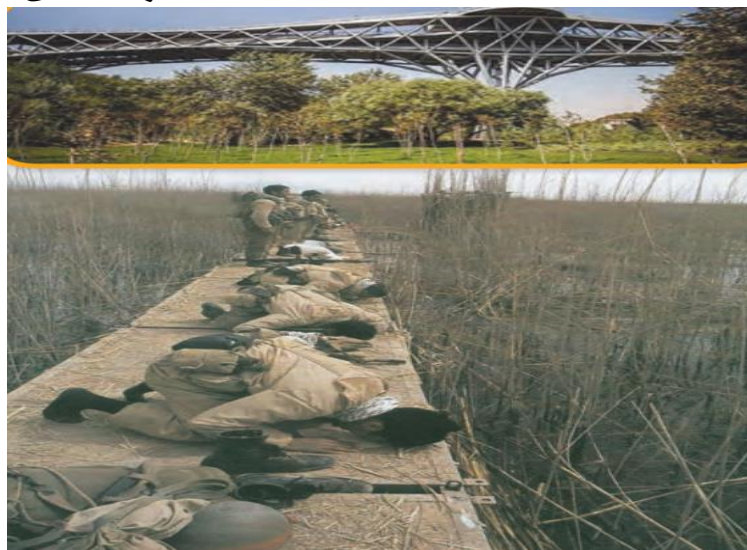


فصل ۷

عبارت های گویا



هدف کلی

معرفی عبارت های گویا و محاسبات مربوط به آنها

در پایان فصل از دانش آموزان انتظار می رود:

- ۱- یادگیری تعریف عبارت گویا و ساده کردن آنها
- ۲- بتوانند عبارت های گویا را ضرب، تقسیم، جمع و تفریق کنند
- ۳- بتوانند عبارت های مرکب را ساده کنند
- ۴- انجام تقسیم چند جمله ای

معرفی و ساده کردن عبارت های گویا

به کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد **عبارت گویا** می گویند.

$$\text{مانند: } -\frac{5}{8} \quad \text{و} \quad \frac{3x}{2y+6}$$

نکته: هرگاه در عبارتی، متغیر **زیر رادیکال** باشد یا **درون قدر مطلق** باشد و یا در **توان** باشد آن گاه آن عبارت گویا نیست.

مثال:

کدام یک از عبارت های زیر گویا است؟

$$\text{الف) } \frac{-x^2}{2x+1} \text{ هست} \quad \text{د) } \frac{|x||y|}{a} \text{ نیست}$$

$$\text{ب) } \frac{x}{\sqrt{y}} \text{ نیست} \quad \text{ه) } \frac{x+\sqrt{7/2}}{|-18|} \text{ هست}$$

$$\text{ج) } \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \text{ هست}$$

مقادیر تعریف نشده عبارت گویا

می دانیم کسرهایی که مخرج آن ها صفر باشد **تعریف نشده** هستند (مانند $\frac{7}{0}$ و $\frac{9}{0}$ و ...) یعنی مقدار مشخصی ندارند.

بنابراین یک عبارت گویا زمانی تعریف نشده است که مخرج آن مساوی صفر باشد.

مثال:

هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است.

$$\text{الف) } \frac{3x-1}{x+1} =$$

پس به ازای $x = -1$ تعریف نشده است $\Rightarrow x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \text{مخرج} = 0$

$$\text{ب) } \frac{2x}{x^2-9} =$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \xRightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-3)(x+3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $x = -3$ و $x = +3$ تعریف نشده است @nohomi9

$$\text{ج) } \frac{2x}{x(3x-9)} =$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$3x - 9 = 0 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $x = 0$ و $x = +3$ تعریف نشده است.

$$\text{د) } \frac{8}{x^6+1} =$$

چون توان متغیر مخرج زوج است و با یک عدد مثبت جمع شده است بنابراین مخرج هیچگاه صفر نمی شود و عبارت گویا همواره تعریف شده است.

ساده کردن عبارت های گویا

برای ساده کردن یک عبارت گویا ، ابتدا در صورت امکان صورت و مخرج کسر را به کمک اتحاد ها

و فاکتورگیری تجزیه کرده و سپس عامل های مشترک موجود در صورت و مخرج کسر را حذف

می کنیم.

مثال:

عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{x^2+3x^2}{x^2+3x} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \frac{x^2(x+3)}{x(x+3)} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = \boxed{x}$$

$$\text{ب) } \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\text{ج) } \frac{y^2-2y^2-3y}{y^2+y} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} \frac{(y-3)(y+1)}{\cancel{(y+1)}} = \boxed{y-3}$$

تمرین:

عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{x-y}{y-x} = \frac{\cancel{(x-y)}}{-\cancel{(x-y)}} = -1$$

$$\text{ب) } \frac{1-a^2}{a^2+1} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(1-a^2)(1+a^2)}{(a^2+1)} = 1-a^2$$

$$\text{ج) } \frac{-10a+15}{4a-6} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \frac{-5(2a-3)}{2(2a-3)} = -\frac{5}{2}$$

نکته: هرگاه صورت و مخرج یک عبارت گویا قرینه یکدیگر باشند آن گاه حاصل آن عبارت -1

می شود.

مثال:

حاصل کدام عبارت برابر 1- مییاشد؟

الف) $\frac{2y-5}{5-2y}$ (د)

ب) $\frac{6x-1}{-1-6x}$ (ج)

ج) $\frac{6y+5}{5+6y}$

د) $\frac{2y-5}{5-2y}$

پاسخ گزینه د $\frac{2y-5}{5-2y} = -1$

نکته: هرگاه صورت و مخرج یک عبارت گویا مساوی باشند آن گاه حاصل آن عبارت 1 می شود.

مثال:

حاصل کدام عبارت برابر یک می شود.

الف) $\frac{2a+5}{5+2a}$ (د)

ب) $\frac{2a-5}{5-2a}$ (ج)

ج) $\frac{-2a+5}{-2a-5}$

د) $\frac{2a+5}{5+2a}$

پاسخ گزینه د $\frac{2a+5}{5+2a} = 1$

مثال:

عبارت $\frac{-2+x}{x+4}$ با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟

الف) $-\frac{2+x}{x+4}$ (د)

ب) $-\frac{2-x}{x+4}$ (ج)

ج) $\frac{x+2}{x+4}$

د) $-\frac{x-2}{x+4}$

پاسخ گزینه ب زیرا علامت منفی را در صورت کسر ضرب کنیم داریم

$$-\frac{2-x}{x+4} = \frac{-2+x}{x+4}$$

مثال:

در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید تا تساوی برقرار شود.

ابتدا صورت و مخرج کسر را به کمک اتحاد ها یا فاکتورگیری تجزیه می کنیم سپس با مقایسه

صورت ها با هم و مخرج ها با هم جاهای خالی را کامل می کنیم.

الف) $\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{}}{z^2+z}$

$$\frac{(1-z) \times (z+1)}{z \times (z+1)} = \frac{\boxed{(1-z)(z+1)}}{z(z+1)}$$

ب) $\frac{x-1}{x} = \frac{\boxed{}}{x^2+x^2+x}$

$$\frac{(x-1) \times (x^2+x+1)}{x(x^2+x+1)} = \frac{\boxed{(x-1)(x^2+x+1)}}{x(x^2+x+1)}$$

ضرب و تقسیم عبارت های گویا

ضرب و تقسیم عبارت های گویا مانند ضرب و تقسیم اعداد گویا است فقط قبل از انجام عمل ضرب

یا تقسیم در صورت امکان کسر را تجزیه کرده و ساده می کنیم.

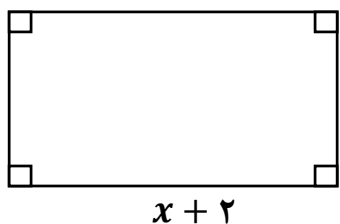
مثال:

$$\text{الف)} \quad \frac{10x}{x^2-4} \times \frac{x^2-2x}{5x^2} = \frac{\cancel{10}^2 \cancel{x}}{(x-2)(x+2)} \times \frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{5}x^2} = \frac{2}{(x+2)}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{3a^2}{a+1} \div \frac{a^2-a}{a^2-1} = \frac{3a^2}{a+1} \times \frac{a^2-1}{a^2-a} = \frac{3a^2}{\cancel{(a+1)}} \times \frac{\cancel{(a-1)}(a+1)}{\cancel{a}(a-1)} = 3a$$

مثال:

مساحت مستطیل زیر را بر حسب x به دست آورید ($x > 2$)



می دانیم مساحت مستطیل برابر است با طول ضربدر عرض
بنابراین طول و عرض را ضرب کرده و ساده

می کنیم.

$$\frac{x^2-x-2}{x+1} \times \frac{x+2}{1} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)} \times \frac{x+2}{1} = (x-2)(x+2)$$

مثال:

عبارت گویایی بیابید که اگر در عبارت $\frac{x^2-y^2}{2x+y}$ ضرب شود حاصل آن برابر $x-y$ شود.

$$\frac{x^2-y^2}{2x+y} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = x-y$$

کافی است عبارت $x-y$ را بر $\frac{x^2-y^2}{2x+y}$ تقسیم کنیم

$$\frac{x-y}{1} \div \frac{x^2-y^2}{2x+y} = \frac{x-y}{1} \times \frac{2x+y}{x^2-y^2} = \frac{\cancel{x-y}}{1} \times \frac{2x+y}{(\cancel{x-y})(x+y)} = \frac{2x+y}{x+y}$$

جمع و تفریق عبارت های گویا

نکته: در جمع و تفریق عبارت های گویا اگر مخرج ها مساوی نباشند ابتدا مخرج مشترک می

گیریم.

برای تعیین مخرج مشترک ابتدا در صورت امکان مخرج ها را با کمک فاکتورگیری و اتحادها تجزیه می کنیم سپس حاصلضرب عامل های مشترک با توان بیشتر در عامل های غیر مشترک را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

مثال:

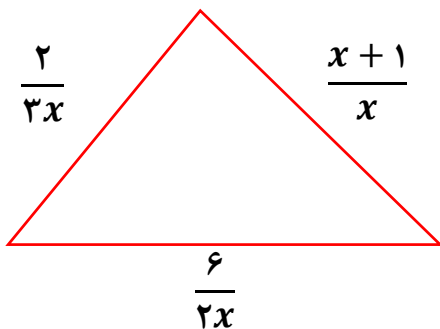
حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{3x+1}{5x+3} - \frac{8x+4}{5x+3} = \frac{3x+1-(8x+4)}{5x+3} = \frac{3x+1-8x-4}{5x+3} = \frac{-5x-3}{5x+3} = \frac{\cancel{-(5x+3)}}{\cancel{(5x+3)}} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \frac{-3x}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} &= \frac{-3x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2}{(x+2)} = \frac{-3x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{-3x+2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x-4}{(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

مثال:

محیط شکل زیر را به دست آورید. بر حسب x آن را ساده کنید.



$$P_{\text{محیط}} = \frac{2}{3x} + \frac{6}{2x} + \frac{x+1}{x} = \frac{2 \times 2}{3x \times 2} + \frac{6 \times 3}{2x \times 3} + \frac{(x+1) \times 6}{x \times 6} = \frac{4 + 18 + 6x + 6}{6x} = \frac{6x + 28}{6x}$$

ساده کردن عبارت های مرکب

نکته: کسری که صورت و مخرج آن عبارت های گویا باشد کسر گویای مرکب نام دارد.

نکته: برای به دست آوردن حاصل یک عبارت گویای مرکب ابتدا حاصل صورت و مخرج را جداگانه

به دست می آوریم و سپس آنها تقسیم می کنیم.

مثال:

حاصل هر عبارت را به ساده ترین شکل بنویسید (مخرج ها مخالف صفر در نظر گرفته شده است)

$$\text{الف) } \frac{\frac{3}{x} + 2}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{2 \times x}{1 \times x} = \frac{3+2x}{x}}{\frac{5}{x^2} - \frac{1 \times x}{x \cdot x} = \frac{5-x}{x^2}} = \frac{3+2x}{x} \div \frac{5-x}{x^2} = \frac{3+2x}{x} \times \frac{x^2}{5-x} = \frac{x(3+2x)}{5-x}$$

$$\text{ب) } \frac{a - \frac{a^2}{a-b}}{1 + \frac{b^2}{a^2-b^2}} =$$

$$\text{جواب صورت} = \frac{a(a-b)}{1(a-b)} - \frac{a^2}{a-b} = \frac{a^2 - ab - a^2}{a-b} = \frac{-ab}{a-b}$$

$$\text{جواب مخرج} = \frac{1(a^2-b^2)}{1 \times (a^2-b^2)} + \frac{b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2 - \cancel{b^2} + \cancel{b^2}}{a^2-b^2} = \frac{a^2}{a^2-b^2}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل کل عبارت} &= \frac{-ab}{a-b} \div \frac{a^2}{a^2-b^2} = \frac{-ab}{a-b} \times \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{-\cancel{ab}}{\cancel{a-b}} \times \frac{(a-\cancel{b})(a+b)}{\cancel{a^2}} \\ &= \frac{-b(a+b)}{a} \end{aligned}$$

تقسیم چند جمله ای ها

تقسیم چند جمله ای شامل سه بخش است.

۱ تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای:

برای تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای از قوانین ساده کردن کسرها و قوانین مربوط به ساده

کردن جمله های توان دار استفاده می کنیم.

مثال:

حاصل تقسیمهای زیر را بدست آورید

$$\text{الف) } \frac{14a^5y}{2x^2y^2} = \frac{\cancel{14}^7}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{x^5}^3}{\cancel{x^2}} \times \frac{\cancel{y}^1}{\cancel{y^2}} = \frac{7x^3}{y}$$

$$\text{ب) } \frac{-24x^2y^2z}{18xy^3z} = \frac{-4x^2}{3y}$$

۲ تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای:

برای تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای تک تک جملات صورت کسر را بر یک جمله ای مخرج تقسیم می کنیم و حاصل را ساده می کنیم.

مثال:

حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{a + b + c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

$$\text{ب) } \frac{18a^3 - 24a^2 + 12a}{3a} = \frac{18a^3}{3a} - \frac{24a^2}{3a} + \frac{12a}{3a} = 6a^2 - 8a + 4$$

$$\text{پ) } \frac{27a^3b^3 - 36a^2b^5 - 18a^2b^3}{9a^2b} = \frac{27a^3b^3}{9a^2b} - \frac{36a^2b^5}{9a^2b} - \frac{18a^2b^3}{9a^2b} = 3ab^2 - 4a^2b^4 - 2b^2$$

۳ تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای:

در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱ قبل از انجام عمل تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان نزولی متغیر مرتب می کنیم (یعنی از توان بیشتر به توان کمتر)

۲ اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می کنیم

۳ حاصل به دست آمده از مرحله قبل را در خارج قسمت می نویسیم و در مقسوم علیه ضرب می کنیم و حاصل ضرب را در زیر مقسوم مینویسیم.

۴ چون عبارت به دست آمده را باید از مقسوم کم کنیم بنابراین علامت جمله های آن را قرینه می کنیم

۵ حالا چند جمله ای باقی مانده را نیز مانند مرحله قبل بر مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

۶ این تقسیم را تا جایی ادامه می دهیم که باقی مانده صفر شود و یا درجه ی باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر باشد.

مثال:

حاصل تقسیم زیر را به دست آورید.

$$-7x + 2x^2 - 15 \div x - 5 =$$

مقسوم علیه

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \\ - (2x^2 - 10x) \\ \hline 3x - 15 \\ - (3x - 15) \\ \hline 0 \end{array}$$

مقسوم $x - 5$

خارج قسمت $2x + 3$

باقی مانده *

$\frac{2x^2}{x} = 2x$

$\frac{3x}{x} = 3$

نکته: هر گاه در یک تقسیم باقی مانده صفر شود می گوئیم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

مثال:

تقسیم های زیر را انجام دهید و باقی مانده را مشخص کنید.

$$\begin{array}{r} x^2 + 8x + 11 \\ - (x^2 + 2x) \\ \hline 6x + 11 \\ - (6x + 12) \\ \hline -1 \end{array}$$

باقی مانده -1

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 - 4x + 2 & x - 1 \\
 \hline
 2x^2 - 2x^2 & 2x^2 + 2x - 2 \\
 \hline
 +2x^2 - 4x + 2 & \\
 \\
 2x^2 - 2x & \\
 \hline
 -2x + 2 & \\
 \\
 -2x + 2 & \\
 \hline
 + & - \\
 \hline
 & \text{باقی مانده } 0
 \end{array}$$

خارج قسمت

۱- اگر $A = a^2 - b^2$ و $B = a^2 + b^2$ و $C = 2ab$ باشد آن گاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{A^2 - B^2}{C^2} =$$

۲- عبارت گویایی بیابید که اگر در عبارت $\frac{x^2 - y^2}{2x + y}$ ضرب شود حاصل آن برابر $x - y$ شود.

$$\frac{x^2 - y^2}{2x + y} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = xy$$

۳- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{2x - 4}{5 - x} - \frac{5x - 2}{x - 5} =$

ب) $\frac{5x^2}{x^2 + x} - \frac{3x}{x + 1} =$

۴- محیط مستطیل زیر را به دست آورید.

$$\frac{x}{x + 1}$$
$$\frac{x}{x + 2}$$

۵- حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

الف) $(5a + 6a^2 - 10a^3 - 3a^5) \div (30a) =$

$$\text{ب) } 8x^3 - 125 \overline{) 5 - 2x}$$

$$\text{ج) } 5x + 9x^3 - 4 \overline{) 3x + 2}$$

۶- خارج قسمت تقسیمی $2 - 3x$ ، مقسوم علیه آن $1 + x$ و باقی مانده آن 5 - شده است مقسوم را به دست آورید.

۷- دو عبارت گویا بنویسید که حاصل جمع آن ها $\frac{4x}{x+5}$ شود

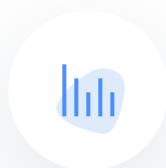
۸- مقدار m را طوری تعیین کنید که عبارت $m + 4 + 7x - x^2$ بر $3 - x$ بخش پذیر باشد.

@nohomi9



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد