

فعالیت :

از پایه هفتم دوره متوسطه اول به مرور با مفاهیم عبارت جبری آشنا شدید. دیدید که بسیاری از مطالب و روابط ریاضی را می توان با عبارت جبری نشان داد. به نمونه های زیر توجه کنید.

مساحت مربع : $S = a^2$ مساحت مستطیل : $S = ab$ محیط مربع : $P = 4a$

در درس عبارت های جبری پایه نهم یاد گرفتید که به عبارت هایی مانند $4a$ ، ab ، a^2 یک جمله ای و به عبارت هایی مانند $5x + \sqrt{7}$ ، $5x + 3ab - 5c$ ، $2x + 3$ چند جمله ای می گویند.

ضمناً همانجا به این نکته دقت کردید که عبارت های زیر یک جمله ای نیستند.

$\sqrt{x}$ ، $|a|$ ، 2^x

حالا اگر کسری داشته باشیم که صورت و مخرج آن چندجمله ای باشد، آن را « عبارت گویا » می نامند. به مثل های زیر دقت کنید.

$\frac{2x-5}{5x^3-2x^2+1}$ $\frac{x+4}{9}$ $\frac{\sqrt{5a^2+2}}{3a}$ $\frac{x}{y}$ $\frac{3}{4}$

دقت کنید هر گاه صورت یا مخرج عبارت چند جمله ای نباشد آن عبارت دیگر گویا نیست. مانند $\frac{\sqrt{a}}{a+b}$

کار در خانه (۱):

کدام یک از عبارت های زیر گویا است؟

$\frac{7}{x-1}$ $\frac{x+6}{3}$ $\frac{\sqrt{3}+x}{5}$ $\frac{\sqrt{2x}}{25}$ $\frac{x-5}{\sqrt{3}+1}$ $\frac{mn+n^2}{5-n}$ $\frac{|x|+|y|}{x}$

کار در خانه (۲):

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر مانند نمونه به دست آورید.

x	۵	۴	۳	۲	-۲
$\frac{x+5}{x-3}$	$\frac{(5)+5}{(5)-3} = \frac{10}{2}$				

فعالیت :

به ازای $x = 3$ مخرج عبارت گویای $\frac{x+5}{x-3}$ مساوی صفر می شود و همان گونه که از قبل می دانید، $\frac{8}{0}$ به عنوان عدد

تعریف نمی شود. پس در عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ نمی توان مقدار ۳ را برای x قرار داد.

می خواهیم بدانیم عبارت گویای $\frac{x}{2x-8}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟ باید به دنبال مقداری بگردیم که مخرج را صفر می کند. به همین خاطر کافی است مخرج را مساوی صفر قرار دهیم. (معادله را حل می کنیم)

$$2x - 8 = 0 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

عبارت $\frac{x}{2x-8}$ به ازای $x = 4$ تعریف نشده است. زیرا مخرج آن برابر صفر می شود.

کار در خانه (۳):

هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

$$\frac{2a+1}{a-1}$$

$$\frac{5x}{x+3}$$

$$\frac{2b+1}{2b-1}$$

فعالیت :

عبارت $\frac{3a}{a^2+2a}$ به ازای چه مقادیری از متغیر تعریف نشده است. برای این کار باید مخرج را مساوی صفر قرار دهیم.

پس داریم $a^2 + 2a = 0$ ولی این معادله با معادله های قبلی فرق دارد. پس باید جور دیگر به آن نگاه کنیم. بیایید عبارت را تجزیه کنیم، عامل مشترک آن a است. در نتیجه $a(a+2) = 0$

وقتی حاصلضرب دو عبارت برابر صفر باشد، در این صورت هر کدام از آنها می توانند صفر باشند. پس

$$a(a+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+2 = 0 \rightarrow a = -2 \end{cases}$$

در این عبارت دو مقدار هست که مخرج را صفر می کند و عبارت را تعریف نشده می کند. $a = 0$, $a = -2$

آزمایش کنید که آیا واقعاً با این دو مقدار مخرج صفر می شود.

فعالیت :

عبارت $\frac{5x+1}{x^2-9}$ به ازای چه مقادیری از متغیر تعریف نشده است. مانند قبل داریم : $x^2 - 9 = 0$

در این مثال برای تجزیه باید از اتحادها کمک بگیریم. برای یادآوری هر سه اتحادی را که خوانده اید را در اینجا می آوریم.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{اتحاد مربع دو جمله ای}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad \text{اتحاد یک جمله مشترک}$$

حالا عبارت $x^2 - 9 = 0$ را با اتحاد مزدوج تجزیه می کنیم.

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

در نتیجه عبارت گویای $\frac{5x+1}{x^2-9}$ به ازای مقادیر $x = 3$ ، $x = -3$ تعریف نشده است .

کار درخانه (۴):

هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

$$\frac{2y}{2y^2 - 6y}$$

$$\frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{a + 5}{a^2 - 5a + 6}$$

$$\frac{2p}{p^2 - p - 12}$$

فعالیت :

$$\frac{36}{48} = \frac{\cancel{12} \times 3}{\cancel{12} \times 4} = \frac{3}{4}$$

در دوره ابتدایی ساده کردن کسرها را یاد گرفتید.

همین کار را می توان در عبارت های گویا هم انجام داد. در ساده کردن عبارت گویا می توان صورت و مخرج را بر یک عبارت

$$\frac{A\cancel{C}}{B\cancel{C}} = \frac{A}{B} \quad (A, B, C \text{ چند جمله ای هستند و } B \neq 0, C \neq 0)$$

مثال: به ساده شدن عبارت های گویای زیر دقت کنید. (مخرج همه عبارت ها غیر صفر در نظر گرفته شده است).

$$\frac{12a^3}{16a^5} = \frac{3}{4a^2} \quad \text{الف) عددهای صورت و مخرج بر 4 ساده شده اند و توان ها هم بر اساس پایه مساوی تقسیم شده اند.}$$

$$\frac{4x^2 - 6x}{2x^2 + 8x} = \frac{\cancel{2x}(2x - 3)}{\cancel{2x}(x + 4)} = \frac{2x - 3}{x + 4} \quad \text{ب) صورت و مخرج از روش عامل مشترک تجزیه شده اند.}$$

ج) صورت از طریق اتحاد مزدوج تجزیه شده است و مخرج هم از طریق اتحاد یک جمله مشترک تجزیه شده است.

$$\frac{a^2 - 25}{a^2 + 7a + 10} = \frac{(a + 5)(a - 5)}{(a + 5)(a + 2)} = \frac{a - 5}{a + 2}$$

دقت کنید حتماً بعد از تجزیه عبارت ها را ساده کنید.

کار در خانه (۵):

عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

$$\frac{24x}{12x^2 - 6x} =$$

$$\frac{4x^2 + 8x}{12x + 24} =$$

$$\frac{a^2 - 3a}{a^2 - 9} =$$

$$\frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} =$$

$$\frac{a^2 - 10a + 25}{a^2 - 25} =$$

$$\frac{a^2 - a - 6}{a^2 + 6a + 8} =$$

فعالیت :

$$\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{\dots\dots\dots}}{z(z^2+1)}$$

می خواهیم بفهمیم در جای خالی چه عبارتی را باید بنویسیم تا تساوی درست برقرار شود.

اگر قرار باشد دو کسر با هم مساوی باشند، پس باید ساده شده کسر دوم همان کسر اول شود. پس صورت را طوری کامل می کنیم که بعد از ساده شدن همان کسر اول به دست آید.

$$\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{(1-z)(z^2+1)}}{z(z^2+1)}$$

در نتیجه

$$\frac{(1-z)\cancel{(z^2+1)}}{z\cancel{(z^2+1)}} = \frac{1-z}{z}$$

کار در خانه (۶):

در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

$$\frac{x}{x+2} = \frac{\boxed{\dots\dots\dots}}{(x+2)(x+5)}$$

$$\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{\dots\dots\dots}}{x^2 - x - 6}$$

کار در خانه (۱):

کدام یک از عبارت های زیر گویا است؟

$\frac{7}{x-1}$	$\frac{x+6}{3}$	$\frac{\sqrt{3}+x}{5}$	$\frac{\sqrt{2}x}{25}$	$\frac{x-5}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{mn+n^2}{5-n}$	$\frac{ x + y }{x}$
ص	ص	ص	غ	ص	ص	غ

کار در خانه (۲):

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر مانند نمونه به دست آورید.

x	۵	۴	۳	۲	-۲
$\frac{x+5}{x-3}$	$\frac{(5)+5}{(5)-3} = \frac{10}{2}$	$\frac{(4)+5}{(4)-3} = \frac{9}{1}$	$\frac{(3)+5}{(3)-3} = \frac{8}{0}$	$\frac{(2)+5}{(2)-3} = \frac{7}{-1}$	$\frac{(-2)+5}{(-2)-3} = \frac{3}{-5}$

کار در خانه (۳):

هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

$$\frac{2a+1}{a-1}$$

$$a-1=0 \rightarrow a=1$$

$$\frac{5x}{x+3}$$

$$x+3=0 \rightarrow x=-3$$

$$\frac{2b+1}{2b-10}$$

$$2a-10=0 \rightarrow 2b=10 \rightarrow b=\frac{10}{2}=5$$

کار در خانه (۴):

هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

$$\frac{2y}{2y^2-6y}$$

$$2y^2-6y=0 \rightarrow 2y(y-3)=0 \rightarrow \begin{cases} 2y=0 \rightarrow y=0 \\ y-3=0 \rightarrow y=3 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x^2-1}$$

$$x^2-1=0 \rightarrow (x-1)(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$\frac{a+5}{a^2-5a+6}$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0 \rightarrow (a-3)(a-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a-3=0 \rightarrow a=3 \\ a-2=0 \rightarrow a=2 \end{cases}$$

$$\frac{2p}{p^2-p-12}$$

$$p^2 - p - 12 = 0 \rightarrow (p-4)(p+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} p-4=0 \rightarrow p=4 \\ p+3=0 \rightarrow p=-3 \end{cases}$$

کار در خانه (۵):

عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

$$\frac{24x}{12x^2-6x} = \frac{\cancel{24}^4 \cancel{x}}{\cancel{12}_3 \cancel{x}^1 (2x-1)} = \frac{4}{2x-1}$$

$$\frac{4x^2+8x}{12x+24} = \frac{\cancel{4}^1 x \cancel{(x+2)}}{\cancel{12}_3 \cancel{(x+2)}} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{a^2-3a}{a^2-9} = \frac{a \cancel{(a-3)}}{(a+3) \cancel{(a-3)}} = \frac{a}{a+3}$$

$$\frac{x-3}{x^2-5x+6} = \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{a^2-10a+25}{a^2-25} = \frac{(\cancel{a-5})(a-5)}{(\cancel{a-5})(a+5)} = \frac{a-5}{a+5}$$

$$\frac{a^2-a-6}{a^2+6a+8} = \frac{(a-3) \cancel{(a+2)}}{(a+4) \cancel{(a+2)}} = \frac{a-3}{a+4}$$

کار در خانه (۶):

در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

$$\frac{x}{x+2} = \frac{\boxed{x(x+5)}}{(x+2)(x+5)}$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \rightarrow \frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{\dots\dots\dots}}{x^2 - x - 6} = \frac{\boxed{3x(x+2)}}{(x-3)(x+2)}$$

فعالیت :

عبارت های گویا را می توان همانند عددهای گویا در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. در سال های گذشته ضرب و تقسیم عددهای گویا را یاد گرفته اید. به نمونه های زیر دقت کنید.

$$\frac{14^2}{25_5} \times \frac{35^7}{18_3} = \frac{2 \times 7}{5 \times 3} = \frac{14}{15} \quad (12 \text{ و } 18 \text{ به } 6 \text{ و } 35 \text{ و } 25 \text{ به } 5 \text{ ساده شده اند.})$$

$$\frac{14}{27} \div \frac{21}{45} = \frac{14^2}{27_3} \times \frac{45^5}{21_3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9} \quad (\text{ابتدا کسر اول در معکوس کسر دوم ضرب و سپس ساده می کنیم.})$$

دقت کردید که چه در ضرب و چه در تقسیم ساده کردن بسیار مهم است. در عبارت های گویا هم همین قوانین برقرار است. فقط به جای اعداد عبارت جبری قرار دارد. اصلی ترین نکته در این بخش تجزیه است که حتماً باید صورت و مخرج در صورت امکان تجزیه شوند. یا با عامل مشترک (فاکتورگیری) یا با کمک اتحاد به نمونه های زیر دقت کنید.

$$\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x-2x-15} = \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{x}x}{(x+3)(x-5)} = \frac{x}{x-5}$$

(مخرج کسر دوم با کمک اتحاد یک جمله مشترک تجزیه شده است.)

$$\frac{a^2-1}{a^2-4a} \div \frac{a^2+3a+2}{a-4} = \frac{a^2-1}{a^2-4a} \times \frac{a-4}{a^2+3a+2} = \frac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{a\cancel{(a-4)}} \times \frac{\cancel{a-4}}{\cancel{(a+1)}(a+2)} = \frac{(a-1)}{a(a+2)}$$

(به خاطر تقسیم، ابتدا کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب کردیم. سپس صورت و مخرج ها را تا حد امکان تجزیه کردیم. هم از عامل مشترک و هم از اتحاد یک جمله مشترک و هم از اتحاد مزدوج استفاده شده است.)

کار در خانه (۱):

حاصل ضرب های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a^2-a-6}{a+3} \times \frac{a+3}{a^2-4} =$$

$$\frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} =$$

$$\frac{x^2-16}{x+4} \times \frac{x+2}{x^2-8x+16} =$$

$$\frac{a^2-1}{b^3} \times \frac{b^2}{a^2-2a+1} =$$

کار در خانه (۲):

تقسیم های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{m^2-49}{m+1} \div \frac{m-7}{m^2-1} =$$

$$\frac{x^2+3x+2}{x+2} \div \frac{x+1}{x+5} =$$

فعالیت :

در جمع و تفریق عبارت های گویا نیز همان قوانین جمع و تفریق اعداد گویا برقرار است. اگر مخرج ها یکسان بود کافی است صورت را جمع یا تفریق کرد.

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4}$$

همین کار را در عبارت های گویا مشاهده کنید.

$$\frac{2a+3}{a+2} + \frac{5a-7}{a+2} = \frac{2a+3+5a-7}{a+2} = \frac{7a-4}{a+2} \quad (\text{جمع})$$

$$\frac{5x-1}{2x-5} - \frac{2x+2}{2x-5} = \frac{5x-1-(2x+2)}{2x-5} = \frac{5x-1-2x-2}{2x-5} = \frac{3x-3}{2x-5} \quad (\text{تفريق})$$

(دقت کنید صورت عبارت گویا دوم به خاطر تفریق ، قرینه شده است)

کار در خانه (۳):

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\frac{2a+1}{a} + \frac{3a-5}{a} =$$

$$\frac{5x}{2x+4} - \frac{3x-5}{2x+4} =$$

فعالیت :

حال اگر مخرج ها مساوی نبود، چه کار باید کرد؟ همانطور که در اعداد گویا یاد گرفتید، مخرج مشترک می گرفتیم. به مثال زیر دقت کنید.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$$

پس همین کار را هم در عبارت های گویایی که مخرج یکسان ندارند باید انجام داد. به ضرب ها در صورت و مخرج دقت کنید.

$$\frac{2a}{a+1} + \frac{a-1}{a+3} = \frac{2a^2 + 6a + a^2 - 1}{(a+1)(a+3)} = \frac{3a^2 + 6a - 1}{(a+1)(a+3)}$$

گاهی اوقات هم باید برای یافتن مخرج مشترک مناسب ، مخرج ها را تجزیه کرد. به مثال زیر دقت کنید.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2-x-2} - \frac{x}{x^2+4x+3} &= \frac{2}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{(x+1)(x+3)} = \frac{2x+6-(x^2-2x)}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \\ &= \frac{2x-6-x^2+2x}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{-x^2+4x-6}{(x-2)(x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

شاید به نظر کمی طولانی به نظر برسد ولی روش همان است که در بالا اشاره شد. قرینه به خاطر تفریق است.

فقط دقت کنید که بین مخرج های $(x+1)(x+3)$ و $(x-2)(x+1)$ به چه صورت مخرج مشترک انتخاب شد. در هر مخرج همان قسمتی را که نداشت ضرب کردیم تا همه کسر ها به مخرج $(x-2)(x+1)(x+3)$ برسند. به یک مثال دیگر دقت کنید.

$$\frac{a^2-20}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2} = \frac{a^2-20}{(a-2)(a+2)} + \frac{a-2}{a+2} \times \frac{(a-2)}{(a-2)} = \frac{a^2-20+a^2-4a+4}{(a-2)(a+2)} = \frac{2a^2-4a-16}{(a-2)(a+2)}$$

دیدید که در مثال بالا مخرج کسر اول نیاز به هیچ تغییری نداشت و مخرج کسر دوم در عبارت $(a-2)$ ضرب شد. ضمناً جواب را می توان ساده تر هم کرد، صورت را تجزیه می کنیم. اول عامل مشترک بعد یک جمله مشترک (البته ساده کردن در صورت امکان است)

$$\frac{2a^2-4a-16}{(a-2)(a+2)} = \frac{2(a^2-2a-8)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a(a-4)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a(a-4)}{(a-2)}$$

کار در خانه (۴):

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

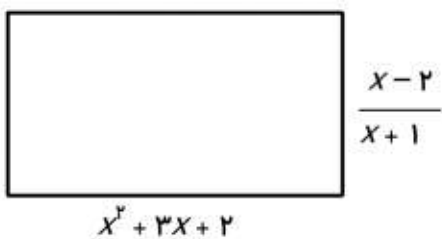
$$\frac{2}{x+2} + \frac{x-1}{x+4} =$$

$$\frac{a}{a+5} - \frac{1}{a^2-25} =$$

$$\frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{x}{x^2+1x-6} =$$

فعالیت :

می خواهیم مساحت مستطیل زیر را به دست آوریم. اولین سوال این است که مساحت مستطیل چه طور به دست می آید؟ درست است. حاصل ضرب طول در عرض.



$(x > 2)$

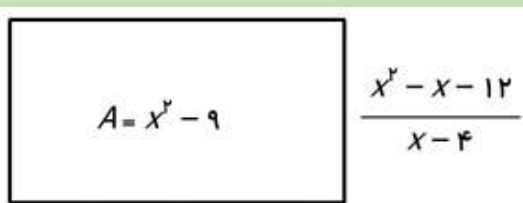
$$S = (x^2 + 3x + 2) \times \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x+1)(x+2)}{1} \times \frac{x-2}{x+1} = (x+2)(x-2) = x^2 - 4$$

کار در خانه (۵):

عرض مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

(برای به دست آوردن عرض کافی است مساحت را بر طول

تقسیم کنید.



کار در خانه (۱):

حاصل ضرب های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a^2 - a - 6}{a + 3} \times \frac{a + 3}{a^2 - 4} = \frac{(a - 3) \cancel{(a + 3)}}{\cancel{a + 3}} \times \frac{\cancel{a + 3}}{(a - 2) \cancel{(a + 3)}} = \frac{a - 3}{a - 2}$$

$$\frac{x - 6}{x^2 - 12x + 36} \times \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 + 7x + 12} = \frac{\cancel{x - 6}}{(\cancel{x - 6})(x - 6)} \times \frac{\cancel{(x - 6)}(x + 3)}{\cancel{(x + 3)}(x + 4)} = \frac{1}{x + 4}$$

$$\frac{x^2 - 16}{x + 4} \times \frac{x + 2}{x^2 - 8x + 16} = \frac{\cancel{(x - 4)}(x + 4)}{\cancel{x + 4}} \times \frac{x + 2}{\cancel{(x - 4)}(x - 4)} = \frac{x + 2}{x - 4}$$

$$\frac{a^2 - 1}{b^2} \times \frac{b^2}{a^2 - 2a + 1} = \frac{\cancel{(a - 1)}(a + 1)}{\cancel{b^2} b} \times \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{(a - 1)}(a - 1)} = \frac{(a + 1)}{b(a - 1)}$$

کار در خانه (۲):

تقسیم های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{m^2 - 49}{m + 1} \div \frac{m - 7}{m^2 - 1} = \frac{m^2 - 49}{m + 1} \times \frac{m^2 - 1}{m - 7} = \frac{\cancel{(m - 7)}(m + 7)}{\cancel{m - 7}} \times \frac{(m - 1) \cancel{(m + 1)}}{\cancel{m - 1}} = \frac{(m + 7)(m - 1)}{1}$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \div \frac{x + 1}{x + 5} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \times \frac{x + 5}{x + 1} = \frac{\cancel{(x + 1)}(x + 2)}{\cancel{x + 2}} \times \frac{x + 5}{\cancel{x + 1}} = \frac{x + 5}{1} = x + 5$$

کار در خانه (۳):

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\frac{2a + 1}{a} + \frac{3a - 5}{a} = \frac{2a + 1 + 3a - 5}{a} = \frac{5a - 4}{a}$$

$$\frac{5x}{2x + 4} - \frac{3x - 5}{2x + 4} = \frac{5x - (3x - 5)}{2x + 4} = \frac{5x - 3x + 5}{2x + 4} = \frac{2x + 5}{2x + 4}$$

کار در خانه (۴): حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\frac{2 \times (x + 4)}{x + 2 \times (x + 4)} + \frac{x - 1 \times (x + 2)}{x + 4 \times (x + 2)} = \frac{2x + 8 + x^2 + x - 2}{(x + 2)(x + 4)} = \frac{x^2 + 3x + 6}{(x + 2)(x + 4)}$$

$$\frac{a}{a+5} - \frac{1}{a^2-25} = \frac{a_{\times(a-5)}}{a+5_{\times(a-5)}} - \frac{1}{(a+5)(a-5)} = \frac{a^2-5a-1}{(a+5)(a-5)}$$

$$\frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{x}{x^2+1x-6} = \frac{2_{\times(x+3)}}{(x-1)(x-2)_{\times(x+3)}} + \frac{x_{\times(x-1)}}{(x+3)(x-2)_{\times(x-1)}} =$$

$$\frac{2x+6+x^2-1x}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{x^2+1x+6}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

کار در خانه (۵):

عرض مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

(برای به دست آوردن عرض کافی است مساحت را بر طول

تقسیم کنید.

$A = x^2 - 9$

 $\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

$$x^2 - 9 \div \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = \frac{x^2 - 9}{1} \times \frac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \frac{(x-3) \cancel{(x+3)}}{1} \times \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)} (x+3)} = \frac{(x-3)}{1} = x - 3$$

عرض مستطیل $x - 3$ است /

فرامرز انتظاری

فعالیت :

برای تقسیم دو تک جمله ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان ها استفاده می کنیم.

$$\frac{12 \div 4}{16 \div 4} = \frac{3}{4}$$

الف) قانون ساده کردن کسرها : صورت و مخرج را بر (ب.م.م) آن دو تقسیم می کنیم.

ب) قانون تقسیم اعداد تواندار: یکی از پایه ها را نوشته و توانها را از هم کم می کنیم. (فقط پاسخ را در قسمتی می نویسیم

$$\frac{x^5}{x^2} = \frac{x^3}{1} = x^3 \quad \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$$

که توان بیشتری دارد.)

حال به مثال های زیر دقت کنید.

$$\frac{20a^4b^5}{15a^6b^2} = \frac{4b^3}{3a^2} \quad \left(\frac{20 \div 5}{15 \div 5} = \frac{4}{3}, \quad \frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{b^5}{b^2} = \frac{b^3}{1} \right) \leftarrow \text{توضیح}$$

$$\frac{18a^2b^3x^5}{27a^3x^6} = \frac{2b^3x^1}{3a^1}$$

$$\frac{12a^5b^4c^6}{18a^5b^1c} = \frac{2c^5}{3b^3}$$

(نکته: می دانید که هر عبارتی که توان ندارد ، توان آن یک است. ضمناً اگر اعدادی بر هم ساده نشدند به همان صورت می نویسیم.)

کار در خانه (۱):

تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$\frac{18a^3b^4}{6a^4b^6} =$$

$$\frac{14x^3y^4}{21x^4y^3} =$$

$$\frac{-3x^3y^5z^4}{5y^5z^1} =$$

فعالیت :

می خواهیم چند جمله ای را بر تک جمله ای تقسیم کنیم. در کسرها می توانیم جمله ها را از هم باز کنیم. اگر a, b, c

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

اعدادی صحیح و d عددی صحیح و غیر صفر باشد داریم:

پس می توانیم تقسیم چند جمله ای بر تک جمله ای را به چند تا تقسیم تک جمله ای بر تک جمله ای تبدیل کنیم.

به مثال زیر دقت کنید که به سه قسمت شده است.

$$\frac{12a^5b^3 - 8a^2b^5c^3 + 5a^2}{2a^3b^3} = \frac{12a^5b^3}{2a^3b^3} - \frac{8a^2b^5c^3}{2a^3b^3} + \frac{5a^2}{2a^3b^3} = \frac{6a^2}{1} - \frac{4b^2c^3}{a} + \frac{5}{2ab^3}$$

کار در خانه (۲): تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$\frac{24x^2y^2 - 4z + 3xyz}{2x^2z} = \frac{1 \cdot a^3y - a^2y^2 + 15xy}{5y^2} =$$

فعالیت :

در دو فعالیت قبلی تقسیم تک جمله ای بر تک جمله ای و تقسیم چندجمله ای بر تک جمله ای را یاد گرفتید. حالا می خواهیم تقسیم چندجمله ای بر چندجمله ای را انجام دهیم. برای این کار ابتدا به دوران ابتدایی برمی گردیم و تقسیم را مرور می کنیم.

$$\begin{array}{r} 35 \quad | \quad 8 \\ - 32 \quad 4 \\ \hline 3 \end{array}$$

خارج قسمت این تقسیم ۴ و باقیمانده آن ۳ است.

برای اینکه بفهمیم آیا تقسیم درست انجام شده یا نه رابطه آن را می نویسیم.

$$\begin{cases} 4 \times 8 + 3 = 32 + 3 = 35 \\ 3 < 8 \end{cases}$$

همین روش برای تقسیم عبارت های جبری نیز به کار می رود. به مثال زیر دقت کنید.

می خواهیم چندجمله ای $2x^2 - 7x - 15$ را بر چند جمله ای $x - 5$ تقسیم کنیم.

در این تقسیم چند جمله ای $2x^2 - 7x - 15$ را مقسوم و چند جمله ای $x - 5$ را مقسوم علیه می نامیم. در اولین گام باید مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان های متغیر موجود (در اینجا x) از بزرگ به کوچک مرتب کرد. همان نزولی که در عبارت های جبری یاد گرفتید. البته در این مثال چند جمله ای ها مرتب هستند.

$$\frac{2x^2}{x} = \frac{2x}{1} = 2x \quad \text{اکنون اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می کنیم.}$$

حالا مانند تقسیم عادی این عبارت $2x$ را در مقسوم علیه یعنی $x - 5$ ضرب می کنیم.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ 2x^2 - 10x \quad \quad 2x \\ \hline \end{array} \quad 2x(x - 5) = 2x^2 - 10x$$

در مرحله بعد تقسیم باید این حاصل ضرب را از مقسوم کم کنیم که در اینجا چون عبارت جبری است ، از قرینه استفاده می کنیم.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ - 2x^2 + 10x \quad \quad 2x \\ \hline 3x - 15 \end{array}$$

عدد -15 را هم به پایین منتقل می کنیم.

حال دوباره جمله اول عبارت $3x - 15$ را بر جمله اول عبارت $x - 5$ تقسیم می کنیم.

و مانند مرحله قبل 3 را در $x - 5$ ضرب می کنیم.

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^2} - 7x - 15 \quad | x - 5 \\
 \underline{+ 2x^2 - 10x} \\
 + 3x - 15 \\
 \underline{+ 3x - 15} \\
 0
 \end{array}$$

توضیح مرحله اول:

$$\frac{2x^2}{x} = 2x \quad 2x(x - 5) = 2x^2 - 10x$$

توضیح مرحله دوم:

$$\frac{+3x}{x} = +3 \quad +3(x - 5) = +3x - 15$$

وقتی باقیمانده صفر می شود می گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

به تقسیم زیر دقت کنید. (علامت های به رنگ قرمز، قرینه هستند)

$$\begin{array}{r}
 \cancel{3x^3} + 5x^2 - 2x + 1 \quad | x + 3 \\
 \underline{+ 3x^3 + 9x^2} \\
 - 4x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{+ 4x^2 + 12x} \\
 + 10x + 1 \\
 \underline{+ 10x + 30} \\
 - 29
 \end{array}$$

توضیح مرحله اول:

$$\frac{3x^3}{x} = 3x^2 \quad 3x^2(x + 3) = 3x^3 + 9x^2$$

توضیح مرحله دوم:

$$\frac{-4x^2}{x} = -4x \quad -4x(x + 3) = -4x^2 - 12x$$

توضیح مرحله سوم:

$$\frac{10x}{x} = +10 \quad +10(x + 3) = +10x + 30$$

در این تقسیم خارج قسمت $3x^2 - 4x + 10$ و باقیمانده نیز -29 است.

کار در خانه (۲):

تقسیم زیر را انجام دهید.

$$6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \quad | x - 2$$

فعالیت :

در تقسیم همیشه باید دقت کنید که متغیر های متشابه زیر هم باشند. به این معنی که توان متغیر ها باید در زیر هم برابر باشد. به همین خاطر در نوشتن تقسیم باید دقت کنید. به مثال زیر توجه کنید.

$$\begin{array}{r}
 \cancel{4x^3} - 3x^2 + x + 7 \quad | \quad x^2 - 2 \\
 \underline{-4x^3 } \\
 -3x^2 + 9x + 7 \\
 \underline{+3x^2 } \\
 9x + 7
 \end{array}$$

توضیح مرحله اول:

$$\frac{4x^3}{x^2} = 4x \quad 4x(x^2 - 2) = 4x^3 - 8x$$

توضیح مرحله دوم:

$$\frac{-3x^2}{x^2} = -3 \quad -3(x^2 - 2) = -3x^2 + 6$$

چون درجه باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر است. تقسیم پایان می پذیرد.

کار در خانه (۴):

تقسیم زیر را انجام دهید.

$$4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5 \quad | \quad x^4 - 1$$

کار در خانه (۵):

اگر چند جمله ای $20x^3 + 23x^2 - 10x + a$ بر $4x + 3$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید.

(راهنمایی: بخش پذیر بودن یعنی باقیمانده تقسیم صفر شود.)

فرامرز انتظاری

کار در خانه (۱):

تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$\frac{18a^3b^4}{6a^2b^4} = \frac{3}{a^1}$$

$$\frac{14x^3y^4}{21x^4y^3} = \frac{2y^4}{3x^5}$$

$$\frac{-3x^3y^5z^4}{5y^5z^1} = \frac{-3x^3}{5z^3}$$

کار در خانه (۲):

تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$\frac{24x^2y^2 - 4z + 3xyz}{2x^2z} = \frac{24x^2y^2}{2x^2z} - \frac{4z}{2x^2z} + \frac{3xyz}{2x^2z} = \frac{12x^2y^2}{z} - \frac{2}{x^2} + \frac{3y}{2x}$$

$$\frac{1 \cdot a^3y - a^2y^2 + 15xy}{5y^2} = \frac{1 \cdot a^3y}{5y^2} - \frac{a^2y^2}{5y^2} + \frac{15xy}{5y^2} = \frac{2a^3}{y} - \frac{a^2}{5} + \frac{3x}{y}$$

کار در خانه (۳):

تقسیم زیر را انجام دهید.

توضیح مرحله اول:

$$\frac{6x^3}{x} = 6x^2 \quad 6x^2(x-2) = 6x^3 - 12x^2$$

توضیح مرحله دوم:

$$\frac{-7x^2}{x} = -7x \quad -7x(x-2) = -7x^2 + 14x$$

توضیح مرحله سوم:

$$\frac{2x}{x} = +2 \quad +2(x-2) = +2x - 4$$

$$\cancel{6x^3} - 19x^2 + 16x - 4 \quad |x-2$$

$$\begin{array}{r} - \\ \cancel{+6x^3} - 12x^2 \\ \hline \end{array} \quad 6x^2 - 7x + 2$$

$$\cancel{-7x^2} + 16x - 4$$

$$\begin{array}{r} + \\ \cancel{-7x^2} + 14x \\ \hline \end{array}$$

$$\cancel{+2x} - 4$$

$$\begin{array}{r} - \\ \cancel{+2x} - 4 \\ \hline \end{array}$$

.

کار در خانه (۴):

تقسیم زیر را انجام دهید.

[illegible]

توضیح مرحله اول:

$$\frac{r x^r}{x^r} = r x^r \quad r x^r (x^r - 1) = r x^r - r x^r$$

توضیح مرحله دوم:

$$\frac{-\Psi x^F}{x^F} = -\Psi \qquad -\Psi(x^F - 1) = -\Psi x^F + \Psi$$

کار در خانه (۵):

اگر چند جمله ای $a + 1 \cdot x - 23x^2 + 2 \cdot x^3$ بر $3x + 4$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید.

(راهنمایی: بخش پذیر بودن یعنی باقیمانده تقسیم صفر شود.)

$$\begin{array}{r} \cancel{2 \cdot x^2} + 23x^2 - 1 \cdot x + a \\ \underline{ + 2 \cdot x^2 + 15x^2} \\ + \cancel{11x^2} - 1 \cdot x + a \\ \phantom{+ \cancel{11x^2}} + 6x \\ \hline \phantom{+ \cancel{11x^2}} - \cancel{16x} + a \\ \phantom{+ \cancel{11x^2}} \phantom{- \cancel{16x}} + \\ \hline \phantom{+ \cancel{11x^2}} \phantom{- \cancel{16x}} \\ \hline a + 12 \end{array}$$

توضیح مرحله اول:

$$\frac{f \cdot x^r}{f x} = \Delta x^r \quad \Delta x^r(fx + f) = f \cdot x^r + 1 \Delta x^r$$

توضیح مرحله دوم:

$$\frac{+\lambda x^r}{r x} = +r x \qquad r x (r x + r) = \lambda x^r + \varepsilon x$$

توضیح مرحله سوم:

$$\frac{-16x}{4x} = -4 \qquad -4(4x + 3) = -16x - 12$$

$$a + 12 = 0 \rightarrow a = -12$$

باقیمانده برابر صفر است.

فرامرز انتظاری