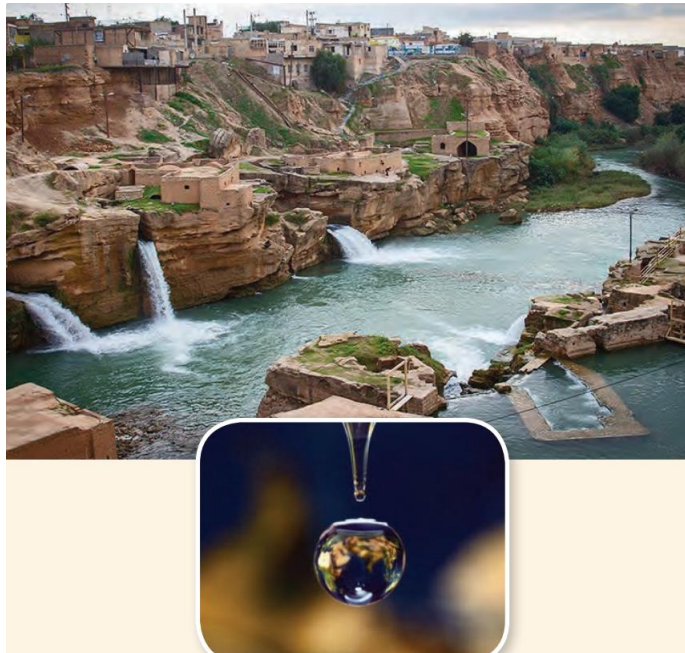


فصل ۴

توان و ریشه



هدف کلی

شناخت توان صحیح مثبت و منفی و ضرب و تقسیم اعداد تواندار و ریشه گیری و جمع و تفریق رادیکال ها و گویا کردن مخرج کسرها
در پایان فصل از دانش آموزان انتظار می رود:

- ۱- توان صحیح مثبت و منفی را بداند.
- ۲- ضرب و تقسیم اعداد تواندار را بداند.
- ۳- معادله توانی و حل معادلات توانی را بداند.
- ۴- با ریشه گیری آشنا شود، بتواند از اعداد ریشه دوم و ریشه سوم بگیرد.
- ۵- ساده کردن رادیکال ها را بداند.
- ۶- جمع و تفریق رادیکال ها را بتواند انجام دهد.
- ۷- در مخرج کسرها اگر عدد رادیکالی باشد با استفاده از خواص رادیکال ها بتواند مخرج را گویا کند.

توان صحیح

درسنامه ۱

یادآوری:

اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد آن گاه:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ تا}}$$

مثال:

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$b^6 = b \times b \times b \times b \times b \times b$$

نکته ۱: اگر a یک عدد حقیقی و غیر صفر باشد آن گاه:

$$a^0 = 1$$

مثال:

$$\left(\frac{5}{9}\right)^0 = 1 \quad (-100)^0 = 1 \quad 4^0 = 1 \quad (-2)^0 = 1$$

تعریف: اگر a یک عدد غیر صفر و n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال:

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{64}, \quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

نکته ۲: اگر یک کسر توان داشته باشد و بخواهیم علامت توان آن را عوض کنیم (از مثبت به منفی یا بالعکس) کسر معکوس می شود.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$$

مثال:

تبدیل به توان مثبت تبدیل به توان منفی

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{+2}, \quad \left(\frac{4}{7}\right)^{+7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-7}$$

مثال: حاصل عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

۱) 1^{-4} ۲) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2}$ ۳) $3^0 - 4^{-1}$ ۴) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

۵) $\frac{3^{-1}}{9^{-2}}$ ۶) $7^{-1} + 4^{-1}$ ۷) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} a \cdot b^{-1}$

پاسخ:

$$۱) 1^{-4} = \frac{1}{1^4} = \frac{1}{1 \times 1 \times 1 \times 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$۲) \left(-\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{7}{2} \times -\frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

$$۳) 3^0 - 4^{-1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{1 \times 4} - \frac{1 \times 1}{4 \times 1} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$۴) \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = \frac{27}{8}$$

$$۵) \frac{3^{-1}}{9^{-2}} = \frac{\frac{1}{3^1}}{\frac{1}{9^2}} = \frac{9^2 \times 1}{3^1 \times 1} = \frac{9^2}{3^1} = \frac{9 \times 9}{3} = \frac{81}{3} = 27$$

$$۶) 7^{-1} + 4^{-1} = \frac{1 \times 4}{7 \times 4} + \frac{1 \times 7}{4 \times 7} = \frac{4}{28} + \frac{7}{28} = \frac{4+7}{28} = \frac{11}{28}$$

$$۷) \left(\frac{a}{b}\right)^{-۱} \times a \times b^{-۱} = \frac{b}{a} \times a \times \frac{1}{b} = \frac{\cancel{b} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{b}} = \frac{1}{1} = 1$$

قواعد ضرب و تقسیم اعداد تواندار

اگر a و b دو عدد حقیقی مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشند آن گاه:

(۱) در ضرب اعداد تواندار اگر پایه ها یکسان باشند، توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:

$$۳^{-۴} \times ۳^۵ = ۳^{-۴+۵} = ۳^۱ = ۳$$

$$\left(\frac{۲}{۷}\right)^{۱۰} \times \left(\frac{۲}{۷}\right)^۶ = \left(\frac{۲}{۷}\right)^{۱۰+۶} = \left(\frac{۲}{۷}\right)^{۱۶}$$

(۲) در ضرب اعداد تواندار اگر توان ها با هم برابر باشند، پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال:

$$۹^۴ \times ۱۰^۴ = (۹ \times ۱۰)^۴ = ۹۰^۴$$

$$\left(\frac{۲}{۵}\right)^۶ \times \left(\frac{۵}{۴}\right)^۶ = \left(\frac{\cancel{۲} \times \cancel{۵}}{\cancel{۵} \times \cancel{۴}}\right)^۶ = \left(\frac{1}{۲}\right)^۶$$

(۳) در تقسیم اعداد تواندار اگر پایه ها یکسان باشند، توان ها را از هم کم می کنیم.

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

مثال:

$$۵^{۱۰} \div ۵^۶ = ۵^{۱۰-۶} = ۵^۴$$

$$7^4 \div 7^6 = 7^{4-6} = 7^{-2} = \frac{1}{7^{+2}} = \frac{1}{7 \times 7} = \frac{1}{49}$$

(۴) در تقسیم اعداد تواندار اگر توان ها با هم برابر باشند، پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

مثال:

$$12^3 \div 4^3 = \left(\frac{12}{4}\right)^3 = 3^3 = 27$$

$$9^6 \div 10^6 = \frac{9^6}{10^6} = \left(\frac{9}{10}\right)^6$$

(۵) اگر عدد تواندار به توان عدد دیگر برسد، پایه نوشته شده توان ها در هم ضرب می شوند.

توان

توان

پایه

$$(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$$

مثال:

$$(6^2)^3 = 6^{2 \times 3} = 6^6$$

$$(5^4)^{10} = 5^{4 \times 10} = 5^{40}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3 \times 4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

مثال:

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $(-3)^{-2} \times (-2)^{-2}$

۲) $\frac{3^4 \times 7^3}{3^6 \times 7^5}$

۳) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)^2$

۴) $3^{23} - (2^2)^3$

پاسخ:

$$۱) (-۳)^{-۲} \times (-۲)^{-۲} = ((-۳) \times (-۲))^{-۲} = ۶^{-۲} = \frac{1}{۶^۲} = \frac{1}{۳۶}$$

$$۲) \frac{۳^۴ \times ۷^۳}{۳^۶ \times ۷^۵} = ۳^{۴-۶} \times ۷^{۳-۵} = ۳^{-۲} \times ۷^{-۲} = (۳ \times ۷)^{-۲} = ۲۱^{-۲} = \left(\frac{1}{۲۱}\right)^۲ = \frac{1}{۴۴۱}$$

$$۳) \left[\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۲}\right]^۲ = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۴} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۴ = \frac{۲^۴}{۳^۴} = \frac{۱۶}{۸۱}$$

$$۳^{۲۳} - (۲^۲)^۳ = ۳^۸ - ۲^{۲ \times ۳} = ۳^۸ - ۲^۶ = ۶۵۶۱ - ۶۴ = ۶۴۹۷$$

$$۲^۳ = ۸ \quad ۳^۸ = ۶۵۶۱ \quad ۲^۶ = ۶۴$$

معادله توانی

برای حل معادله توانی باید دو طرف تساوی را با پایه های برابر یا توان های برابر بنویسیم.

از تساوی $a^x = a^y$ برای حل معادله استفاده می کنیم ($a \neq ۰$)

مثال:

در هر یک از قسمت های زیر مقدار x را بدست آورید.

$$۱) ۴^x \times ۴^{x+۱} = ۴^{x+۵}$$

$$۲) ۹^{x-۲} = ۱$$

$$۳) ۳^{x+۱} = ۹^{x-۱}$$

پاسخ: ها با هم برابرند، توان ها را با هم قرار می دهیم.

$$۱) ۴^x \times ۴^{x+۱} = ۴^{x+۵} \Rightarrow ۴^{x+x+۱} = ۴^{x+۵} \Rightarrow ۴^{2x+۱} = ۴^{x+۵} \Rightarrow 2x+1 = x+5$$

$$\Rightarrow 2x - x = 5 - 1 \Rightarrow x = 4$$

$$2) 9^{x-2} = 1 \Rightarrow 9^{x-2} = 9^0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$3) 3^{x+1} = 9^{x-1} \Rightarrow 3^{x+1} = (3^2)^{x-1} \Rightarrow 3^{x+1} = 3^{2(x-1)} = 3^{2x-2} \Rightarrow$$

$$x+1=2x-2 \Rightarrow 1+2=2x-x \Rightarrow 3=x \Rightarrow x=3$$

مقایسه ی اعداد تواندار با توان های طبیعی

نکته ۱: اگر a و b دو عدد مثبت و $a < b$ آن گاه $a^n < b^n$ و $n \in \mathbb{N}$ و برعکس.

مثال:

$$3 < 5 \Rightarrow 3^4 < 5^4, \quad 0/2 < 0/3 \Rightarrow (0/2)^5 < (0/3)^5$$

نکته ۲: اگر a عددی بزرگتر از ۱ باشد، هرچه توان های بالاتری از آن حساب کنیم

حاصل بزرگتر می شود.

$$a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$$

مثال:

$$3^5 > 3^4, \quad 3^{20} < 3^{30}$$

نکته ۳: اگر $0 < a < 1$ (کوچکتر از یک و a مثبت باشد) آنگاه هر چه توان های

بالاتری از آن را حساب کنیم حاصل کوچک تر می شود.

$$a^1 > a^2 > a^3 > \dots$$

مثال:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} > \left(\frac{1}{2}\right)^{30}$$

$$\frac{1}{2} < 1$$

$$(0.04)^{11} > (0.04)^{16}$$

$$0.04 < 1$$

مثال: اعداد 27^4 ، 81^4 و 9^7 را با یکدیگر مقایسه کنید.

پاسخ: سه عدد داده شده را بر حسب پایه های ۳ می نویسیم و سپس آن ها را با هم مقایسه می کنیم.

$$27^4 = (3^3)^4 = 3^{12}, \quad 81^4 = (3^4)^4 = 3^{16}, \quad 9^7 = (3^2)^7 = 3^{14}$$

$$3^{16} > 3^{14} > 3^{12} \rightarrow 81^4 > 9^7 > 27^4$$

نماد علمی:

برای محاسبه ی ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

تعریف:

هر عدد اعشاری مثبت را می توانیم به صورت $a \times 10^n$ بنویسیم که در آن $1 \leq a < 10$ و n عددی صحیح است. این نوع نمایش اعداد را **نماد علمی** می گوئیم.

الف) نماد علمی اعداد خیلی بزرگ (توان مثبت) ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

$$1) \quad 5400000 = 5 \overset{\text{رقم ۷}}{\underbrace{400000}} = 5/4 \times 10^{+7}$$

۱۰ رقم

$$۲) ۹۴۰۰۰۰۰۰۰ = ۹/۴ \times ۱۰^{+۱۰}$$

۲ رقم

$$۳) ۲۷۶ = ۲/۷۶ \times ۱۰^{+۲}$$

۲ رقم

$$۲۷۶ = ۲/۷۶$$

یک رقم از سمت چپ جدا می کنیم دو رقم بعد از اعشار است.

$$۴) ۹۷۴۵ = ۹/۷۴۵ = ۹/۷۴۵ \times ۱۰^{+۳}$$

ب) نماد علمی اعداد خیلی کوچک (توان منفی) ابتدا یک رقم مخالف صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

۶ رقم

$$۱) ۰/۰۰۰۰۰۳۷ = ۰/۰۰۰۰۰۳۷ = ۳/۷ \times ۱۰^{-۶}$$

۷ رقم

$$۲) ۰/۰۰۰۰۰۰۱۲ = ۱/۲ \times ۱۰^{-۷}$$

۴ رقم

$$۳) ۰/۰۰۰۴۰۳ = ۴/۰۳ \times ۱۰^{-۴}$$

مثال: جرم یک ذره تقریبا $۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۶۷$ کیلوگرم است. این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

$$۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۶۷ = ۶/۷ \times ۱۰^{-۹}$$

۱- مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱) (-3)^2 \quad ۲) 3^0 + 3^{-1} + 3^{-2} \quad ۳) \left(\frac{3}{5}\right)^{-5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^8$$

$$۴) 5 - 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad ۵) 3^{22}$$

$$۶) \left[(3^{-1} + 4^{-1})^{-1} + \left(\frac{7}{9}\right)^{-1} \right]^{-3} \quad ۷) \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-n} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n$$

۲- در هر یک از تساوی های زیر مقدار X را به دست آورید.

$$۱) 3^x \times 3^{2x+1} = 3^{x-1}$$

$$۲) 4^x \times \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 1$$

$$۳) 81 \times 8^x = (16 \times 36)^2$$

۳- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$2^{-2}, (4^{-1})^0, 3^{-2}, (4^{-2})^2, \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}, -3^2$$

۴- هر یک از عددهای زیر را با نماد علمی نمایش دهید.

$$۱) 130000000$$

$$۲) 0.0000006$$

$$۳) 4000000 \times 5000000$$

۵- نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

$$۱) 1/2 \times 10^4$$

$$۲) 2/51 \times 10^{-6}$$

$$۳) 0.245 \times 10^{-6}$$

درسنامه ۲

ریشه گیری

تعریف: اگر b یک عدد حقیقی باشد، توان دوم b ، یعنی b^2 را مربع b می گوئیم.

به عنوان مثال مربع اعداد -1 و $\frac{2}{3}$ و 5 به ترتیب:

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = +1$$

تعریف: اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد $\sqrt{b}$ ، $-\sqrt{b}$ را ریشه های دوم b می نامند و داریم

$$(\pm\sqrt{b})^2 = b$$

به عنوان مثال $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ، $-\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$ ریشه های دوم $\frac{1}{4}$ هستند.

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

مثال:

$$\sqrt{-4} \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \quad , \quad \sqrt{-10} \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$1) \sqrt{\left(\frac{-4}{5}\right)^2} =$$

$$۲) \sqrt{۵^۲} =$$

$$۳) \sqrt{x^۲} + \sqrt{y^۲} = (x > ۰, y < ۰)$$

پاسخ:

$$۱) \sqrt{\left(\frac{-۴}{۵}\right)^۲} = \left| \frac{-۴}{۵} \right| = -\left(\frac{-۴}{۵}\right) = +\frac{۴}{۵}$$

$$۲) \sqrt{۵^۲} = |۵| = ۵$$

$$۳) \sqrt{x^۲} + \sqrt{y^۲} = x - y$$

$$\sqrt{x^۲} = |x| \xRightarrow{x>۰} x$$

$$\sqrt{y^۲} = |y| \xRightarrow{y<۰} -y$$

تعریف: اگر b یک عدد حقیقی باشد $b^۳$ را مکعب b می نامیم.

به عنوان مثال مکعب اعداد ۲، $-\frac{1}{۳}$ ، $۰/۱$ به ترتیب $۲^۳=۲ \times ۲ \times ۲=۸$ و

$$\left(-\frac{1}{۳}\right)^۳ = -\frac{1}{۳} \times -\frac{1}{۳} \times -\frac{1}{۳} = -\frac{1}{۲۷}$$

$$(۰/۱)^۳ = ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ = \frac{1}{۱۰} \times \frac{1}{۱۰} \times \frac{1}{۱۰} = \frac{1}{۱۰۰۰} = ۰/۰۰۱$$

تعریف: اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[۳]{b}$ نمایش می دهیم و داریم:

$$(\sqrt[۳]{b^۳}) = b$$

به عنوان مثال ریشه سوم عدد $-\frac{1}{8}$ عدد $-\frac{1}{2}$ است زیرا:

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2})^3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

نکته ۱: هر عدد حقیقی فقط یک ریشه سوم دارد.

نکته ۲: تساوی $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$ همواره برقرار است.

مثال:

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = -\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^3} = -\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{64}{125}} = -\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = -\sqrt[3]{\frac{4^3}{5^3}} = -\sqrt[3]{(\frac{4}{5})^3} = -\frac{4}{5}$$

ضرب و تقسیم رادیکال ها

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند آن گاه:

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

مثال:

$$\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

به طور مشابه برای ریشه سوم نیز برای هر دو حقیقی a و b داریم:

$$\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

مثال:

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{2 \times (-4)} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{\frac{3}{81}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{3}$$

نکته: رابطه های مشابه ضرب و تقسیم برای جمع و تفریق رادیکال ها وجود ندارد یعنی اگر a و b

دو عدد حقیقی باشند

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

مثال:

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4+3=7$$

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{25}$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$$

۱- ریشه های دوم هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱) ۲۵ \quad ۲) \frac{۴}{۹} \quad ۳) ۰/۶۴ \quad ۴) ۴۹x^2y^4, (x > 0)$$

۲- ریشه های سوم هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱) -۱۲۵ \quad ۲) \frac{-۶۴}{۳۴۳} \quad ۳) \frac{x^3y^6}{۲۷}$$

۳- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱) \sqrt{x^2y^4} \quad ۲) \sqrt[3]{\frac{1}{64}x^3y^3}$$

$$۳) \sqrt[3]{\frac{8}{1000}} \quad ۴) \sqrt[3]{x\sqrt{\frac{1}{x^2}}} \quad (x > 0)$$

۴- اگر $x < 0$ و $y > 0$ ، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱) \sqrt{y^2} - \sqrt{x^2} =$$

$$۲) \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} =$$

۵- عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۱) \frac{\sqrt{۴۸}}{\sqrt{۳}} =$$

$$۲) \sqrt[3]{۱۸} \times \sqrt[3]{۱۲} =$$

$$۳) \sqrt[3]{-۰/۱} \times \sqrt[3]{۰/۰۸} =$$

$$۴) \frac{\sqrt{۸x^3y^3}}{\sqrt{2x}} = \quad (x > ۰, y > ۰)$$

$$۵) \frac{\sqrt[3]{۱۶} \times \sqrt[3]{۸۱}}{\sqrt[3]{۶}} =$$

درسنامه ۳

جمع و تفریق رادیکال ها

برای ساده کردن رادیکال ها از تساوی های $\sqrt{a} = |a|$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$ استفاده می کنیم.
سپس برای ساده کردن رادیکال ها باید در عبارت زیر رادیکال با استفاده از تجزیه عبارت هایی به صورت O^2 برای $\sqrt{a}$ و O^3 برای $\sqrt[3]{a}$ به وجود آورد و از عملیات های ضرب و تقسیم استفاده نمود.
مثال: رادیکال های زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt{50}$

۲) $\sqrt[3]{40}$

۳) $\sqrt[3]{-0.002}$

۴) $\sqrt{72a^4b^5}$

پاسخ:

۱) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 5^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{5^2} = \sqrt{2} \times 5 = 5\sqrt{2}$

۲) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{5 \times 2^3} = \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{5} \times 2 = 2\sqrt[3]{5}$

۳) $-0.002 = -2 \times 10^{-3} \Rightarrow \sqrt[3]{-0.002} = \sqrt[3]{-2 \times 10^{-3}} = \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{(-10)^{-3}}$
 $= \sqrt[3]{-2} \times (-10)^{-1} = \sqrt[3]{-2} \times \frac{+1}{-10} = \sqrt[3]{-2} \times -\frac{1}{10} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{10}$

۴) $\sqrt{72a^4b^5} = \sqrt{2 \times 6^2 \times (a^2)^2 \times b^4 \times b} = \sqrt{2 \times b \times 6^2 \times (a^2)^2 \times (b^2)^2}$
 $= \sqrt{2b(6a^2b^2)^2} = \sqrt{2b} \times \sqrt{(6a^2b^2)^2} = \sqrt{2b} \times 6a^2b^2 = 6a^2b^2\sqrt{2b}$

جمع و تفریق رادیکال ها:

در جمع و تفریق رادیکال ها، در صورت وجود رادیکال های یکسان، می توان با فاکتور گیری از آن، ضرایب آن ها را با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

مثال:

رادیکال های زیر یکسان هستند.

$$5\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \Rightarrow \text{رادیکال های یکسان}$$

$$6\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 11\sqrt{5} \Rightarrow \text{رادیکال های یکسان}$$

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (5 + 3 + 4)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{5} - \sqrt{5} + 11\sqrt{5} = (6 - 1 + 11)\sqrt{5} = 16\sqrt{5}$$

مثال:

کدام عبارات رادیکالی زیر با $5\sqrt{2}$ جمع نمی شود.

الف) $-\sqrt{2}$

ب) $3\sqrt{50}$

ج) $\sqrt{72}$

د) $\sqrt{20}$

پاسخ:

بررسی گزینه ها:

الف) $\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$ با هم جمع می شوند زیرا قسمت رادیکالی آن ها یکسان ($\sqrt{2}$) هست.

$$5\sqrt{2} - \sqrt{2} = (5 - 1)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

ب) ابتدا $3\sqrt{50}$ را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{50} &= 3 \times \sqrt{25 \times 2} = 3 \times \sqrt{5^2 \times 2} = 3 \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 3 \times (5 \times \sqrt{2}) \\ &= 3 \times 5 \times \sqrt{2} = 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

پس $3\sqrt{50}$ و $5\sqrt{2}$ با هم جمع می شوند

$$3\sqrt{50} + 5\sqrt{2} = 15\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (15 + 5)\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

ج) ابتدا $\sqrt{72}$ را ساده می کنیم:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = \sqrt{6^2} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

پس $\sqrt{72}$ با $5\sqrt{2}$ جمع می شود زیرا پس از ساده شدن قسمت رادیکالی ($\sqrt{2}$) یکسان می شود

$$\sqrt{72} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

د) ابتدا $\sqrt{20}$ را ساده می کنیم:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

پس $\sqrt{20}$ با $5\sqrt{2}$ جمع نمی شوند زیرا قسمت رادیکالی آن ها یکسان نیست.

$$\sqrt{20} + 5\sqrt{2} = 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{5} \text{ و } \sqrt{2} \text{ دیگری با هم جمع نمی شوند}$$

پس پاسخ گزینه (د) است.

مثال:

حاصل عبارت های زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt{18} + \sqrt{32}$

۲) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{3}$

۳) $\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54}$

پاسخ:

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال ها را به ساده ترین صورت ممکن می نویسیم:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad , \quad \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$۱) \sqrt{18} + \sqrt{32} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3+4)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad , \quad \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{12} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad , \quad 3\sqrt{75} = 3 \times 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + \sqrt{3} = \underbrace{(4 - 15 + 1)}_{-10}\sqrt{3} = -10\sqrt{3}$$

۳) $\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54}$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \times 2} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$2\sqrt[3]{54} = 2 \times 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} = 2\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = (2 - 6)\sqrt[3]{2} = -4\sqrt[3]{2}$$



گویا کردن مخرج کسرها:

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا آسان تر کردن محاسبات لازم است مخرج

یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم.

برای گویا کردن مخرج کسرها، ابتدا رادیکال را ساده می کنیم و پس از قاعده زیر استفاده می کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \times \frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^{m-n}}} = \frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^n \times x^{m-n}}} = \frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^{n+m-n}}} = \frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^m}} = \frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{x}$$

پایه ها برابر توان ها با هم جمع می شوند

مثال:

مخرج کسره‌ای زیر را گویا کنید.

$$۱) \frac{5}{\sqrt{3}} =$$

$$۲) \frac{1}{\sqrt[3]{16}} =$$

$$۳) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - 2\sqrt{5}} =$$

پاسخ:

$$۱) \frac{۵}{\sqrt{۳}} = \frac{۵}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} \times ۳} = \frac{۵\sqrt{۳}}{\sqrt{۳^2}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sqrt[3]{۱۶} = \sqrt[3]{۸ \times ۲} = \sqrt[3]{۸} \times \sqrt[3]{۲} = \sqrt[3]{۲^3} \times \sqrt[3]{۲} = ۲\sqrt[3]{۲}$$

$$۲) \frac{۱}{\sqrt[3]{۱۶}} = \frac{۱}{۲\sqrt[3]{۲}} \times \frac{\sqrt[3]{۲^{۳-۱}}}{\sqrt[3]{۲^{۳-۱}}} = \frac{۱ \times \sqrt[3]{۲^2}}{۲\sqrt[3]{۲^1} \times \sqrt[3]{۲^2}} = \frac{\sqrt[3]{۴}}{۲\sqrt[3]{۲^1} \times ۲^2} = \frac{\sqrt[3]{۴}}{۲\sqrt[3]{۲^3}} = \frac{\sqrt[3]{۴}}{۲ \times ۲} = \frac{\sqrt[3]{۴}}{۴}$$

$$۳) \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۲}}{(۱ - ۲)\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۵}}{-\sqrt{۵} \times \sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{-\sqrt{۵^2}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{-۵} = -\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$$

۱- عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۱) ۲\sqrt{۸} - \sqrt{۵۰} + \sqrt{۷۲} =$$

$$۲) \sqrt{۵۰} - ۳\sqrt{۲} =$$

$$۳) \sqrt[۳]{۸۱} + \sqrt[۳]{-۲۴} + ۲\sqrt[۳]{۰/۰۰۳} =$$

$$۴) ۳\sqrt{۲} + \sqrt{۹۰} + ۲\sqrt{۱۶۰} - \sqrt{۱۸} =$$

$$۵) |۳ - \sqrt{۵}| - \sqrt{۵}|۱ - \sqrt{۵}| =$$

$$۶) (۲\sqrt{۸} - \sqrt{۱۸} + \sqrt{۹۸}) \div (۲\sqrt{۲} - \sqrt{۵۰}) =$$

$$۷) ۵\sqrt{۱۲۸} - ۳\sqrt{۷۲} + ۲\sqrt{۲۰۰} + ۴\sqrt{۹۸} - ۴\sqrt{۲۴۲} =$$

۲- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$۱) \frac{۱}{\sqrt{۷}} =$$

$$۲) \frac{۳}{\sqrt[۳]{۵}} =$$

$$۳) \sqrt{\frac{۲}{۵}} =$$

$$۴) \frac{۴}{\sqrt{۳۲}} =$$

$$۵) \frac{\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳}} =$$

$$۶) \frac{۱}{\sqrt{۱۱} - \sqrt{۴۴}} =$$

۳- عبارت های رادیکالی زیر را ساده کنید.

$$۱) \frac{\sqrt{۴۵} - \sqrt{۲۰}}{\sqrt{۳}} =$$

$$۲) \sqrt{۷۵} - ۲\sqrt{۲۷} + \frac{۳}{\sqrt{۳}} =$$

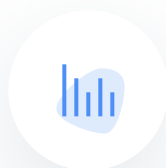
۴- طول یک مستطیل دو برابر عرض آن و قطر آن $۲\sqrt{۱۰}$ است. محیط و مساحت مستطیل را به

دست آورید.



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد