ی ۲ و ۳ نیز مکمل یکدیگرند. بنابراین طبق شکل زیر داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^\circ \\ \widehat{M_2} + \widehat{M_3} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{M_1} + \cancel{\widehat{M_2}} = \widehat{M_3} + \cancel{\widehat{M_2}} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_3}$$

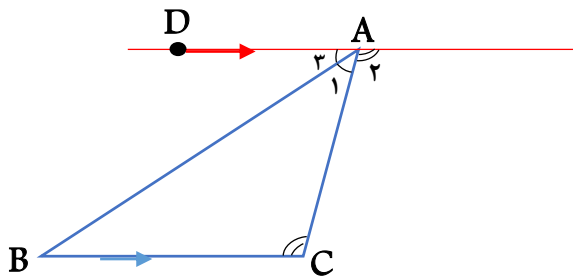
حکم

فرض

مثال ۲: نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

پاسخ: مثلث دلخواه ABC را رسم می کنیم. از رأس دلخواهی خطی موازی با ضلع مقابل به آن

رسم می کنیم. (مطابق شکل ۱) و با توجه به خاصیت خطوط موازی و مورب و تساوی زوایا حکم را اثبات می کنیم.



طبق فرض $AD \parallel BC$ و AB مورب است پس $\widehat{B} = \widehat{A}_3$

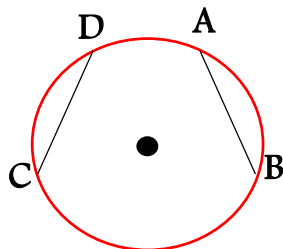
طبق فرض $AD \parallel BC$ و AC مورب است پس $\widehat{C} = \widehat{A}_2$

AD خط راست است پس $\widehat{A}_3 + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{A}_3 \\ \widehat{C} = \widehat{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{A}_1 + \widehat{C} = \widehat{A}_3 + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ$$

گاهی در اثبات یک حکم باید از تساوی اجزای متناظر استفاده کرد به مثال زیر و گام های حل مساله توجه کنید:

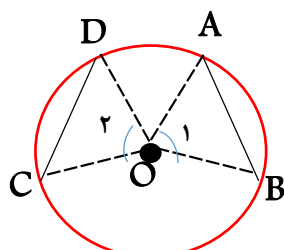
مثال: نشان دهید در یک دایره وترهای مقابل به کمان های مساوی با هم برابرند.



گام اول: در صورت سوال از کمان و دایره نام برده شده

بنابراین از مفاهیم مربوط به آن باید استفاده کرد.

گام دوم: برای درک بهتر شکل ترسیم می کنیم.



گام سوم: در دایره ی رسم شده مرکز را به نقطه ی O نشان داده ایم و

AB و CD طبق فرض مساله کمان هایی مساوی هستند. می خواهیم

ثابت کنیم $\overline{AB} = \overline{CD}$ (حکم مساله)

شکل ۱

گام چهارم: برای نشان دادن این حکم دو مثلث در نظر می گیریم و همنهشتی

بین آن ها را اثبات و از این همنهشتی تساوی اجزای آن ها را نتیجه می گیریم. بنابراین طبق شکل

۱ داریم:

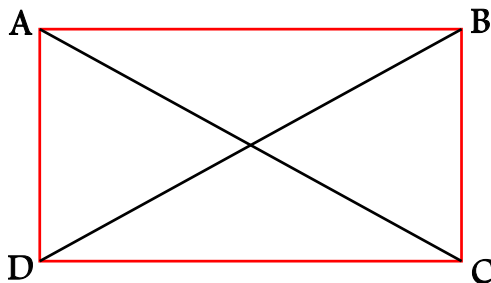
فرض	$\widehat{AB} = \widehat{CD}$
حکم	$\overline{AB} = \overline{CD}$

چون کمان های AB و CD با هم برابرند زوایای مرکزی مقابل به آن ها هم با هم برابرند. از طرفی اضلاع در مثلث شعاع های دایره هستند بنابراین با خلاصه کردن توضیحات بالا داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BO} = \overline{DO} \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \\ \underbrace{\overline{AO} = \overline{CO}}_{\text{فرض}} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta AOB \cong \Delta COD \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{AB} = \overline{CD}}_{\text{حکم}}$$

پاسخ:

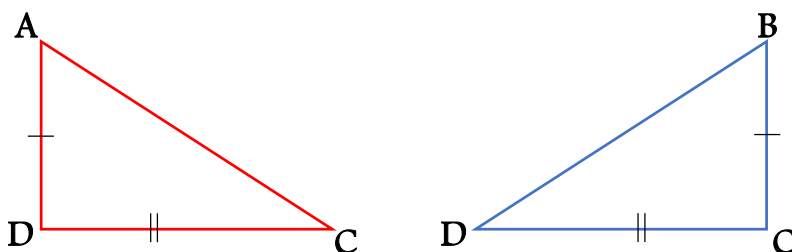
تمرین ۱: نشان دهید قطرهای مستطیل با هم برابرند.



برای درک بهتر شکل ترسیم می کنیم. در مستطیل داده شده $\overline{AC} = \overline{BD}$

فرض مساله مستطیل بودن چهار ضلعی است و می دانیم در مستطیل اضلاع رو به رو به دو به دو مساوی و هر چهار زاویه قائمه هستند. با انتخاب دو مثلث مناسب و نشان دادن هم نهشتی بین آنها می توان تساوی قطرهای را نتیجه گرفت. دقت کنیم مثلث هایی را انتخاب کنیم که قطرهای AC و BD اجزای متناظر آن ها باشند.

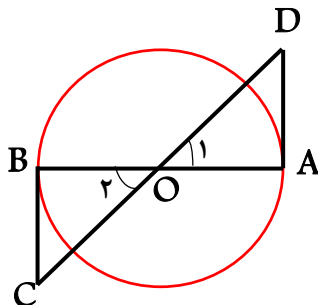
می توان دو مثلث قائم الزاویه ی ADC و BDC را انتخاب کرد و برای درک بهتر این دو مثلث را به صورت جداگانه می کشیم.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \widehat{D} = \widehat{C} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک هر دو مثلث } \overline{DC} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle ADC \cong \triangle BDC \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{AC} = \overline{BC}}_{\text{حکم}}$$

تمرین ۲: در شکل مقابل O مرکز و BC و AD بر دایره مماس اند. نشان دهید $\overline{AD} = \overline{BC}$

پاسخ:



دقت کنیم شعاع دایره در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است.

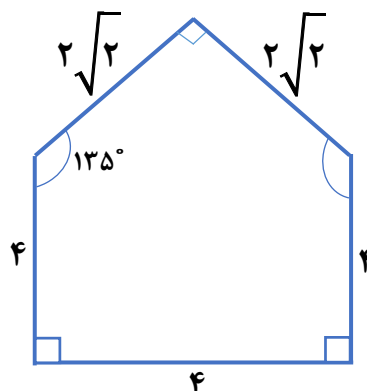
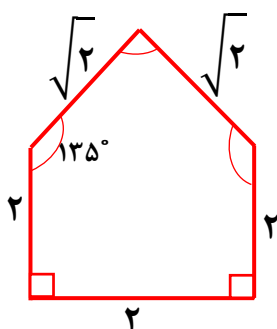
پس زوایای A و B قائمه هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OB} = \overline{OA} \\ \widehat{B} = \widehat{A} = 90^\circ \\ \widehat{O_2} = \widehat{O_1} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle BOC \cong \triangle AOD \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{BC} = \overline{AD}}_{\text{حکم}}$$

درس پنجم

شکل های متشابه

مثال ۱: اندازه اضلاع و زوایای شکل های زیر را بنویسید و آن ها را با هم مقایسه کنید.



پاسخ:

اندازه ی اضلاع و زوایای روی هر کدام نوشته شده است. با مقایسه ی دو شکل می بینیم زوایای

متناظر با هم برابر و اضلاع یک نسبت تغییر کرده اند (دو برابر شده اند)

هرگاه دو چند ضلعی با تعداد اضلاع برابر، همه ی ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند

(کوچک یا بزرگ شده یا تغییر نکرده باشند) و زوایای متناظر در هر دو شکل با هم برابر

باشند آن دو چند ضلعی با هم متشابه اند.

به نسبت بین دو ضلع متناظر در شکل متشابه نسبت تشابه می گویند.

نکته: دو شکل هم نهشت با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آن ها ۱ است.

مثال ۲: نسبت تشابه دو مربع $\frac{2}{7}$ است اگر ضلع مربع کوچکتر ۶۰ سانتی متر باشد ضلع مربع

بزرگتر چقدر است؟

پاسخ:

با استفاده از نسبت تشابه و نسبت بین اضلاع داریم:

$$\frac{\text{ضلع مربع کوچک}}{\text{ضلع مربع بزرگ}} = \frac{2}{7} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 7 \times 30 = 210$$

مثال ۳: مثلثی به اضلاع ۴ و ۵ و ۷ سانتی متر با مثلثی که اضلاعش به ترتیب از کوچک به

بزرگ ۱ - x و ۱۵ و ۳ + ۲y است متشابه اند.

الف) نسبت تشابه در شکل را بنویسید.

ب) مقدار x و y را محاسبه کنید.

پاسخ:

چون اضلاع دو مثلث به ترتیب از کوچک به بزرگ نوشته شده اند پس تناسب بین اضلاع به صورت

زیر است:

$$\frac{4}{x-1} = \frac{5}{15} = \frac{7}{2y+3} \quad \text{پس نسبت تشابه آن ها} \quad \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \text{یا } 1 \text{ به } 3 \text{ است.}$$

با تشکیل تناسب اضلاع و محاسبه ی آن ها داریم:

$$2y + 3 = 3 \times 7 = 21 \Rightarrow 2y = 21 - 3 \Rightarrow 2y = 18 \Rightarrow y = 18 \div 2 = 9$$

$$x - 1 = 4 \times 3 = 12 \Rightarrow x = 12 + 1 \Rightarrow x = 13$$

در درس مطالعات اجتماعی با نقشه و کاربرد آن آشنا شدید، نقشه ها شکل های متشابه با طبیعت می باشند و در نقشه نسبت تشابه را مقیاس می نامند. در مطالعات هشتم در مورد مقیاس در نقشه مطالبی را آموخته اید.

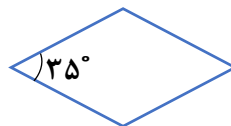
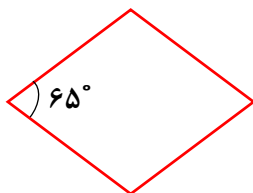
مثال ۴: مقیاس یک نقشه ۱:۲۰۰۰۰ است. اگر فاصله ی دو میدان در نقشه ۴cm باشد، فاصله ی

این دو میدان در واقعیت چقدر است؟

$$\frac{\text{فاصله در نقشه}}{\text{فاصله ی واقعی}} = \frac{۴}{۲۰۰۰۰} = \frac{۱}{x} \Rightarrow x = ۴ \times ۲۰۰۰۰ = ۸۰۰۰۰ \text{ cm} = ۸۰۰ \text{ m}$$

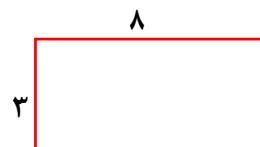
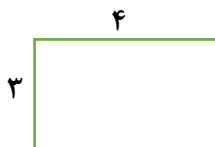
مثال ۵: با یک مثال نشان دهید جملات زیر نادرست است.

الف) هر دو لوزی دلخواه متشابه هستند.



در این دو شکل زوایای متناظر برابر نیستند.

ب) هر دو مستطیل دلخواه متشابه هستند.



در این دو شکل اضلاع متناظر متناسب نیستند.

نسبت طول ها ۱ به ۲ است ولی عرض ها برابرند.

نکته ۱: هر دو مربع دلخواه و هر دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه و در حالت کلی هر دو چند

ضلعی منتظم با تعداد ضلع های مساوی دلخواه با هم متشابه هستند.

مثال ۶: اضلاع دو مربع داده شده ۱ و ۳ سانتی متر است.



الف) نسبت تشابه دو مربع را بنویسید.

$$\frac{\text{ضلع مربع کوچک}}{\text{ضلع مربع بزرگ}} = \frac{1}{3}$$

ب) محیط دو مربع را محاسبه کنید و نسبت محیط دو مربع را به دست آورید. چه رابطه ای با نسبت

تشابه دو مربع و نسبت مساحت های آن ها وجود دارد؟

$$\frac{\text{محیط مربع کوچک}}{\text{محیط مربع بزرگ}} = \frac{4}{12} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

نکته ۲: (نسبت محیط دو مربع با نسبت تشابه آن ها برابر است).

ج) مساحت دو مربع را محاسبه کنید و نسبت مساحت دو مربع را به دست آورید. چه رابطه ای با

نسبت تشابه دو مربع و نسبت مساحت های آن ها وجود دارد؟

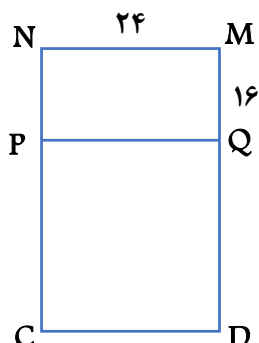
$$\frac{\text{مساحت مربع کوچک}}{\text{مساحت مربع بزرگ}} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

نکته ۳: (نسبت مساحت دو مربع با مجذور نسبت تشابه آن ها برابر است).

نکته ۴: اگر نسبت تشابه دو شکل $\frac{a}{b}$ باشد، نسبت محیط های آن ها $\frac{a}{b}$ و نسبت مساحت آن ها

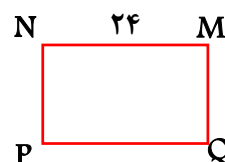
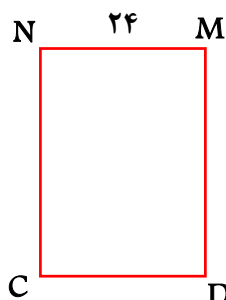
$(\frac{a}{b})^2$ است.

مثال ۷: دو مستطیل MNPQ و MNCD متشابه اند. اندازه ی پارخ خط NC را محاسبه کنید.



پاسخ: ابتدا برای تشخیص بهتر اضلاع دو مستطیل را جداگانه

ترسیم می کنیم (شکل ۱)



شکل (۱)

دقت کنیم طول مستطیل کوچک (MN و PQ) و عرض مستطیل بزرگ (MN و CD) با هم برابرند.

$$\frac{MN}{NC} = \frac{MQ}{MN} \Rightarrow \frac{24}{NC} = \frac{16}{24} \Rightarrow NC = \frac{24 \times 24}{16} = 36$$

فرزندان نکات ارائه شده را مرور و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درس را

حل کن.

تمرینات پایان فصل

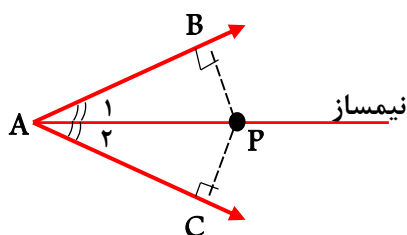
۱- نشان دهید فاصله ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه برابر است.

پاسخ: نقطه ی P را روی نیمساز زاویه ی A در نظر می گیریم برای نشان دادن فاصله ی P از اضلاع

زاویه از نقطه ی P بر دو ضلع زاویه عمود رسم می کنیم و نقطه ی برخورد با ضلع را B و C می

نامیم. باید نشان دهیم: $\overline{BP} = \overline{CP}$ دقت کنیم AP وتر مشترک دو مثلث است پس می توان از

حالت وتر و یک زاویه تند استفاده کرد.



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C} = \widehat{B} = 90^\circ \\ \text{وتر مشترک: } AP \\ \underbrace{\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2}_{\text{فرض}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(و ز)} \\ \Rightarrow \triangle ACP \cong \triangle ABP \end{array} \xrightarrow[\text{حکم}]{\text{تساوی اجزای متناظر در مثلث}} \underbrace{\overline{PC} = \overline{PB}}_{\text{حکم}}$$

دقت کنیم که این استدلال را به هر نقطه ی دیگر روی نیمساز زاویه ی A می توان تعمیم داد.

۲- مثلی به اضلاع ۵ و ۳ و ۴ با مثلی دیگر به محیط ۳۶ متر متشابه است. اضلاع مثلث یزرگتر را محاسبه کنید.

پاسخ: محیط مثلث اول برابر است با $P_1 = 3+4+5=12$

طبق نکته ۲ نسبت تشابه دو مثلث با نسبت محیط آن ها برابر است.

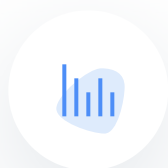
$$\text{پس: } \frac{P_1}{P_2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad \text{نسبت تشابه}$$

بنابراین اضلاع مثلث دوم سه برابر مثلث اول و به ترتیب ۱۵ و ۹ و ۱۲ است.



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد