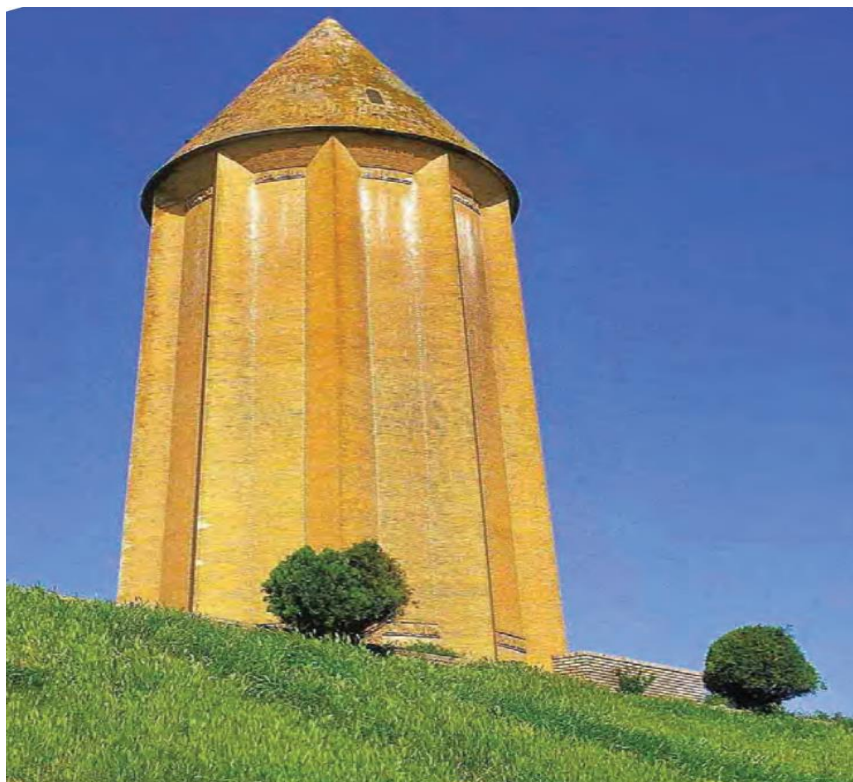


فصل ۸

حجم و مساحت



هدف کلی

شناخت شکل های هندسی کره - هرم - مخروط و محاسبه حجم و مساحت آنها

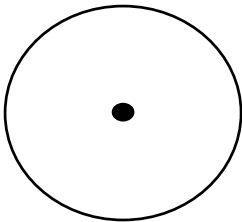
در پایان فصل از دانش آموزان انتظار می رود:

- ۱- مفهوم شکل های کره و هرم را بداند.
- ۲- بتواند حجم و مساحت کره و نیم کره را بدست بیاورد.
- ۳- تعریف شکل هندسی مخروط و هرم را بداند.
- ۴- حجم شکل های مخروط و هرم بتواند بدست بیاورد.
- ۵- گسترده شکل های هندسی مانند کره و هرم و مخروط را بداند.

ما در سال های قبل با انواع شکل های هندسی آشنا شدیم و یاد گرفتیم که شکل های هندسی به ۳ دسته شکل های منشوری - هرمی و کروی تقسیم می شدند. امسال می خواهیم با شکل های کروی آشنا بشیم اما در ابتدا با تعریف دایره شروع می کنیم.

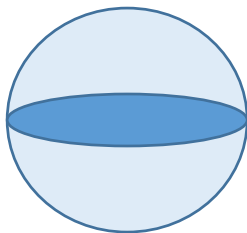
دایره :

به مجموعه نقاطی از صفحه می گویند که از نقطه ای بنام مرکز دایره به یک فاصله باشند **دایره** می گویند و به آن فاصله ثابت **شعاع دایره** می گویند.



کره :

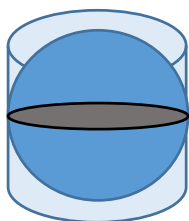
به مجموعه نقاطی از فضا میگویند که همه ی آن نقاط از نقطه مشخص به یک فاصله ثابت باشند ، **کره** میگویند و به آن فاصله ثابت شعاع کره می گویند. شکل های کروی **مانند توپ فوتبال**



حجم کره :

برای بدست آوردن حجم یک کره می توان از حجم استوانه ای که یک توپ کروی در داخل آن کامل از بالا و پایین و اطراف جای گرفته است یا اصطلاحاً می گوییم توپ کروی در داخل استوانه محاط شده است استفاده می کنیم ، کافی است ابتدا توپ کروی را نصف کنیم و سپس آنرا پر از آب کنیم

و داخل استوانه بریزیم و بعد متوجه میشویم که با ۳ بار پر خالی کردن نصف توپ کروی در استوانه، استوانه کامل پر می شود و این بدان معناست که حجم کره $\frac{2}{3}$ استوانه است.



ارتفاع $\times$ مساحت قاعده = حجم استوانه

$$h = 2r \quad v = 2\pi r^3$$

$$v = s \times h = \pi r^2 h$$

$$\text{حجم استوانه} \times \frac{2}{3} = \text{حجم کره}$$

$$v = \frac{2}{3} \times (2\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

مثال ۱:

حجم کره ای به شعاع ۵ سانتی متر را بدست آورید؟

پاسخ:

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{4}{3} \times 3,14 \times 5^3 = 523,33 \quad \text{سانتی متر مکعب}$$

مثال ۲:

کره ای در استوانه ای به شعاع ۳ سانتی متر محاط شده است. حجم فضای بین کره و استوانه را محاسبه کنید؟ ($\pi \cong 3$)

پاسخ:

$$v = 2\pi r^3 = 2 \times 3 \times 3^3 = 162 \quad \text{حجم استوانه}$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 3^3 = 108 \text{ حجم کره}$$

$$162 - 108 = 54 \text{ حجم بین استوانه و کره}$$

مساحت کره :

برای بدست آوردن مساحت یک کره می توان از این روش استفاده کرد که ابتدا یک کره را نصف کرد و سپس ۲ دایره عظیمه کره (بزرگترین دایره ای که می توان از روی یک کره رسم کرد) را روی یک صفحه رسم کرد ، سپس آن ۲ دایره رسم شده را به قسمت های مختلف با قیچی برش داده و سپس روی سطح نیم کره ، طوری بچسبانیم که تیکه های کاغذ کنارهم قرار بگیرند و سطح نیم کره را بپوشانند. آنگاه متوجه می شویم که ۲ دایره رسم شده سطح نیم کره را کامل در بر گرفته است. بنابراین مساحت یک کره کامل با ۴ دایره رسم شده توسط یک نیم کره می پوشاند.

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow 4 \times \text{مساحت عظیمه کره}$$

$$S = 2\pi r^2 \Rightarrow 2 \times \text{مساحت عظیمه کره}$$

مثال ۱:

مساحت یک کلاه (عرق چین) که به شکل یک نیم کره با شعاع ۶ سانتی متر است را بدست آورید؟ ($\pi = 3$)

$$S = 2\pi r^2 \text{ مساحت هر طرف کلاه} \quad S = 2 \times 3 \times 6^2 = 216 \text{ سانتی متر مربع} \quad \text{پاسخ:}$$

$$432 = 2 \times 216 = \text{مساحت کل}$$

نکته ۱: برای بدست آوردن مساحت نیم کره توپر باید مساحت سطح پایین کره را به مساحت نیم کره اضافه شود.

$$S = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2 \text{ نیم کره توپر}$$

مثال ۲:

اگر بخواهیم تمام سطح یک تانکر آب که شبیه به یک نیم کره توپر با شعاع ۲ متر است را رنگ کنیم ، آنگاه چند متر باید رنگ آمیزی کنیم؟ ($\pi = ۳$)

پاسخ:

$$S = ۳ \pi r^2 = ۳ \times ۳ \times ۲^2 = ۳۶ \quad \text{متر مربع}$$

مثال ۳:

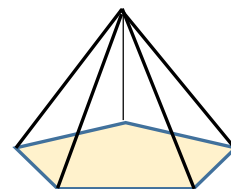
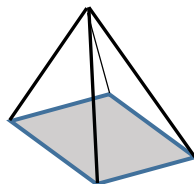
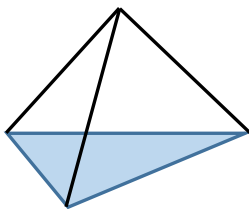
برای ساختن یک توپ فوتبال از نوعی چرم استفاده می شود. اگر شعاع این توپ برابر با ۱۰ سانتی متر باشد محاسبه کنید چقدر چرم برای این توپ استفاده شده است؟ ($\pi = ۳$)

پاسخ:

$$S = ۴ \pi r^2 = ۴ \times ۳ \times ۱۰^2 = ۱۲۰۰ \quad \text{سانتی متر مربع}$$

تعریف هرم:

هرگاه ما در یک صفحه یک چند ضلعی (محدب یا مقعر) رسم کنیم و یک نقطه خارج از صفحه انتخاب کنیم و از همه ی گوشه های چندضلعی به آن نقطه وصل کنیم آنگاه شکل حاصل را هرم می گوییم . نامگذاری هرم رو با حروف بزرگ لاتین انجام می دهیم و از راس هرم شروع به نوشتن می کنیم و هرم دارای ضلع های مختلفی میباشد و بستگی به اضلاع قاعده شکل پایین هرم دارد. مانند تصاویر زیر (هرم ۳ضلعی - هرم ۴ضلعی - هرم ۵ضلعی)



رأس هرم:

به آن نقطه که همه ی گوشه های چند ضلعی قاعده به آن وصل شده است ، رأس هرم می گوئیم. (O)

ارتفاع هرم:

پاره خطی که از نقطه رأس هرم بر قاعده عمود می شود. ارتفاع هرم نامیده می شود (OH)

قاعده هرم:

به شکل چندضلعی پایین ، قاعده هرم می گوئیم. (ABCD)

وجه هرم:

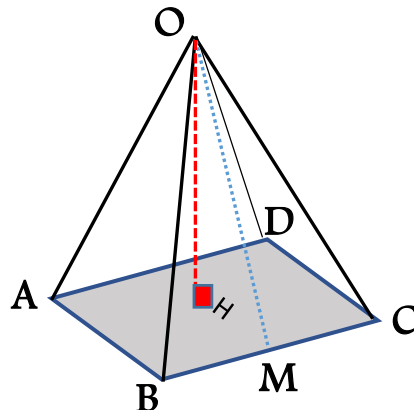
هریک از مثلث های بدنه هرم را وجه های جانبی هرم می گوئیم (OBC - ODC - OAB - OAD)

یال هرم:

محل تقاطع دو وجه را یال هرم می گوئیم. (OD-OC-OB-OA)

سهم هرم:

ارتفاع مثلث های جانبی هرم سهم هرم می گویند. (OM)



روش محاسبه حجم هرم:

برای بدست آوردن حجم هرم ، می توان از شکل های منشوری استفاده کرد. در واقع حجم یک هرم از یک منشور ساخته شده و اگر یک منشور و هرم رو با قاعده و ارتفاع مساوی مقایسه کنیم متوجه می شویم که حجم هرم $\frac{1}{3}$ یک منشور خواهد شد. بنابراین طبق فرمول حجم منشور که از سال هفتم آموختیم ، می توان حجم هرم رو بدست آورد.

ارتفاع $\times$ قاعده مساحت = حجم منشور

$$v = s \times h$$

$$\text{حجم منشور} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هرم}$$

$$v = \frac{1}{3} \times s \times h$$

مثال ۱:

حجم هرمی با قاعده مستطیل به ابعاد ۳ در ۷ و ارتفاع هرم به اندازه ۵ سانتی متر می باشد. را بدست آورید؟

پاسخ:

$$v = \frac{1}{3} \times s \times h \qquad V = \frac{1}{3} \times (3 \times 7) \times 5 = 35 \text{ سانتی متر مکعب}$$

مثال ۲:

حجم هرم منتظم مقابل را که یال آن ۱۳ و ارتفاع یکی از وجه هرم ۱۲ می باشد را بدست آورید؟

پاسخ:

ابتدا برای بدست آوردن حجم هرم باید اندازه ضلع قاعده هرم با کمک رابطه فیثاغورس

بدست بیاوریم و سپس دوباره از رابطه فیثاغورس برای محاسبه ارتفاع هرم استفاده

میکنیم.

(ارتفاع مثلث $OM = 12$ یال $OB = OC = 13$)

$$BM^2 = OB^2 - OM^2 \Rightarrow 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

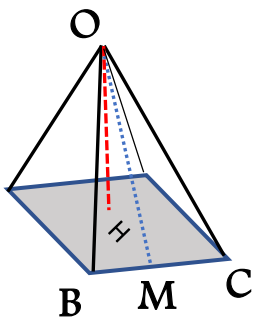
$$BM^2 = 25 \Rightarrow BM = \sqrt{25} = 5 \quad BM = HM \Rightarrow HM = 5 \text{ نصف ضلع مربع}$$

$$\text{هرم ارتفاع} = OH \Rightarrow OH^2 = OM^2 - HM^2 \Rightarrow 12^2 - 5^2 = 144 - 25 = 119$$

$$OM = \sqrt{119} \text{ ارتفاع هرم} \quad 10 = \text{اندازه یک ضلع مربع}$$

$$v = \frac{1}{3} \times s \times h \Rightarrow \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع هرم}$$

$$V = \frac{1}{3} \times (10 \times 10) \times \sqrt{119} = \frac{100\sqrt{119}}{3}$$



تعریف مخروط:

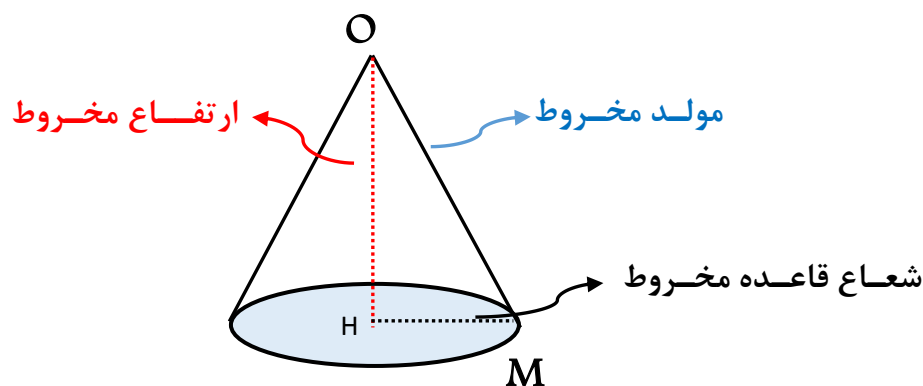
در واقع مخروط یک هرم با قاعده بی نهایت ضلعی منتظم می باشد که قاعده آن به شکل دایره است.

ارتفاع مخروط:

پاره خطی است که از نقطه راس مخروط به قاعده عمود است. (OH)

مولد مخروط:

پاره خطی است که از راس مخروط به محیط دایره قاعده مخروط وصل می شود. (OM)



روش محاسبه حجم مخروط:

برای بدست آوردن حجم مخروط ، می توان از شکل های استوانه کمک گرفت. در واقع اگر یک استوانه و مخروط رو با قاعده و ارتفاع مساوی مقایسه کنیم متوجه می شویم که حجم مخروط $\frac{1}{3}$ یک استوانه خواهد شد. بنابراین طبق فرمول حجم استوانه که از سال هفتم آموختیم ، می توان حجم مخروط رو بدست آورد.

ارتفاع $\times$ مساحت قاعده دایره = حجم استوانه

$$v = s \times h \Rightarrow (\pi r^2) \times h$$

$$\text{حجم استوانه} = \frac{1}{3} \times \text{حجم مخروط}$$

$$v = \frac{1}{3} \times s \times h \Rightarrow \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

مثال ۱:

حجم مخروطی را بدست آورید که شعاع قاعده آن ۴ و ارتفاع آن ۸ سانتی متر باشد؟ ($\pi = 3$)

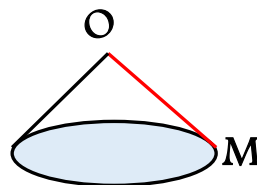
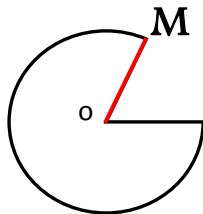
پاسخ:

$$v = \frac{1}{3} \times s \times h \Rightarrow \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

$$v = \frac{1}{3} \times 3 \times 4^2 \times 8 = 128 \quad \text{سانتی متر مکعب}$$

نکته ۲: شما می توانید با برشی از مساحت یک دایره مانند شکل زیر یک مخروط درست کنید که

شعاع دایره برابر است با مولد مخروط بوجود آمده.



مثال ۲:

با قسمتی از دایره ای به شعاع ۵ سانتی متر یک مخروط به ارتفاع ۴ سانتی متر درست کردیم. حجم

مخروط را بدست بیاورید؟ ($\pi = 3$)

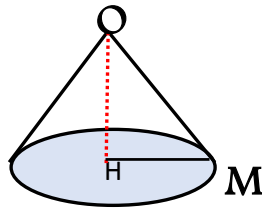
پاسخ: ابتدا باید برای محاسبه حجم مخروط شعاع مخروط با کمک رابطه فیثاغورس بدست بیاوریم:

(ارتفاع مخروط $OH = 4$) (مولد مخروط $OM = 5$)

$$HM^2 = OM^2 - OH^2 \Rightarrow 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

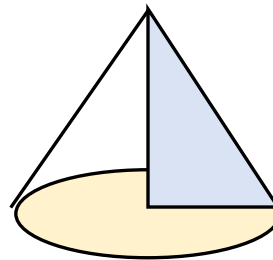
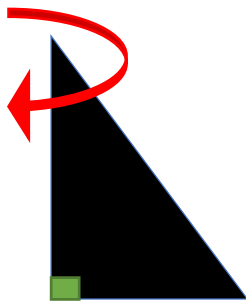
$$HM = \sqrt{9} = 3 \text{ شعاع مخروط}$$

$$v = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3 \times 3^2 \times 4 = 36 \text{ سانتی متر مکعب}$$



نکته ۳: اگر یک مثلث قائم الزاویه داشته باشیم و بخواهیم حول یکی از اضلاع قائمه آن دوران

دهیم آنگاه از شکل حاصل دوران یک مخروط بوجود می آید، که ارتفاع مخروط برابر است با ضلع مثلث قائمه ای که حول آن دوران دادیم و شعاع قاعده مخروط برابر است با آن ضلع قائمه ی دیگر مثلث. مانند شکل مقابل



مثال ۳:

حجم شکل حاصل از دوران بر روی ضلع کوچکتر مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائمه ۶ و ۸ را بدست آورید؟

پاسخ:

وقتی دوران روی ضلع کوچکتر مثلث قرار است انجام شود بدان معنی است که ارتفاع مخروط بوجود آمده از دوران برابر با ۶ و شعاع قاعده مخروط برابر ضلع قائمه بزرگتر یعنی برابر ۸ است.

$$\text{سانتی متر مکعب} \quad v = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3 \times 8^2 \times 6 = 384$$

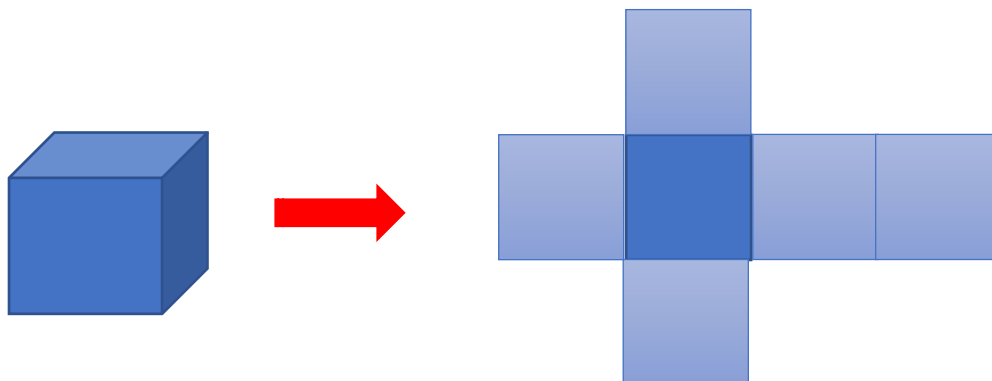
حجم مخروط

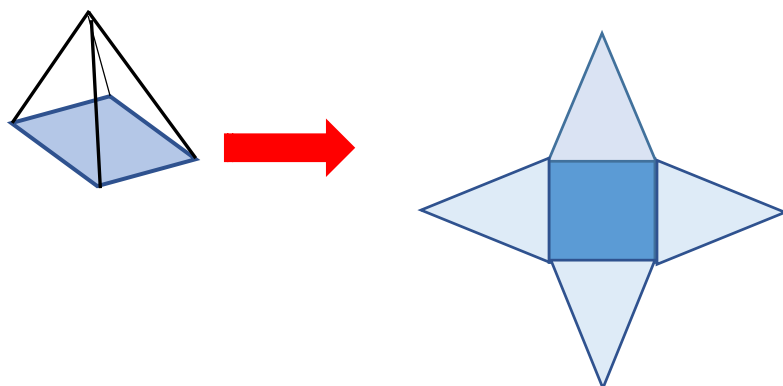
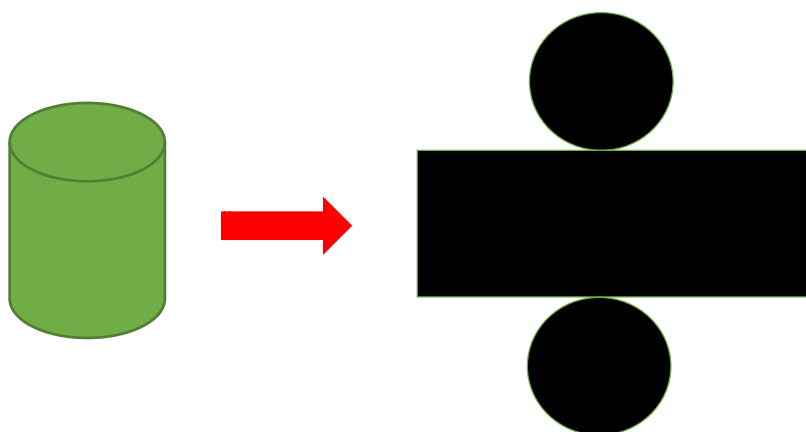
نکته ۴:

- از دوران یک نیم دایره حول قطرش ، یک کره بوجود می آید.
- از دوران یک ربع دایره حول شعاع اش ، یک نیم کره بوجود می آید.
- از دوران یک مستطیل حول اضلاعش ، یک استوانه بوجود می آید.
- از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وترش ، دومخروط به هم چسبیده بوجود می آید.

گسترده اشکال هندسی:

گسترده شکل های هندسی بدان معناست که شما بتوانید یک شکل هندسی مانند استوانه یا منشور یا ... را به صورت صفحات مسطح بر روی یک صفحه رسم کرد. در واقع مساحت های کل یک شکل هندسی را روی یک صفحه ترسیم کنیم.





۱- جملات درست را با (✓) و نادرست را با (×) نشان دهید.

(الف) از دوران نیم دایره، حول قطرش نیم کره پدید می آید. ☐

(ب) مساحت کره برابر با $\frac{4}{3}\pi r^3$ است. ☐

(ج) تمام وجه های هرم منتظم ثابت است. ☐

(د) هر مخروط از دوران مثلث قائم الزاویه حول اضلاع زاویه قائمه ایجاد می شود. ☐

۲- هر یک از جمله های زیر را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

(الف) حجم کره ای که در استوانه محاط شده برابر حجم استوانه است.

(ب) اگر شعاع کره ای را دو برابر کنیم، مساحت آن برابر می شود.

(ج) از دوران یک مستطیل حول طول آن بوجود می آید.

(د) حجم نیم کره ای به شعاع r از فرمول به دست می آید.

۳- در هر یک از پرسش های زیر گزینه ی درست را مشخص کنید. @nohomi9

(الف) وجوه جانبی در هرم به شکل است.

(۱) مثلث ☐ (۲) مستطیل ☐ (۳) مربع ☐ (۴) متوازی الاضلاع ☐

(ب) در چه صورت عدد حجم کره با مساحت آن برابر می شود؟

(۱) $r = 3$ ☐ (۲) $r = 4$ ☐ (۳) $r = 5$ ☐ (۴) $r = 6$ ☐

(ج) مساحت نیم کره توپری به شعاع r برابر است با:

(۱) $2\pi r^2$ ☐ (۲) $3\pi r^2$ ☐ (۳) $4\pi r^2$ ☐ (۴) πr^2 ☐

د) اگر ارتفاع هرمی را ۳ برابر کنیم حجم آن چند برابر می شود؟

☐ ۳ (۴)

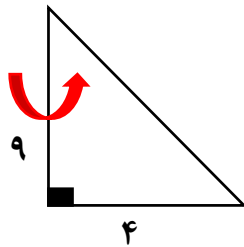
☐ ۶ (۳)

☐ ۱ (۲)

☐ ۲ (۱)

۴- الف) حجم هرمی را به دست آورید که قاعده ی آن مستطیلی به ابعاد ۸ و ۱۲ سانتی متر و ارتفاع آن ۵ سانتی متر باشد. (نوشتن فرمول الزامی است.)

ب) حجم حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه ی مقابل را حول ضلع مشخص شده در شکل بیابید. (نوشتن فرمول الزامی است.)

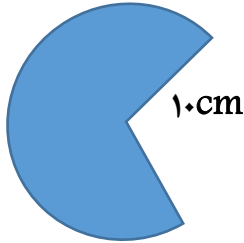


۵- الف) حجم هرمی را محاسبه کنید که قاعده ی آن لوزی به قطرهای ۸ و ۶ و ارتفاع هرم ۱۲ سانتی متر باشد. (نوشتن فرمول الزامی است.)

ب) مساحت کل یک نیم کره توپر فولادی به شعاع ۱۰ سانتی متر را به دست آورید. ($\pi = 3$)

۶- الف) حجم و مساحت کره ای به قطر ۱۰ سانتی متر را محاسبه کنید.

ب) با قسمتی از دایره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر مخروطی به قطر ۱۲ سانتی متر ساخته ایم حجم این مخروط را به دست آورید.



۷- الف) اگر مساحت کره ای 100π باشد، شعاع آن چقدر است؟

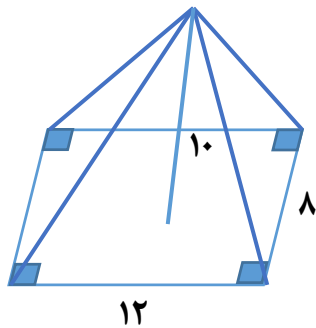
ب) حجم هرمی را به دست آورید که قاعده ی آن مستطیلی به ابعاد ۵ و ۹ سانتی متر و ارتفاع آن ۶ سانتی متر باشد.

۸- الف) حجم نیم کره ای به قطر ۱۲ سانتی متر را به دست آورید.

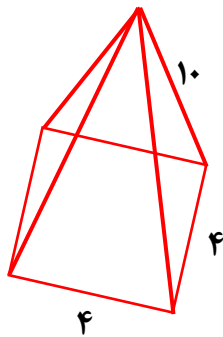
ب) ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ی ۱۲ سانتی متر و به ارتفاع ۴ سانتی متر را از آب پر می کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل که شعاع قاعده ی آن ۶ سانتی متر است خالی می کنیم، آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟

۹- الف) حجم یک کره به شعاع ۳ سانتی متر مکعب است؟ (نوشتن فرمول الزامی است)

ب) حجم شکل مقابل را به دست آورید. (نوشتن فرمول الزامی است)



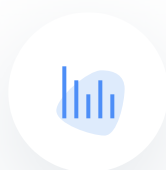
۱۰- هرم منتظمی به صورت زیر رسم شده است. ابتدا ارتفاع هرم سپس حجم آن را به دست آورید.





اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد