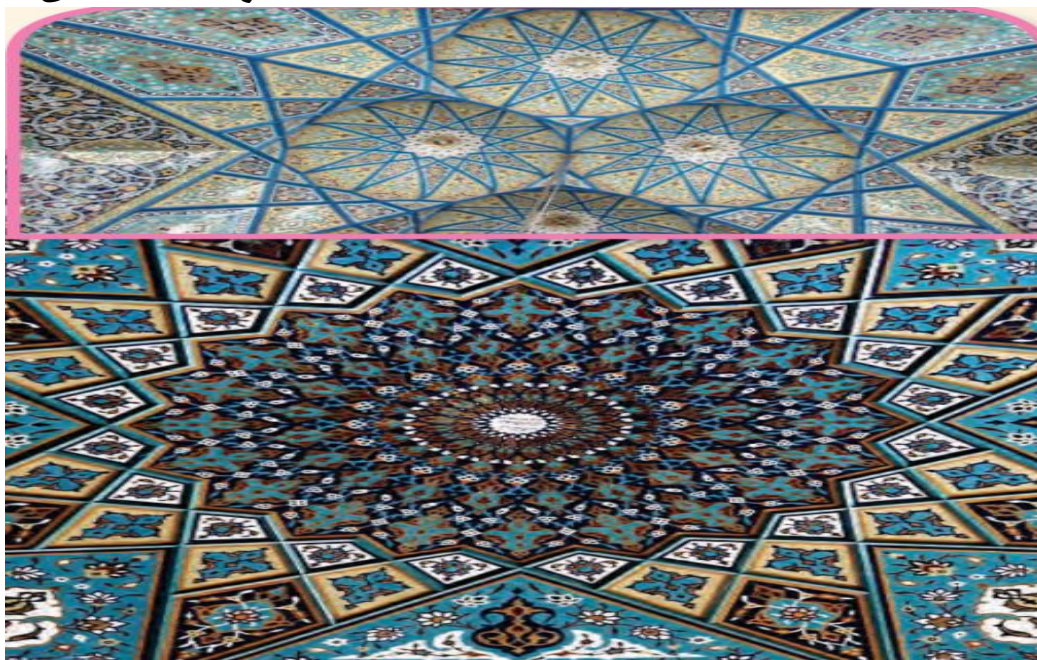


فصل ۶

خط و معادله های خطی



هدف کلی

آشنایی با خط، معادله های خطی و دستگاه مربوط به آن

در پایان فصل از دانش آموزان انتظار می رود:

@nohomi9

۱- تعریف معادله خط و فرم استاندارد آن

۲- یافتن معادله خط با داشتن دو نقطه

۳- به دست آوردن شیب خط و عرض از مبدأ

۴- یادگیری نحوه نوشتن معادله خط

۵- آشنایی با دستگاه معادله های خطی

خط و معادله های خطی

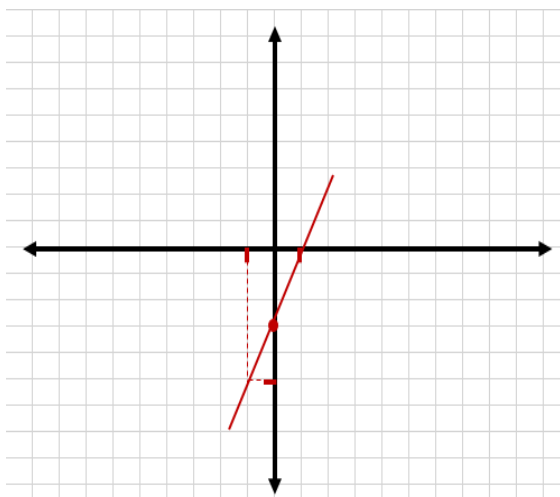
تعریف معادله خط:

هر معادله به شکل $y = ax + b$ که در آن a, b عددهای ثابت و x, y دو متغیر هستند را یک معادله خط می نامیم. زیرا اگر بی شمار پاسخ معادله را به صورت نقطه روی محورهای مختصات نشان دهیم نقطه ها در یک راستا قرار می گیرند و با وصل کردن نقطه ها به هم شکل یک خط راست به دست می آید.

در نتیجه می گوییم x, y با هم رابطه خطی دارند.

مثال:

سه پاسخ برای معادله $y = 2x - 3$ را پیدا کرده و به شکل یک نقطه در دستگاه مختصات رسم کنید و نقطه ها را به هم وصل کنید و بررسی کنید آیا نقطه ها روی یک خط قرار دارند یا خیر؟



بله تقاطع روی یک خط قرار دارند

$$1) x = 0 \rightarrow y = 2(0) - 3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$2) x = 1 \rightarrow y = 2(1) - 3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$3) x = -1 \rightarrow y = 2(-1) - 3 = -5$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

فرم استاندارد معادله خطی:

گاهی اوقات معادلات به شکل $ax+by=c$ که در آن اعداد a, b, c مختلف هستند معادله خطی می باشند زیرا قابل تبدیل به فرم استاندارد $y=ax+b$ می باشند.

مثال:

معادله $3x+2y=5$ را به صورت استاندارد تبدیل کنید.

$$y=ax+b \quad \text{طبق معادله استاندارد}$$

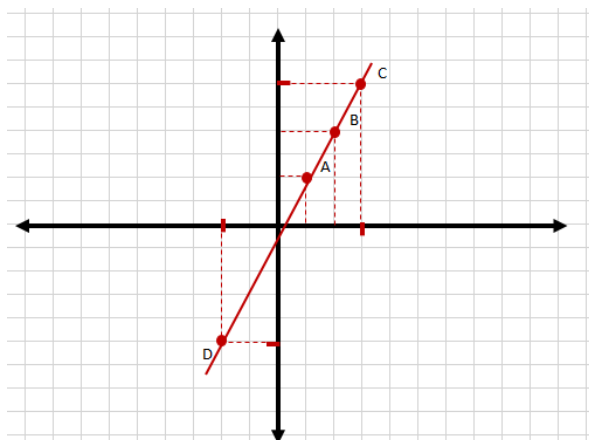
ابتدا جمله $3x$ را به طرف دیگر تساوی انتقال می دهیم یعنی $2y = -3x + 5$ سپس طرفین معادله را بر ضریب 2 یعنی y تقسیم می کنیم یعنی:

$$\frac{2y}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

مثالی دیگر برای مفهوم معادله:

به مختصات نقاط مقابل دقت کنید

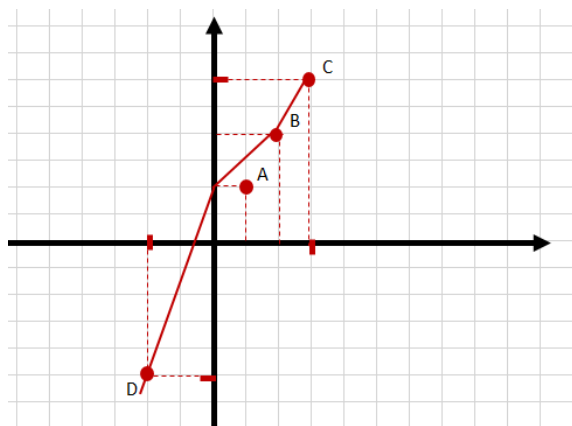
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{طول} \\ \text{عرض} \end{array}$$



در همه آنها عرض نقطه دو برابر طول آن نقطه است یعنی در همه نقاط رابطه یکسانی بین طول و عرض وجود دارد یعنی (طول $\times 2 =$ عرض) می توان آنها را در یک صفحه مختصات رسم می کنیم اگر آنها را به هم وصل کنیم یک خط ایجاد می شود.

در مثالی دیگر به مختصات نقاط دقت کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$



نتیجه: هیچ رابطه ای نمی توان پیدا کرد که بین طول و عرض همه نقاط برقرار باشد حال این نقاط را روی صفحه مختصات رسم می کنیم مشاهده می کنیم که اگر آنها را به هم وصل کنیم یک خط راست ایجاد نمی شود.

نکته ۱: اگر بین طول و عرض چند نقطه یک رابطه و نسبت مساوی وجود داشته باشد آن نقاط روی یک خط قرار دارند. به شرط آنکه توان طول و عرض در آن رابطه یک باشد.

مثال:

در هر بخش مشخص کنید آیا نقاط داده شده روی یک خط قرار دارند یا خیر؟

الف) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 27 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -5 \\ -15 \end{bmatrix}$

پاسخ: بله؛ زیرا در همه نقاط رابطه یکسانی وجود دارد بین طول و عرض.

$\text{عرض} = \text{طول} \times 3$

ب) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

پاسخ: خیر؛ زیرا هیچ رابطه منظمی بین طول و عرض همه نقاط وجود ندارد.

نکته ۲: روش دیگر برای اینکه بدانیم یک نقطه روی یک خط قرار دارد یا خیر؟

می توانیم مختصات نقطه را به جای x, y معادله جایگزین کنیم اگر دو طرف تساوی یکسان باشد روی خط قرار دارد در غیر این صورت خیر.

مثال ۱: آیا نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 2x + 2$ قرار دارد یا خیر؟

پاسخ: طول و عرض نقطه را به جای x, y قرار می دهیم.

$$x = -4, y = -6$$

$$-6 = 2(-4) + 2 \Rightarrow -6 = -6$$

نتیجه می گیریم که نقطه روی خط قرار دارد.

مثال ۲:

آیا خط $y = x - 5$ از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ +2 \end{bmatrix}$ عبور می کند یا خیر؟

$$x = -3, y = 2 \Rightarrow 2 = -5 - 3 \Rightarrow 2 \neq -8$$

پاسخ: خیر؛ زیرا

مثال ۳:

نقطه ای از خط $y = 3x + 4$ پیدا کنید که طول آن ۱- باشد.

پاسخ: به جای x عدد ۱- را قرار می دهیم و بدست میاید.

$$y = 3(-1) + 4 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

مثال ۴:

نقطه ای از خط $y = 4x - 1$ به عرض ۳ پیدا کنید.

$$3 = 4x - 1 \rightarrow 3 + 1 = 4 \rightarrow 4 = 4x \rightarrow x = \frac{4}{4} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{مختصات نقطه}$$

مثال ۵:

مقدار a را طوری تعیین کنید که خط به معادله $y = ax - 3$ از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ عبور کند.

پاسخ: به جای x عدد ۲ و به جای y عدد ۵ را قرار می دهیم و a را پیدا می کنیم.

$$5 = a \times 2 - 3 \rightarrow 2a = 5 + 3 \rightarrow 2a = 8$$

$$a = \frac{8}{2} \rightarrow a = 4$$

مثال ۶:

آیا خط $2x - 5y = 0$ از مبدأ مختصات عبور می کند یا خیر؟

پاسخ: بله، زیرا $x = 0 \rightarrow 2(0) - 5y = 0 \rightarrow -5y = 0$

نقطه از مبدأ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $y = 0$ عبور می کند.

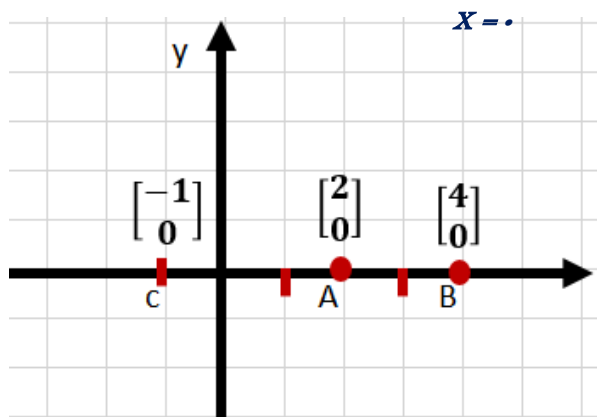
نکته: دومین حالت معادله خط $y = ax$ که از مبدأ مختصات می گذرد.

نتیجه گیری:

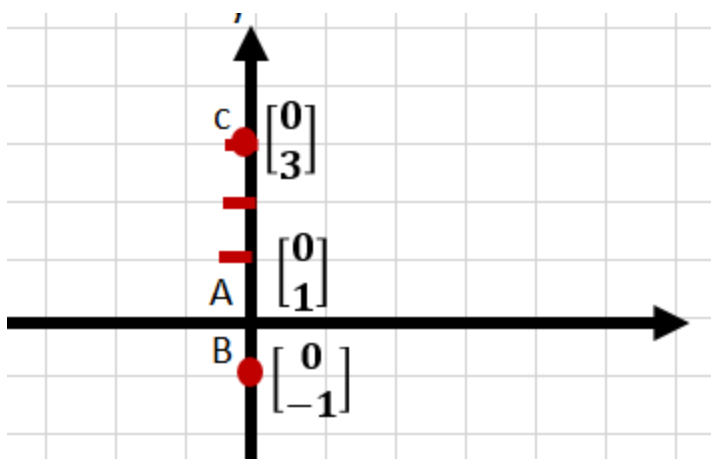
با دقت در حل مثال های قبلی متوجه می شویم که نقاط را از روی معادله خط می توانیم به دست آوریم.

محل برخورد خط و محورها

نقطه ای که روی محور طول قرار دارد دارای عرض صفر است یعنی $(y = 0)$ مانند:



و نقاطی که روی محور عرض قرار دارد طول آن ها صفر است یعنی $(x = 0)$



مثال:

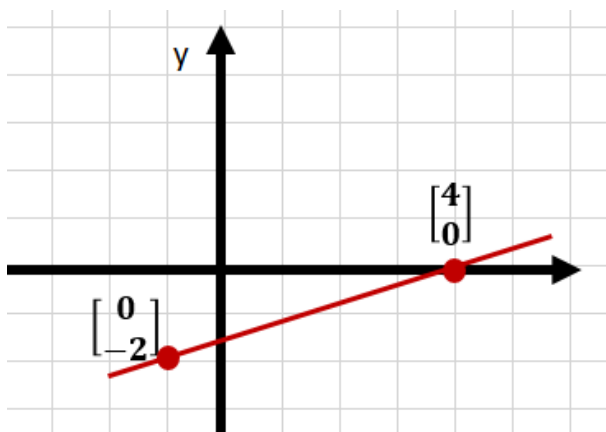
خطی به معادله $6y = 3x - 12$ داریم، این خط در چه نقاطی محور طول ها و عرض ها را قطع می کند؟

پاسخ: طبق نکات قبلی در نقطه ای که خط محور طول ها را قطع می کند $y = 0$ است.

پس نتیجه می گیریم که

$$6y = 3x - 12 \xrightarrow{y=0} 6(0) = 3x - 12 \rightarrow 0 + 12 = 3x \rightarrow x = \frac{12}{3} = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در این نقطه محور طول ها را قطع می کند و همچنین با قراردادن $x = 0$ در معادله خط می توانیم نقطه ای که در آن خط محور عرض ها را قطع می کند را بدست آوریم.

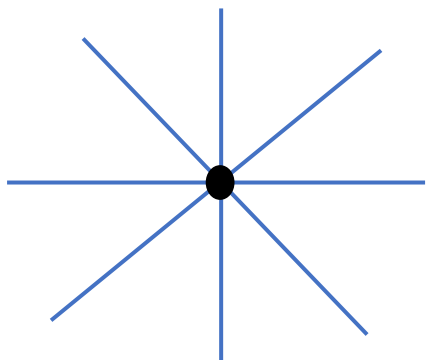


$$6y = 3x - 12 \xrightarrow{x=0} 6y = 3(0) - 12$$

$$6y = -12 \rightarrow y = \frac{-12}{6} = -2$$

در این نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ محور عرض ها را قطع می کند.

روش رسم یک خط



به دو شکل زیر دقت کنید.

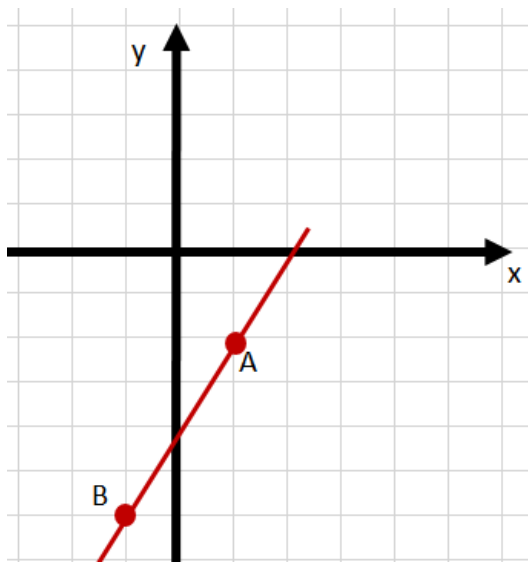


مشاهده می کنید که از یک نقطه بی شمار خط عبور می کند اما از دو نقطه فقط یک خط عبور می کند پس برای اینکه بتوانیم یک خط را رسم کنیم کافی است مختصات دو نقطه آن را داشته باشیم فرض کنید که اکنون معادله یک خط مثل $2x - y = 4$ رو داریم و می خواهیم آن را رسم کنیم.

پاسخ: ابتدا معادله خط را طبق روشی که قبلاً یاد گرفتید استاندارد می کنیم.

$$\frac{-y}{-1} = \frac{-2}{-1}x + \frac{4}{-1} \rightarrow y = 2x - 4$$

حال معادله استاندارد شد به x مقادیر دلخواه داده و y های متفاوت به ازای آنها به دست می آوریم.



@nohomi9

$$x = 1 \rightarrow y = 2(1) - 4 \rightarrow y = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{مختصات نقطه اول}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{مختصات نقطه دوم}$$

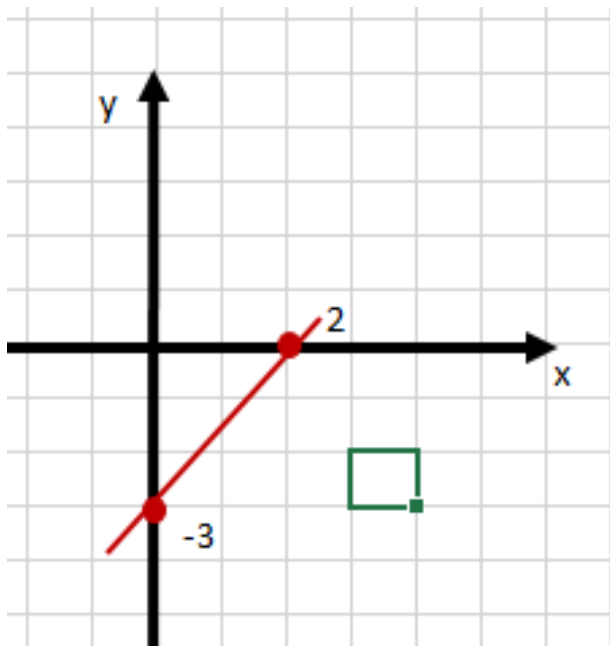
$$x = -1 \rightarrow y = 2(-1) - 4 \rightarrow y = -6$$

تذکر: می توان برای راحتی کار یکبار به x ها مقدار صفر داد یکبار به y ها

مثال ۱:

خط های مقابل را رسم کنید.

$$\text{الف) } 3x - 2y = 6$$



معادله استاندارد $y = \frac{3}{2}x - 3$

$$x \rightarrow 0 = y = \frac{3}{2}(0) - 3 \rightarrow y = -3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{3}{2}x - 3 \rightarrow 0 + 3 = \frac{3}{2}x$$

$$3 = \frac{3}{2}x \rightarrow 3 \div \frac{3}{2} \rightarrow x = 3 \times \frac{2}{3} \rightarrow x = 2$$

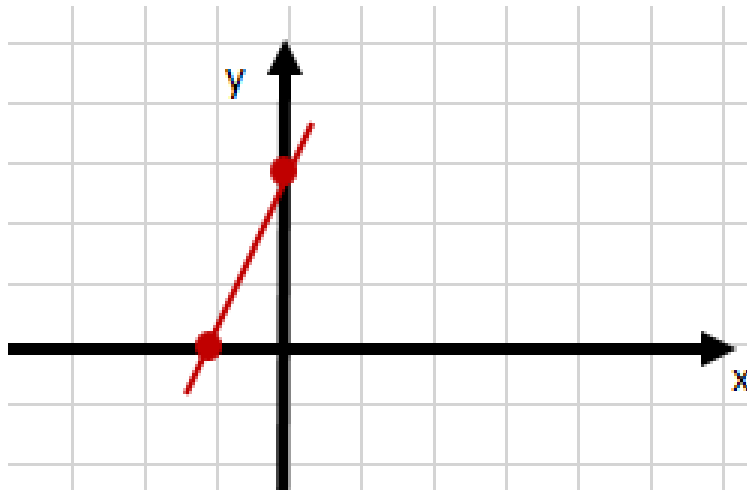
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۲:

استاندارد $3x = y - 3$

در این مثال بدون استاندارد کردن می توان جایگزین کرد

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 3(0) = y - 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ y = 0 \rightarrow 3x = 0 - 3 \rightarrow x = \frac{-3}{3} = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$



نتیجه: همانطور که در حل مثال ها دقت کردید بعضی از خط ها از مبدأ مختصات عبور می کنند که به آن ها خط های گذرنده از مبدأ یا مبدأ گذر می گوییم و بعضی از خط ها با محور مختصات فاصله دارند (مثلثی ایجاد می شود) که می توانیم مساحت آن مثلث را به دست آوریم.

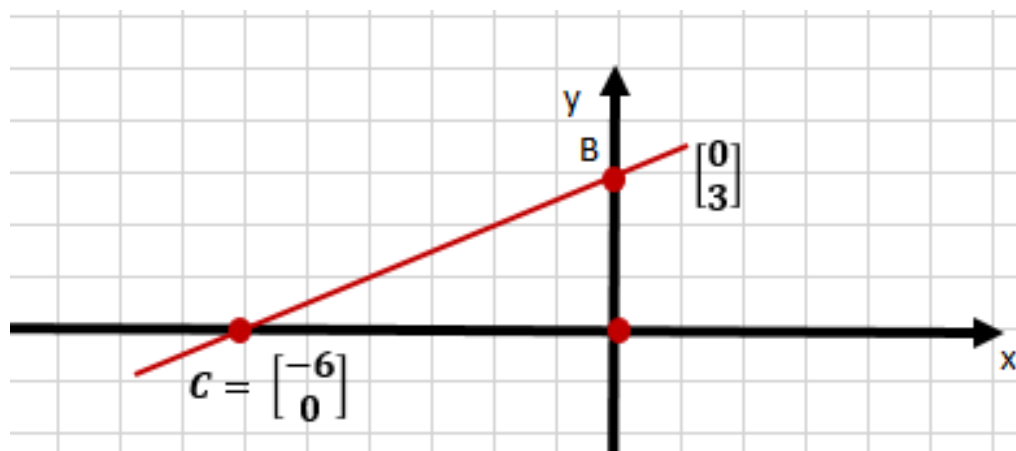
مثال:

اگر برخورد $x - 2y = -6$ با محورهای مختصات مثلثی ایجاد می شود.

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 0 - 2y = -6 \rightarrow y = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ y = 0 \rightarrow x - 2(0) = -6 \rightarrow \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

این یک مثلث قائم الزاویه است که ارتفاع آن ۳ و قاعده آن ۶ است.

$$\text{مساحت} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$



یافتن معادله خط با داشتن دو نقطه

روش اول: همانطور که گفته شد با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط هم می توان معادله آن را

پیدا کرد (رابطه های بعدی را در درس های آینده می آموزیم)

مثال ۱:

معادله خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ را مشخص کنید.

پاسخ: خط مبدأ مختصات می گذرد و به شکل کلی $y = ax$ است و چون از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ می گذرد

نتیجه می گیریم که $5y$ برابر x است یعنی

$$y = 5x$$

مثال ۲:

معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ: در هر نقطه عرض دو برابر طول می باشد پس معادله خط $y = 2x$ است.

مثال ۳:

معادله خط گذرنده از مبدأ مختصات و نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ را بنویسید.

پاسخ: در این نقطه عرض (-4) برابر طول است و از مبدأ مختصات هم عبور می کند.

$$y = -4x \quad \text{معادله}$$

مثال ۴:

تمرین صفحه ۱۰۰ کتاب درسی:

۱- خط به معادله $y = \frac{1}{4}x + 4$ را رسم کنید.

الف) آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است؟ **خیر**

ب) مختصات نقاط برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

ج) نقطه ای از این خط به طول ۱- را پیدا کنید.

پاسخ: همانطور که می دانید برای رسم خط به دو نقطه احتیاج است.

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}(0) + 4 \rightarrow y = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \\ x = 2 \rightarrow y = \frac{1}{2}(2) + 4 \rightarrow y = 5 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ب) محل برخورد محور عرضها

$$\begin{aligned} x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 &= \frac{1}{2}x + 4 \\ 0 - 4 &= \frac{1}{2}x \rightarrow x = -4 \div \frac{1}{2} \rightarrow -4 \times 2 = -8 \end{aligned}$$

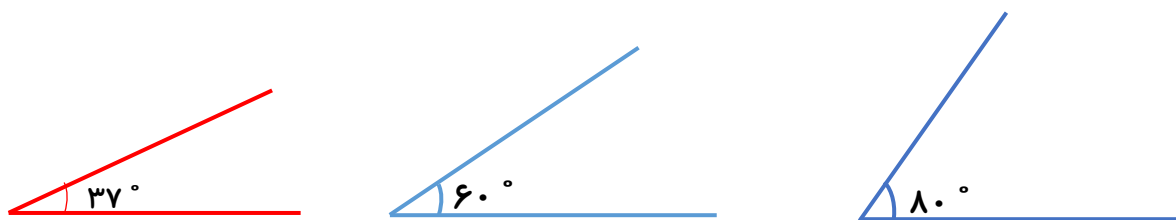
محل برخورد محور طول ها $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{1}{2}(-1) + 4 = y = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

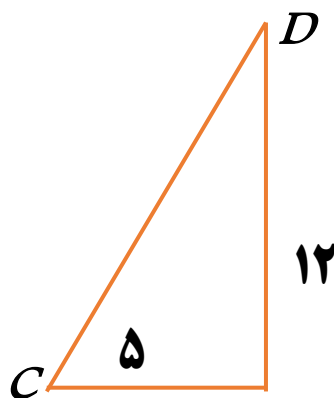
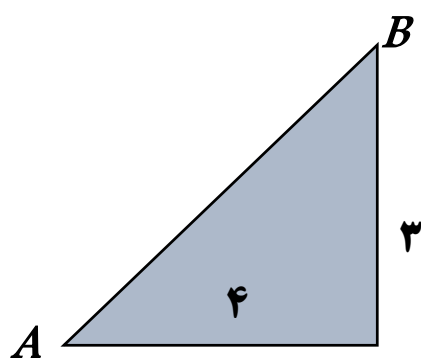
شیب خط و عرض از مبدأ

مفهوم شیب:

همه ما در گفتار های خود از کلمه شیب بارها استفاده کرده ایم معمولاً وقتی به کوه یا تپه یا ... می رسیم در مورد شیب آن بحث می کنیم به طور معمول هرچه زاویه ای که بین سطح مورد نظر و سطح افقی وجود داشته باشد می گوییم شیب بیشتر است مثلاً در این شکل ها از چپ به راست شیب بیشتر است.

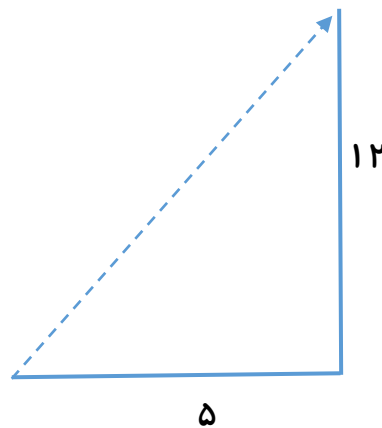
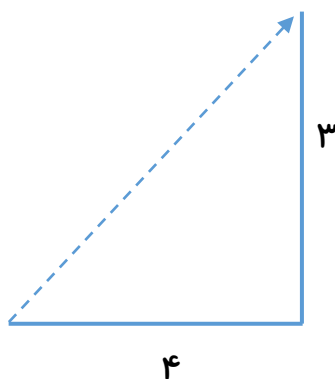


حال می خواهیم مفهوم شیب را از یک دیدگاه دیگر بررسی کنیم فرض کنید از دو سطح مقابل می خواهیم بالا برویم توجیه آنچه در مورد زاویه گفتیم و حتی با توجه به تجربه های خود می توانیم بگوییم رفتن از **C** به **D** سخت تر است، زیرا شیب شکل (سمت راست) بیشتر است.



حال می خواهیم از بردارها کمک بگیریم، فردی که از A به B می رود، مانند این است که ۴ متر به راست و ۳ متر به بالا رفته است (۴متر افقی، ۳ متر عمودی) حال فردی که از C به D برود ۵ متر افقی (به سمت راست) و ۱۲ متر عمودی (به سمت بالا) حرکت می کند از آنجایی که می دانیم شیب سمت راست بیشتر از شکل سمت چپ است می فهمیم که شیب با نسبت حرکت عمودی به حرکت افقی رابطه مستقیم دارد، زیرا در شکل سمت چپ این نسبت $\frac{3}{4}$ و در شکل سمت راست $\frac{12}{5}$ است در صورتی که اگر افقی به عمودی را در نظر بگیریم در شکل سمت چپ این نسبت $\frac{4}{3}$ و در شکل سمت راست این نسبت $\frac{5}{12}$ است که این نسبت نمی تواند شیب را نشان دهد.

نتیجه: برای یک سطح، شیب به نسبت حرکت عمودی به حرکت افقی گفته می شود.

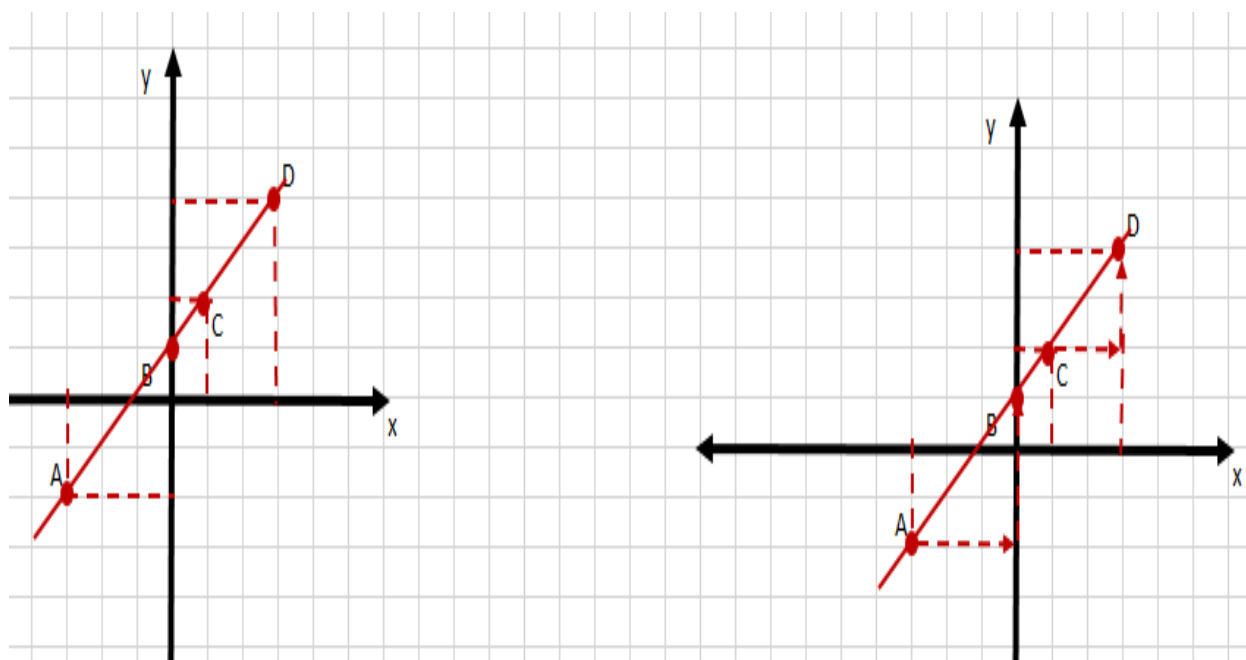


شیب خط:

خط را می توان مانند یک سطح شیب دار در نظر گرفت در شکل زیر فرض کنید یک نفر می خواهد از نقطه **A** به نقطه **B** برود و نفر دیگری می خواهد از نقطه **C** به نقطه **D** برود نفر اول ۳ واحد حرکت افقی و ۳ واحد حرکت عمودی دارد پس شیب خط را $(\frac{3}{3} = 1)$ اعلام می کند نفر دوم ۲ واحد حرکت افقی و ۲ واحد حرکت عمودی انجام می دهد پس او هم شیب خط را $(\frac{2}{2} = 1)$ اعلام می کند. مشاهده می کنید که هر دو نفر به یک شیب دست پیدا کردند.

@nohomi9

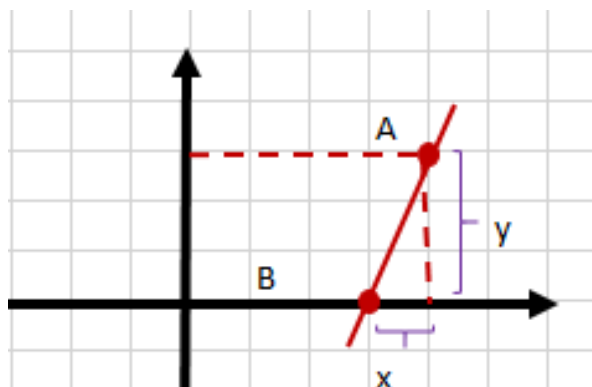
نتیجه: شیب یک خط بین هر دو نقطه دلخواه به یک اندازه است.



در معادله خط $y = ax + b$ به ضریب x یا a شیب خط گفته می شود و با تغییر a ، زاویه خط با محور طول ها تغییر می یابد در واقع شیب خط نسبت تغییرات عرض دو نقطه به تغییرات طول همان دو نقطه می باشد در شکل زیر کاملاً مشخص است.

$$\text{شیب خط} = \frac{y}{x}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{یا} \quad \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$



مثال: شیب خط $2x + 3y = 5$ برابر چیست؟

پاسخ: ابتدا معادله را استاندارد می نویسیم

$$\rightarrow \frac{3}{3}y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{طرفین بر ضریب ۳ تقسیم می شود}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \rightarrow \text{ضریب } x = \text{شیب خط}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \quad \text{یعنی}$$

نکته: با داشتن دو نقطه از خط ، شیب خط را نیز می توانیم مشخص کنیم.

مثال: شیب خطی که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$ می گذرد برابر چه عددی می باشد؟

پاسخ:

$$\text{شیب خط} \frac{yB - yA}{xB - xA} \rightarrow \frac{4 - 8}{-2 - (-1)} = \frac{-4}{-1} \rightarrow 4$$

$$\text{یا} \frac{yA - yB}{xA - xB} \rightarrow \frac{8 - 4}{-1 - (-2)} = \frac{4}{1} \rightarrow 4$$

همانگونه که مشاهده می کنید پاسخ ها یکسان است.

نکته: شرط اینکه چند نقطه مانند A, B, C روی یک خط راست قرار گیرند این است که شیب

AB با شیب AC برابر باشد و یا شیب خط AB, BC یکسان باشد.

مثال ۱:

مقدار a چقدر باشد تا نقاط $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} a \\ a + 2 \end{bmatrix}$ در یک امتداد باشند؟

پاسخ:

نقطه مجهول در اینجا C می باشد پس بهتر است که شیب خط AB را مساوی شیب خط BC

قرار دهیم و مقدار a را پیدا کنید.

$$\text{شیب } BC = \text{شیب } AB \text{ و } \frac{-4-1}{3-2} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\text{شیب } BC = \frac{a+6}{a-3} = \frac{-5}{1} \rightarrow 1(a+6) = -5(a-3)$$

$$a+6 = -5a+15$$

$$6a = 9 \rightarrow a = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

مثال ۲:

شیب خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a-1 \\ a+2 \end{bmatrix}$ عبور می کند برابر با ۳- است مقدار a را محاسبه

کنید.

پاسخ: ابتدا شیب را با استفاده از مختصات دو نقطه محاسبه می کنیم این مقدار باید ۳- شود.

$$\frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \text{شیب} \rightarrow \frac{a+2-3}{a-1-6} = \frac{a-1}{a-7}$$

$$\frac{a-1}{a-7} = \frac{-3}{1} \rightarrow a-1 = -3a+21$$

$$4a = 22 \rightarrow a = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

مثال ۳:

شیب خطی که محور طولها را در نقطه $(+2)$ و محور عرض ها را در نقطه (-4) قطع می کند را محاسبه کنید:

پاسخ: قبلاً گفتیم که نقطه ای روی محور طول ها قرار دارد عرض آن صفر است پس این خط از

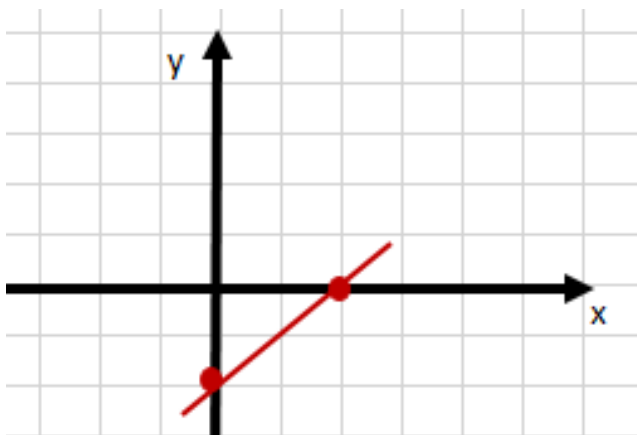
نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ عبور می کند همچنین نقطه ای که روی محور عرض است طولش صفر است پس این خط از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ عبور می کند.

$$\text{شیب} = \frac{0 - (-4)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

عرض از مبدا خط

در معادله خط $y = ax + b$ ، b را عرض از مبدا می نامند. عرض از مبدا در اصل نقطه ای است که خط محور عرضها را قطع می کند.

مثال ۱: عرض از مبدا خط مقابل -2 می باشد زیرا خط محور عرضها را در -2 قطع می کند.



مثال ۲: عرض از مبدأ خط $2x - 5y = 15$ برابر چند است؟

ابتدا معادله خط را استاندارد می نویسیم

$$\frac{-5y}{-5} = \frac{-2x}{-5} + \frac{15}{-5}$$

$$y = -\frac{2}{5}x - 3 \quad \text{عرض از مبدأ} = -3$$

مثال ۳: m را طوری تعیین کنید که عرض از مبدأ خط مقابل ۲ باشد.

$$y = 2x + m - 1 \rightarrow m - 1 = 2 \rightarrow m = 3 \quad \text{می دانیم } m - 1 = b$$

نکته: خط هایی که از مرکز مختصات عبور می کنند و به شکل $y = ax$ هستند دارای عرض از مبدأ صفر هستند.

نحوه نوشتن معادله خط

به دلیل اینکه معادله استاندارد خط به صورت $y = ax + b$ می باشد پس برای نوشتن معادله خط باید a , b معلوم باشند پس اگر شیب و عرض از مبدأ یک خط را بدانیم معادله خط را می نویسیم.

مثال: معادله خطی را بنویسید که محور عرضها (b) را در نقطه ۴ قطع کند و شیب (a) آن ۲ باشد.

پاسخ: $a = 2$, $b = 4$ است پس معادله خط می شود $y = 2x + 4$

نکته ۱: دو خط که شیب های یکسانی دارند با هم موازیند.

نکته ۲: شرط عمود بودن دو خط این است که شیب های آنها معکوس و قرینه باشد یعنی اگر شیب

یکی m باشد ، شیب دیگری $-\frac{1}{m}$ است. یا به بیان دیگر می توان گفت دو خط عمود برهم حاصل ضرب شیب آنها (-1) می باشد.

مثال ۱: معادله خطی را بنویسید که با خط $y = 2x - 4$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ: چون از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ می گذرد پس عرض از مبدأ آن ۵ است و چون با خط $y = 2x - 4$ موازی است پس شیب آن ۲ می باشد.

$$\text{معادله خط} = y = 2x + 5$$

مثال ۲: معادله خطی را بنویسید که محور y ها را در $(+3)$ قطع کند و با خط $y = -3x - 2$ موازی باشد.

$$\text{معادله خط} = y = -3x + 3$$

مثال ۳: معادله خطی را بنویسید که بر خط $y = 2x - 3$ عمود بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ: چون دو خط برهم عمودند پس شیب خط که ۲ هست معکوس و قرینه آن $-\frac{1}{2}$ می باشد و

چون از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ می گذرد پس عرض از مبدأ آن ۵ است.

$$\text{معادله خط} = y = -\frac{1}{2}x + 5$$

مثال ۴: معادله خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ را بنویسید.

پاسخ: چون هر دو عرض -2 می باشد پس معادله خط $y = -2$ می باشد.

نکته ۱: اگر شیب و یک نقطه از خط داده شود از رابطه مقابل معادله خط را می توان به دو روش

بدست آورد.

شیب $\rightarrow$

$$y - y_1 = a(x - x_1) \quad (\text{روش اول})$$

طول نقطه $\rightarrow$ عرض نقطه $\rightarrow$

$$y = ax + b \rightarrow \begin{cases} y = \text{نقطه عرض} \\ x = \text{نقطه طول} \\ a = \text{شیب} \end{cases} \quad (\text{روش دوم})$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که شیب آن 2 بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$y - 4 = 2(x - (-1)) \rightarrow y - 4 = 2x + 2 \quad (\text{روش اول})$$

$$y = 2x + 2 + 4 \rightarrow y = 2x + 6$$

$$4 = 2 \times (-1) + b \quad (\text{روش دوم})$$

$$4 + 2 = b \quad b = 6 \quad \text{حالا در معادله}$$

$$y = 2x + 6 \quad \text{حالا در معادله جایگزین می کنیم}$$

نکته ۲: اگر دو نقطه از خط معلوم باشد برای نوشتن معادله خط ابتدا شیب خط را پیدا می کنیم و سپس با استفاده از مختصات یکی از آن دو نقطه معادله خط را می نویسیم.

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ را بنویسید.

پاسخ: $\frac{-2-0}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$ ابتدا شیب را به دست می آوریم.

سپس یکی از نقطه ها مثلاً $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ را به همراه شیب در نظر گرفته و طبق یکی از دو روش قبلی معادله خط را می نویسیم.

$$y - 0 = -2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 4$$

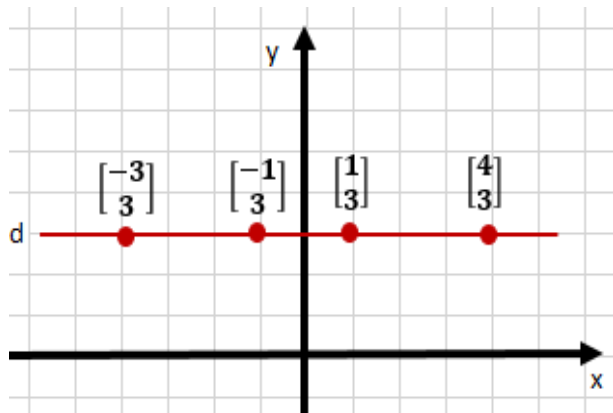
$$\text{شیب} = a = -2$$

$$y_1 = 0$$

$$x_1 = 2$$

و یا طبق روش دوم می توانیم نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ را در معادله $y = -2x + b$ جایگذاری کرده و b را نیز بدست می آوریم.

خط های موازی محورهای مختصات



۱ خط های موازی محور طول ها

به خط d و مختصات نقاط روی آن دقت کنید

مشاهده می کنید که این خط محور عرض ها را در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ قطع می کند پس عرض از مبدأ آن ۳ و

شیب این خط صفر می باشد (خط کاملاً افقی است) پس معادله خط به صورت $y = 3$ می باشد.

نکته: هرگاه در یک خط عرض همه نقاط برابر باشند (مثلاً ۳) آنگاه خط موازی محور طولها خواهد بود و معادله آن برابر با (عرض نقاط $y =$) می باشد.

مثال ۱: معادله خطی بنویسید که بر محور عرض ها عمود باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ عبور کند.

پاسخ: خطی که بر محور عرض ها عمود است یعنی در واقع موازی محور طول هاست و چون در این خط ها عرض همه نقاط برابر است.

$$y = -5 = \text{معادله خطی} = (-5)$$

مثال ۲: معادله خطی که موازی محور طولهاست و از نقطه $\begin{bmatrix} 8 \\ 2a - 3 \end{bmatrix}$ عبور می کند به صورت

$y = 5$ می باشد مقدار a را بیابید؟

پاسخ: چون خط موازی محور طولهاست یعنی خط افقی است و عرض همه نقاط برابر است و چون معادله خط $y = 5$ است پس نتیجه می گیریم.

$$2a - 3 = 5 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

خط های موازی محورهای مختصات

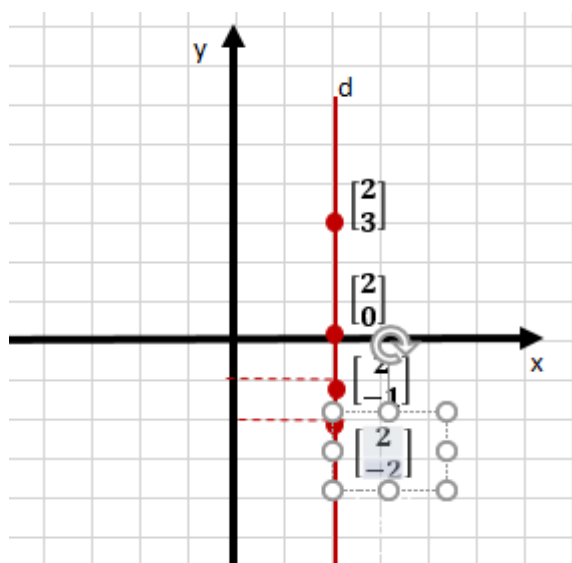
۲ خط های موازی محور عرض ها

به خط d و مختصات نقاط روی آن دقت کنید. این خط محور عرض هارا قطع نمی کند یعنی عرض از مبدأ ندارد (دقت کنید عرض از مبدأ مساوی صفر نیست) شیب این خط هم تعریف نشده است زیرا خط کاملاً عمودی است این را می توانیم با رابطه شیب بین دو تا از نقاط دلخواه نیز نشان داد.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{شیب} = \frac{3 - (-1)}{2 - 2} = \frac{4}{0} = \text{تعریف نشده}$$

می دانیم که اگر مخرج کسر صفر باشد تعریف نشده (بی معنی) است پس عرض از مبدأ هم که ندارد شیب آنها هم تعریف نشده است شاید فکر کنید که این خط ها معادله ندارند اما عجله نکنید به خط خوب دقت کنید همه نقاط روی آن دارای طول نقطه ۲ هست.



به زبان ریاضی $x = 2$ = طول ها همه

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x = 2$$

نتیجه می گیریم هرگاه خطی عمودی باشد آنگاه طول همه نقاط آن با هم برابر است در این نقطه عرض از مبدأ وجود ندارد و شیب تعریف نشده است. معادله این چنین خط هایی به صورت (طول نقاط $x =$) نوشته می شود.

مثال ۱: معادله خطی که موازی محور عرضهاست و محور طولها را در نقطه ای به طول ۸ قطع می کند را بنویسید.

پاسخ: چون خط موازی محور عرض هاست پس طول همه نقاط با هم برابرند. از نقطه $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ عبور می

کند پس نتیجه می گیریم $x = 8$

مثال ۲: معادله خطی را بنویسید که بر محور طول ها عمود باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$ عبور کند.

پاسخ: (عمود بودن بر محور طول ها یعنی موازی محور عرض ها) این خط یک خط عمودی است که

همه نقاط آن برابرند و چون از نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$ عبور می کند پس طول همه نقاط آن ۶ است نتیجه می گیریم معادله خط به صورت $x = 6$ خواهد بود.

مثال ۳: اگر $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ باشند مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را مشخص کنید.

توجه: اگر مختصات وسط پاره خط را لازم داشته باشیم از رابطه $M = \begin{bmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{bmatrix}$ استفاده می کنیم.

پاسخ: $M = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\frac{7+3}{2} = 5$, $\frac{(-2)+(-4)}{2} = -3$

مثال ۴: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}_y$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}_x$ باشد فاصله A تا B یا طول پاره خط AB را تعیین کنید.

توجه: طول پاره خط از رابطه مقابل بدست می آید:

$$\overline{AB} = \sqrt{(xB - xA)^2 + (yB - yA)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(4 - 7)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

چند نکته

الف) قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نسبت به مرکز مختصات به صورت $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$ می باشد.

ب) قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول ها به صورت $\begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$ می باشد.

پ) قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نسبت به محور عرض ها به صورت $\begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix}$ می باشد.

ت) قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نسبت به نیم ساز ربع اول و سوم یا خط $y = x$ به صورت $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ می باشد.

ث) قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نسبت به نیم ساز ربع دوم و چهارم یا خط $y = -x$ به صورت $\begin{bmatrix} -b \\ -a \end{bmatrix}$ می

باشد.

مثال ۱: قرینه نقطه $M = \begin{bmatrix} a+1 \\ b-3 \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول ها به شکل $N = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ می باشد

a, b را تعیین کنید.

پاسخ: طبق نکاتی یاد گرفتید طول تغییر نمی کند و عرض قرینه می شود.

$$a+1=3 \Rightarrow a=2, \quad b-3=2 \Rightarrow b=5$$

مثال ۲: قرینه نقطه $\begin{bmatrix} a+1 \\ b-2 \end{bmatrix}$ نسبت به محور عرض ها به صورت $\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ می باشد $a \times b$ چقدر

است؟

پاسخ: اگر نقطه ای نسبت به محور عرض ها قرینه شود عرض آن ثابت می ماند و طول آن قرینه

می شود.

$$a+1=-2 \Rightarrow a=-3$$

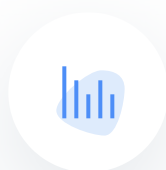
$$b-2=-8 \Rightarrow b=-8+2 \Rightarrow b=-6$$

$$\Rightarrow a \times b = (-3) \times (-6) = 18$$



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد